جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

محاضرات في مقياس

الإحصـــاء الرياضي.

المحور الخامس: التوزيعات الاحتمالية الخاصة

الجزء الثاني: التوزيعات الاحتمالية الخاصة المستمرة.

(التوزيع المنتظم، الطبيعي، الأسي، قـــاما، بيتا، كاي-مربع، ستودنت، فيشر).

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

المحور الخامس: التوزيعات الاحتمالية الخاصة

الجزء الثاني: التوزيعات الاحتمالية الخاصة المستمرة.

تمهيد: ذكرنا في الجزء الأول من هذا المحور الخامس أن قوانين الاحتمالات لهذه التوزيعات الخاصة تنقسم الى مجموعتين: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، والتي تطرقنا إلى أهمها وأشهرها في الجزء الأول، وقوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة، التي ستكون محور درسنا في هذا الجزء الثاني والأخير، حيث سنتناول التوزيعات الآتية:

- ✓ التوزيع المنتظم.
- ✓ التوزيع الطبيعي.
- ✓ التوزيع الأسي.
- ✓ توزيع "قـــاما".
- ✓ توزيع "بيتا".
- ✓ توزيع "كـــــاي – مربع".
- ✓ توزيع "ستودنت".
- ✓ توزيع "فيشر – سنيديكور".

وفيما يلي نتم دراسة التوزيعات الاحتمالية الخاصة المستمرة.

ب- التوزيعات الاحتمالية الخاصة للمتغير المستمر:

1. التوزيع المنتظم:

- **تعريفه:**

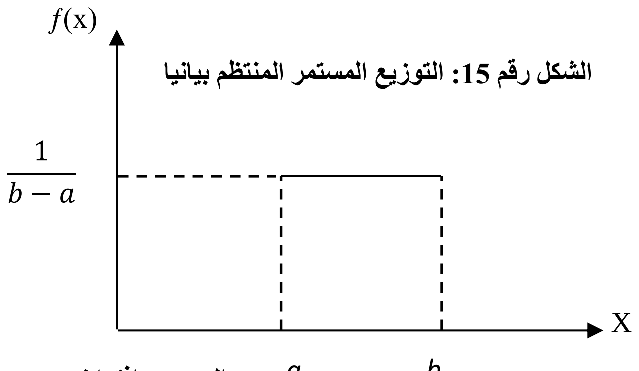
لنفرض أن لدينا متحولاً عشوائيا مستمرا X معرفاً على المجال [a , b] ، فإذا كانت كثافةُ توزُّعِه تحافظ على قيمة ثابتة في هذا المجال وتساوي الصفر خارجه، نقول أن X خاضع لتوزيع منتظم.

- **قانون احتماله:**

انطلاقا من التعريف السابق، نعرف قانون التوزيع المستمر المنتظم كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \dots\dots\ X \in [a\,.\,b] \\ 0 & \dots\dots\ X \notin [a\,.\,b] \end{cases}$$

- **تمثيله البياني**: أنظر الشكل رقم 15.



الشكل رقم 15: التوزيع المستمر المنتظم بيانيا

المصدر: افتراضي

- **خواصه**: ككل توزيع احتمالي، لا بد من توافر ما يلي:

$$* \ f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \geq 0$$

وهذا محقق دائماً طالما أن $a < b$

$$* \ \int_a^b f(x)dx = 1$$

- **تابع التوزيع المنتظم**:

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \int_a^{x_k} f(x)dx = \int_a^{x_k} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} x|_a^{x_k} = \frac{x_k - a}{b-a}$$

أي أن: $F(b) = P(X \leq b) = \frac{b-a}{b-a} = 1$ ومنه فإن تابع التوزيع يأخذ الصورة التالية :

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 & \dots\dots & x_k < a \\ \frac{x_k - a}{b-a} & \dots\dots & a \leq x_k < b \\ 1 & \dots\dots & x_k \geq b \end{cases}$$

أما الاحتمالات الأخرى فتحسب بتوظيف تابع التوزيع كما يلي:

$$* \ P(X > x_k) = 1 - P(X \leq x_k) = 1 - F(x_k) = \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x_k - a}}{\boldsymbol{b - a}}$$

$$* \ P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - a}{b-a} - \frac{x_1 - a}{b-a} = \frac{\boldsymbol{x_2 - x_1}}{\boldsymbol{b-a}}$$

أي الاحتمال يساوي طول المجال الجزئي على طول المجال الكلي.

- **المميزات العددية للمتغير المستمر الخاضع للتوزيع المنتظم**:

✓ **التوقع الرياضي**: $\boldsymbol{E(x) = \frac{b+a}{2}}$ حيث ينطبق $E(x)$ على منتصف المجال $[a . b]$ في محور السينات.

ملاحظات:

- إذا كان X معرفاً في المجال $[-a , +a]$ فإن $E(x) = 0$.
- إذا كان $X \in [a.b]$ فإن $E(x) \in [a.b]$.
- بسبب التناظر في هذا التوزيع فإن التوقع الرياضي والوسيط متساويان بينما ليس لهذا التوزيع منوالا.

✓ **التباين**: $V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2. التوزيع الطبيعي: *Distribution Normale*

➢ **تعريفه**: يُعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة وأكثرها استخداماً في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، وذلك لعدة اعتبارات أهمها:

✓ في الكثير من الحالات التطبيقية - اجتماعية كانت أم اقتصادية – يكون توزيع المتحول العشوائي طبيعيا، كطول الإنسان، وزنه، عمره، معدل ذكائه، ...

✓ معظم قوانين التوزيعات الاحتمالية -المتقطعة منها والمستمرة– تؤول إلى هذا التوزيع عند توافر شروط معينة.

✓ تعتمد اختبارات الفروض الإحصائية ومجالات الثقة على التوزيع الطبيعي[1].

➢ **قانون احتماله**: نقول أن المتحول العشوائي X خاضع للتوزيع الطبيعي، ذي المعلمتين μ و σ (ونكتب: $X \sim \mathcal{N}(\mu , \sigma)$) إذا كانت دالة كثافته المعرفة في المجال $]-\infty, +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث: $e = 2.71828$

$\pi = 3.14$

σ : الانحراف المعياري. μ: التوقع الرياضي.

➢ **تمثيله البياني**:

انظر الشكل رقم 16.

الشكل رقم 16: منحنى التوزيع الطبيعي

المصدر: افتراضي

➢ **خواصه**:

✓ منحنى التوزيع الطبيعي ناقوسي الشكل.

✓ مهما كانت قيمة X فإن $f(x) \geq 0$ وهذا لأن المنحنى دوما فوق محور السينات (المحور الافقي).

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (أي أن مجموع المساحة الكلية تحت المنحنى دوما يساوي 1) .

✓ منحناه متناظر حول المحور العمودي الذي يشمل μ على المحور الأفقي أي أن هذا العمود يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين بحيث: $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$

✓ يمتد طرفا المنحنى الى مالانهاية في الاتجاهين دون أن يتقاطعا مع المحور الأفقي إلا في اللانهاية.

✓ يصل إلى قمته (أعلى احتمال) عندما $X = E(x)$ ، وبما أن المنحنى متناظر فإنه عند هذه النقطة نجد أن: $X = E(x) = M_e = M_o$.

✓ يتصف منحناه بأنه معتدل؛ أي أنه لا مدبب ولا مفلطح وغير ملتوٍ، ولهذا يسمى أحياناً التوزيع المعتدل.

[1] هذا الموضوع سيتطرق له الطلبة بالتفصيل في السنة الثانية.

✓ في التوزيع الطبيعي دوماً نجد النسب التالية:

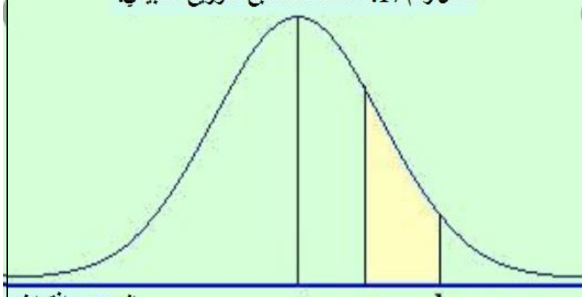
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm \sigma$ = 68.27٪ من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm 2\sigma$ = 95.45٪ من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm 3\sigma$ = 99.73٪ من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm {}^{2}/_{3}\,\sigma$ = 50.00٪ من المساحة الكلية.

➢ **القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي الطبيعي:**

✓ **التوقع الرياضي:** $E(x) = \mu$

✓ **التباين:** $V(x) = \sigma^2$

الشكل رقم 17: استخدامات تابع التوزيع الطبيعي.



المصدر: افتراضي

➢ **تابع التوزيع الطبيعي:**

$$F(x_k) = P(X \le x_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_k} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ومنه يمكننا حساب احتمال أن يقع X بين قيمتين b , a كما يلي :

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

غير أننا لا نلجأ لحساب هذه التكاملات، بل نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما سنبين في العنصر الآتي:

➢ **قانون التوزيع الطبيعي المعياري:**

التوزيع الطبيعي المعياري هو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي، نحصل عليه باستبدال المتغير العشوائي الطبيعي X بمتغير عشوائي طبيعي معياري Z بحيث: $Z = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$

يسمى Z كذلك المتغير العشوائي المركزي المختصر، الخاضع للتوزيع الطبيعي المعياري ذي المعلمتين $\mu_z = 0$ و $\sigma_z = 1$، ونكتب: $Z \sim \mathcal{N}(0\,,1)$

وعليه تكون دالة كثافة Z كما يلي: $]-\infty\,.+\infty[\; \epsilon\, Z/$ $\qquad f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}}$

وخصائصه هي نفسها خصائص التوزيع الطبيعي العادي.

➢ **أهمية التوزيع الطبيعي المعياري:**

لحساب الاحتمالات دون استخدام التكاملات نلجأ عادة إلى إنشاء جداول احصائية لهذا الغرض، لكن في حالة التوزيع الطبيعي نلاحظ أنه كلما تغير μ أو σ تغير التوزيع وهذا يتطلب جدولاً جديداً، لذلك ظهرت الحاجة إلى توزيع معياري واحد، وبالتالي جدول معياري واحد لكل الحالات المختلفة، وهنا تكمن أهمية التوزيع الطبيعي المعياري.

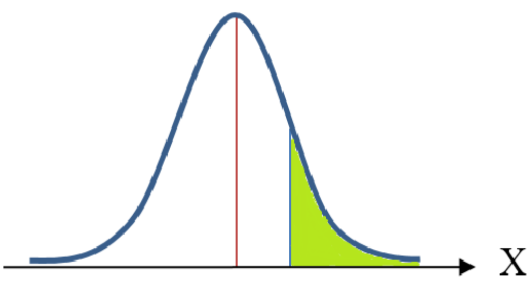
➢ تابع التوزيع للمتغير المعياري Z :

$$F(z_k) = P(Z \leq z_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_k} e^{\frac{-z}{2}}\,dz$$

وباعتبار أن: $Z = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$ فإن $F(z_k) = F(x_k)$

أي أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي المحصورة بين $-\infty$ و x_k هي نفسها المحصورة بين $-\infty$ و z_k. ولقد وضع الإحصائيون جداول لحساب تابع التوزيع المعياري أيضاً، ولإبراز أهمية هذه الجداول نورد المثال الآتي:

الشكل رقم 18: توزيع نقاط الطلبة.



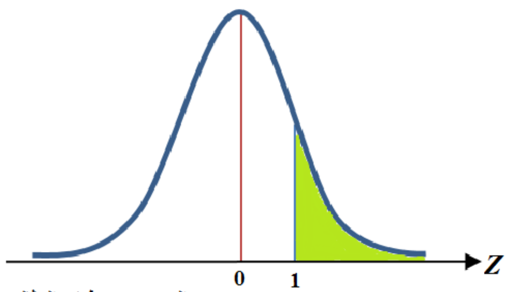
المصدر : معطيات المثال07

***مثال 07**: إذا كانت نقاط الطلبة تخضع التوزيع الطبيعي بتوقع رياضي يساوي 15 وانحراف معياري يساوي 1، أوجد نسبة الطلبة الذين تفوق نقاطهم 16 في مادة الإحصاء.*

***<u>الجواب</u>**: نلاحظ أن $X \sim \mathcal{N}(15\,,1)$ وأن المطلوب هو البحث عن المساحة تحت المنحنى من 16 إلى $+\infty$ المبينة باللون الأخضر في الشكل رقم 18.*

وللقيام بذلك علينا أن ننتقل من هذا التوزيع إلى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقابله، حيث: $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{16-15}{1} = 1$ (انظر الشكل رقم 19).

الشكل رقم 19: التوزيع الطبيعي المعياري لنقاط الطلبة.



المصدر : معطيات المثال07

إن نسبة الطلبة المحصورة نقاطهم في هذا المجال (أكبر من 16) هي نفسها احتمال وجود طالب نقطته أكبر من 16. وعلى ذلك، وبالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم 02:

$$P(X \geq 16) = P(Z \geq 1) = P(0 \leq Z \leq +\infty) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = \mathbf{0.1587} = \mathbf{15.87\%}$$

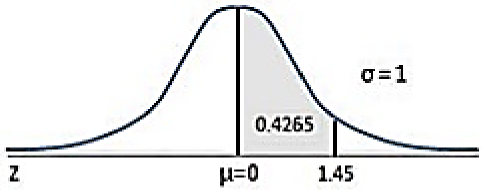
<u>لنشرح مصادر هذه النسب أو الاحتمالات، وكيفية استخدام الجدول:</u>

- $P(0 \leq Z \leq +\infty) = 0.5$ *لأن المساحة الإجمالية -كما نعلم- تساوي 1، إذن فالمساحة من 0 الى $+\infty$ تساوي النصف.*
- $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ *استخرجناها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم 02، والجدول رقم 10 أسفله يُبين مقطعا من هذا الملحق. (انظر بالضبط الخانة الناتجة عن تقاطع العمود 2 مع السطر 12).*

الجدول رقم 10: مقطع من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

Areas Under the One-Tailed Standard Normal Curve

This table provides the area between the mean and some Z score.
For example, when Z score = 1.45 the area = 0.4265.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830

المصدر: الملحق رقم 02.

- *يتكون جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو جدول Z) مما يأتي:*[1]

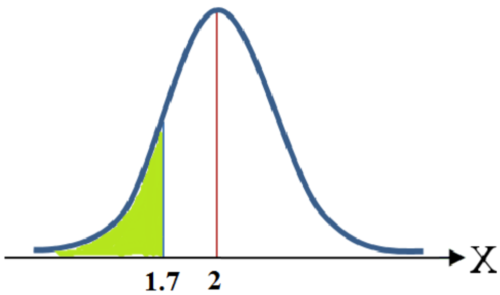
✓ ***العمود الأول:*** *يضم الجزء الأول من قيمة Z والمتكونة من الجزء الصحيح والرقم الأول بعد الفاصلة.*

✓ ***السطر الأول:*** *يضم الجزء الثاني من قيمة Z والمتكونة من الرقم الثاني بعد الفاصلة.*

✓ ***بقية الخانات:*** *تضم المساحات أو الاحتمالات الموافقة للمساحة المضللة من الشكل المبين أعلى الجدول، والمحصورة عادة بين 0 وقيمة Z.*[2] *تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر حسب قيمة Z ؛ مثلا عندما Z=1.15 فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 13 (أين الجزء الأول من Z يساوي 1.1) والعمود رقم 07 (أين الجزء الثاني من Z يساوي 0.05) فنجد المساحة (الاحتمال) بين 0 و 1.15 تساوي 0.3749*

مثال 08 *: ركبت في إحدى السيارات بطارية من صنع وطني، فإذا علمت أن عمر هذا النوع من البطاريات يتوزع طبيعيا بمتوسط عمر إنتاجي يساوي سنتين وانحراف معياري يساوي 0.3 سنة، ما هو احتمال هذه البطارية صالحة لمدة لا تزيد عن 1.7 سنة.*

الشكل رقم 20: توزيع أعمار البطاريات.



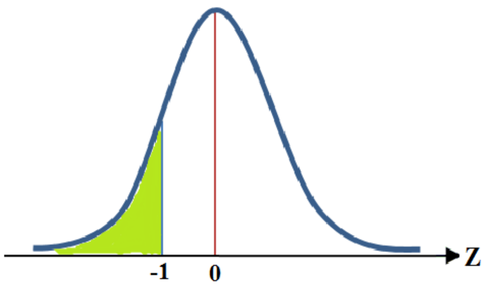
المصدر: معطيات المثال رقم 08.

الجواب: *: نلاحظ أن $X \sim \mathcal{N}(2\,,0.3)$ وأن المطلوب هو البحث عن المساحة تحت المنحنى من $(-\infty)$ إلى 1.7 المبينة باللون الأخضر في الشكل رقم 20.*

[1] قد تختلف هذه المكونات من جدول لآخر، إلا أن النتيجة المتوصل إليها باستخدامها جميعا ستكون واحدة.
[2] وقد نجد اختلافا في جداول Z أخرى، كأن تكون المساحة المضللة من $-\infty$ إلى قيمة موجبة من قيم Z.

وللقيام بذلك علينا أن ننتقل من هذا التوزيع إلى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقابله، حيث: $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{1.7-2}{0.3} = (-1)$ (انظر الشكل رقم 21).

الشكل رقم 21: التوزيع الطبيعي المعياري لعمر البطاريات.



المصدر: معطيات المثال رقم 08.

وعلى ذلك، وبالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم 02 فإن:

$P(X \leq 1.7) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1)$ (بسبب التناظر)

$$= P(0 \leq Z \leq +\infty) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = \mathbf{0.1587}$$

ملاحظة: على غِرار التوزيع الطبيعي، فإنه في التوزيع المعياري سنجد أن:

* $P(-1 \leq Z \leq +1) = 68.27\%$
* $P(-3 \leq Z \leq +3) = 99.73\%$
* $P(-2 \leq Z \leq +2) = 95.45$
* $P\left(\frac{-2}{3} \leq Z \leq \frac{+2}{3}\right) = 50.00\%$

➢ **العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي:**

في التوزيع الثنائي عندما يكون عدد التجارب N كبيراً جداً فإن هذا سيطرح صعوبة حساب الاحتمال، وفي هذا الإطار لاحظ العالم الرياضي الإنجليزي *De.Moivre* أن التوزيع الطبيعي هو النهاية الحدية لتوزيع الثنائي، وهذا ما أكده العالم الفرنسي *Laplass*.

أي أنه كلما كانت N كبيرة، بينما لم يكن p ولا q قريبين جداً من الصفر، فإن التوزيع الثنائي يقترب كثيراً التوزيع الطبيعي، حيث يمكن استخدام هذا الأخير بديلا عن الأول، أين يكون المتغير العشوائي المعياري كما يلي: $Z = \frac{x-NP}{\sqrt{NPq}}$، ونعتبر أن هذا يتحقق إذا كان : $N \geq 50$ و $NP > 5$ و $Nq > 5$ بعبارة أخرى: عدد التجارب يفوق 50 تجربة وكل من NP و Nq كلاهما أكبر من 5 .

➢ **العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون:**

طالما أن هناك علاقة بين التوزيعين الثنائي و البواسوني من جهة، وعلاقة بين التوزيعين الثنائي والطبيعي من جهة أخرى، فإن هذا الأخير تربطه علاقة أكيدة بالتوزيع البواسوني. فإذا كان لدينا متحول عشوائي خاضع للتوزيع البواسوني بحيث كلما كانت قيمة λ كبيرة جداً $(\lambda \to +\infty)$ ، فإن التوزيع البواسوني يؤول إلى التوزيع الطبيعي ذي المتحول العشوائي المعياري Z المعرف كما يلي: $Z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$

3. التوزيع الأُسّي: *Distribution Exponentielle*

➢ **تعريفه**: عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في المسائل المتعلقة بقياس الزمن، أين المتغير العشوائي قيمته عبارة عن لحظة معينة (مفاجئة) على محور الزمن، مثل لحظة النداء للزبون التالي إلى شباك معين (البريد مثلاً)، لحظة انطفاء مصباح كهربائي أثناء الخدمة، لحظة الانتهاء من تصليح آلة... الخ.

وكقاعدة عامة، يُستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط يساوي $\frac{1}{\alpha}$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم، كما يحدث مثلاً مع عمر الإنسان.[1]

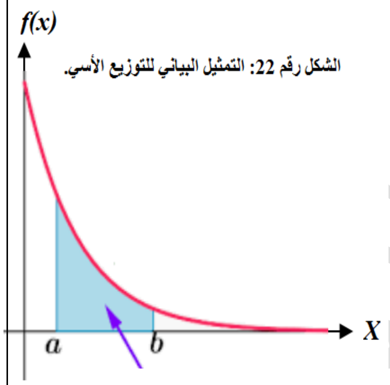
نشير أيضاً إلى أن لهذا التوزيع علاقة بتوزيع "بواسون"، فإذا كان وقوع أحداث معينة يتبع توزيع بواسون، فإن <u>المدة الفاصلة</u> بين وقوع حديثين من هذه الأحداث تتبع التوزيع الأسي، فمثلا إذا كان وصول الزبائن إلى أحد شبابيك خدمة ما يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وصول كل زبونين إلى الشباك تخضع للتوزيع الأسي.

➢ **قانون احتماله**: نقول إن المتحول العشوائي المستمر الموجب X يخضع للتوزيع الأسي ذي المَعْلمة α ، ونكتب $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha)$ ، إذا كان قانون احتماله معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \dots\dots \quad X \geq 0 \\ 0 & \dots\dots \quad X < 0 \end{cases} \qquad / \ \alpha > 0$$

➢ **خواصه**: مهما كان X موجباً فإن:

$$* \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad *f(x) \geq 0.$$



الشكل رقم 22: التمثيل البياني للتوزيع الأسي.

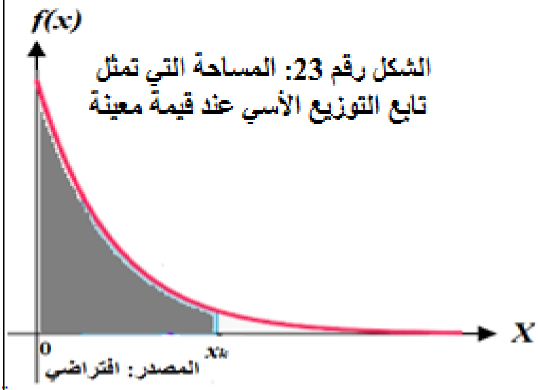
المصدر: http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-

➢ **تمثيله البياني**: أنظر الشكل رقم 22. حيث يمكن حساب احتمال وقوع X بين a و b:

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x} dx$$

➢ **تابع التوزيع الأسي**:

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \int_0^{x_k} f(x)dx = \int_0^{x_k} \alpha e^{-\alpha x} dx$$



الشكل رقم 23: المساحة التي تمثل تابع التوزيع الأسي عند قيمة معينة

المصدر: افتراضي

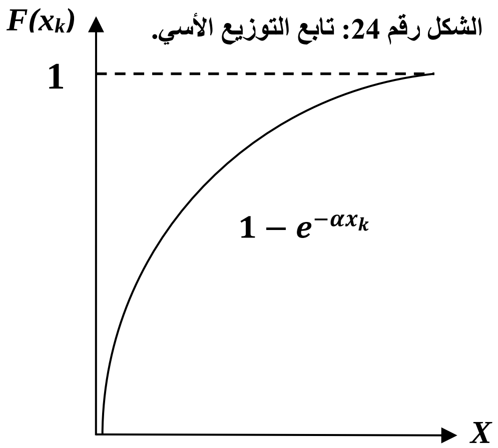
[1] يمر عمر الانسان بثلاث مراحل أساسية: تبدأ بمرحلة الصبا ثم مرحلة قوة الشباب ثم تنتهي بمرحلة الشيخوخة، وهذا مطرد في كل البشر تقريبا.

وبتبسيط هذا التكامل إلى صورته النهائية نجد أن:

$$F(x_k)=\begin{cases}0 & x_k<0\\ 1-e^{-\alpha x_k} & x_k\geq 0\\ 1 & x_k\to+\infty\end{cases}$$

يمكن تمثيل تابع التوزيع $F(x_k)$ بيانيا وفقا لما يظهر في الشكل رقم 24.

الشكل رقم 24: تابع التوزيع الأسي.



المصدر: السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، ج 2.

- **المميزات العددية للمتغير الأسي:**
  - **التوقع الرياضي:** $E(x)=\frac{1}{\alpha}$
  - **التباين:** $V(x)=\frac{1}{\alpha^2}$

مثال09: *تتلقى ورشة لتصليح الآلات الكاتبة في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، فإذا حدَّدنا انطلاق الزمن في لحظة معينة x_1 , ما هو احتمال تلقي مكالمة خلال نصف الساعة القادم؟*

الجواب: *لنفرض أننا الآن عند اللحظة x_1، وأطلقنا العداد الزمني "كرونوماتر". إن لحظة وصول أول مكالمة خلال نصف الساعة القادم هي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الأسي ذي المعلمة $\alpha=\frac{1}{5}$ (لأن $E(x)=\frac{1}{\alpha}=5$) ونكتب $X\sim \mathcal{E}(\frac{1}{5})$.*

إن تلقي مكالمة في غضون نصف ساعة معناه أن التوقيت الذي سيسجل على "الكرونومتر" لحظة وصول المكالمة سيكون أقل من أو يساوي نصف ساعة، ومنه احتمال وصول هذه المكالمة يحسب كما يلي:

$$p(X\leq 0.5)=F(0.5)=1-e^{-(\frac{1}{5})0.5}=1-0.4094=\mathbf{0.5906}$$

4. توزيع ڤــــامــــاَ : *Distribution Gamma*

- تعريفه: لقد أشتَق توزيعُ ڤـــــامــــاَ اسمَه من دالة رياضية معروفة تدعى "الدالة ڤـــــامــــاَ" والتي لها دورٌ مهم في تعريف العديد من التوزيعات الاحتمالية مثل: توزيع ڤـــــامــــاَ، توزيع "بيتــاَ"، توزيع كـــاي مربع، فيشر، ستورنت... الخ. ولهذا سنتطرق باختصار إلى هذه الدالة الموجبة قبل دراسة توزيع ڤـــــامــــاَ.
- **دالــة ڤـــامـــاَ:** يرمز للدالة ڤـــــامــــاَ ذات المعلمة الموجبة تماماً "n" بالرمز Γ وتعرف كما يلي:

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}x^{n-1}\,e^{-x}dx$$

- **خصائص دالة ڤـــامـــاَ:**

1) $\Gamma(\mathrm{n})=(\mathrm{n}-1)\Gamma(\mathrm{n}-1)$
2) $\Gamma(\mathrm{n})=(\mathrm{n}-1)!$
3) $\Gamma(1)=1$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

مثال10: أحسب ما يلي:

1. $\Gamma(4.5)$
2. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx$

الجواب: لنوظف خصائص الدالة Γ:

1. $\Gamma(4.5) = 3.5\Gamma(3.5)$

$\Gamma(3.5) = 2.5\Gamma(2.5)$

$\Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(1.5)$

$\Gamma(1.5) = 0.5\Gamma(0.5)$

$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

وعلى ذلك:

$$\Gamma(4.5) = (3.5)(2.5)(1.5)(0.5)(\sqrt{\pi}) = \mathbf{11.63}$$

2. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = \mathbf{6}$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx = \int_0^{+\infty} x^{(-1/2)} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} e^{-x} dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = \mathbf{1.77}$

➢ **قانون احتمال توزيع قـــــامـــــاَ:** نقول عن متحول عشوائي X أنه خاضع لتوزيع قـــــامـــــاَ ذي المعلمين الموجبين تماماً α, n ، ونكتب $X \sim \Gamma(\alpha, n)$ ، إذا كان قانون احتماله معرفاً كما يلي:

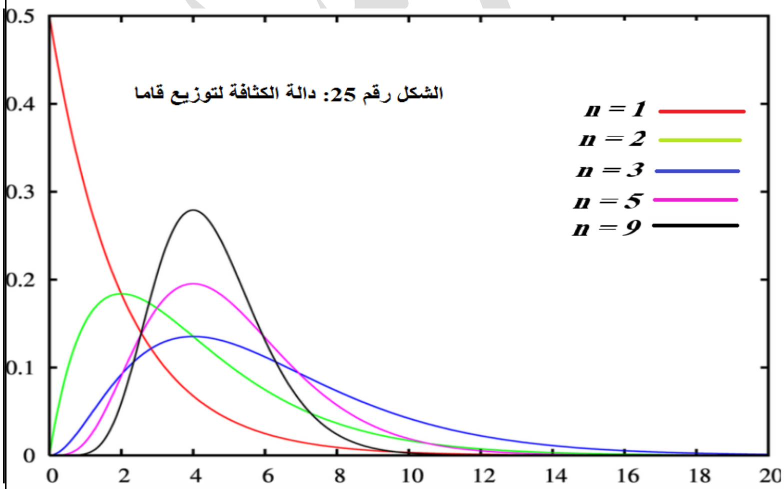
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} \alpha^n . x^{n-1} . e^{-\alpha x} & \dots\dots \ X \geq 0 \\ 0 & \dots\dots \ X < 0 \end{cases} \qquad /n > 0, \alpha > 0$$

➢ **القيم العددية المميزة لمتغير توزيع قـــــامـــــاَ:**

- التوقع الرياضي: $E(x) = \frac{n}{\alpha}$
- التباين: $V(x) = \frac{n}{\alpha^2}$

حالة خاصة: إذا كان $n=1$ فإن توزيع قـــــامـــــاَ يصبح التوزيع الأسي.

➢ **الشكل البياني لتوزيع قــامـاَ:** يأخذ توزيع قــامـاَ أشكالا مختلفة حسب قيمة المعلمة n، حيث كلما كبرت قيمة n كلما آل المنحنى الى التوزيع الطبيعي. (أنظر الشكل رقم 25).



المصدر: https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_Gamma

➢ **خواصه**

- $f(x) \geq 0$
- $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$

➢ **تابع توزيع قـــامـــاَ** :

$$F(x_k) = p(X \le x_k) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{x_k} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

نظرية: إذا كان لدينا متحولين عشوائيين X_2 ,X_1 خاضعين لتوزيع قـاما بمعلمتين n_1 , n_2 على الترتيب فإن المتحول العشوائي X الذي يساوي (X_1+X_2) خاضع هو الآخر لتوزيع قـــامـــا ذي المعلمة n حيث : $n=n_1+n_2$.

5. توزيع بيتـــا: *Distribution Bêta*

➢ **تعريفه**: على غرار توزيع قـــامـــا فقد أشتُق اسمُ هذا التوزيع من دالة رياضية معروفة هي " دالة بيتـــا " ولهذه الدالة علاقة وطيدة بدالة قــــامـــا.

➢ **دالة بيتـــا**: تُعرّف الدالة بيتـــا ذات المعلمتين الموجبتين تماماً m , n كما يلي:

$$\beta\,(m\,,n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} dx$$

➢ **العلاقة بين الدالتين " قـــامـــا " و " بيتـــا "**:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

➢ **خواص الدالة " بيتـــا "**

$$*\ \beta(m\,,n) = \beta(n\,,m) \qquad *\ \beta(1,1) = 1 \qquad *\ \beta\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \pi$$

➢ **قانون احتمال توزيع بيتـــا**: نقول أن المتحول العشوائي X خاضع لتوزيع بيتـــا ذي المعلمتين الموجبتين تماما n , m ، ونكتب: $X \backsim \beta(m,n)$ ، إذا كانت دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(m,n)}.x^{m-1}.(1-x)^{n-1} \ \ldots\ldots\ 0 < X < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{فيما عدا ذلك} \ldots \end{cases}$$

➢ **خواص توزيع بيتـــا**: $\ *\ f(x) \ge 0 \qquad *\ \int_0^1 f(x)dx = 1$

➢ **المميزات العددية لمتغير توزيع بيتـــا**:

- التوقع الرياضي: $E(x) = \frac{m}{m+n}$
- التباين: $V(x) = \frac{m.n}{(m+n)^2.(m+n+1)}$

<u>ملاحظة</u>: انطلاقا من العلاقة بين الدالتين Γ و β يمكن كتابة دالة كثافة β بدلالة Γ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)}.x^{m-1}.(1-x)^{n-1} \ \ldots\ldots\ 0 < X < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{فيما عدا ذلك} \ldots\ldots \end{cases}$$

➢ **تابع توزيع بيتـــا**:

$$F(x_k) = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^{x_k} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

6. توزيع كاي – مربع χ^2 : *(Distribution Khi Deux)*

➢ **تعريفه:** اكتشف العالم *Helmert* عام 1876م ثم تطرق له فيما بعد العالم كارل بيرسون عام 1900م وأدخل الرمز اليوناني χ لأول مرة عام 1905م.

ويعتبر هذا التوزيع من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة، المستخدمة بكثرة في مجال التقدير واختبارات الفروض من خلال مقارنة مجموعة من المشاهدات مع ما يقابلها نظريا، كما يستعمل في اختبار جودة التوفيق (L'ajustement) وكذا استقلال جداول التوافق.

➢ **قانون توزيعه احتمالي:** إذا كان X متحولا عشوائيا موجبا خاضعا لتوزيع كاي - مربع، ذي المعلمة الموجبة v (ونكتب: $X \sim \chi^2(v)$) فإن دالة كثافته معرفة كما يلي:

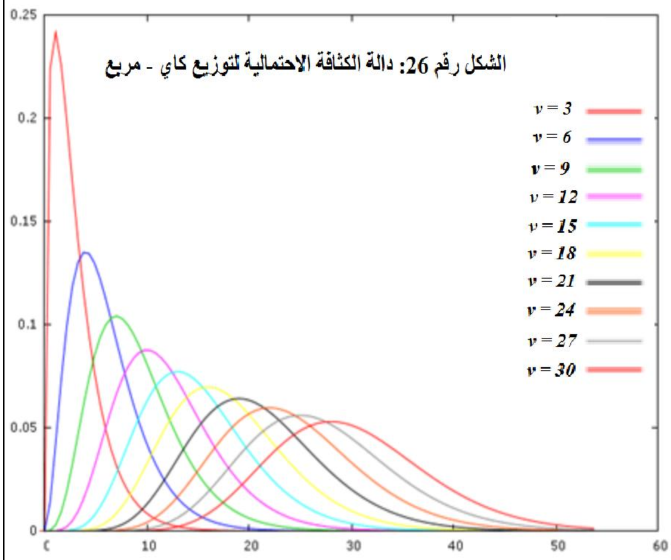
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} . e^{-\left(\frac{x}{2}\right)} . x^{\frac{v}{2}-1} & \ldots \ldots \quad X \geq 0 \\ 0 & \ldots \ldots \quad \text{ذلك عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث: v : عدد صحيح موجب يعكس عدد درجات الحرية، ويرمز له أحيانا بالرمز dl أو df.

Γ: الدالة قـــــامـــــا.

➢ **شكله البياني:**

يأخذ توزيع χ^2 أشكالا مختلفة حسب قيمة v حيث يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كبرت قيمة v (أنظر الشكل 26).



➢ **خواصه:**

$$* \ f(x) \geq 0 \qquad\qquad * \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

➢ **تابع توزيع χ^2:**

$$F(x_k) = P(\chi^2 \leq x_k) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{x_k} x^{\frac{v}{2}-1} . e^{-\frac{x}{2}} dx$$

➢ **القيم العددية المميزة لــ χ^2:**

- التوقع الرياضي: $E(x) = v$
- التباين: $V(x) = 2v$

➢ **جدول قانون توزيع χ^2** : يلخص هذا الجدول قيم χ^2 عند درجات حرية v ودرجات معنوية α (مستوى الدلالة)، حسب الشكل المبين في أعلى الجدول المخصص لذلك. ومستوى الدلالة α هذا عبارة عن قيمة احتمالية تتموضع عند جناح التوزيع، وهي قيمة معاكسة للاحتمال p (أنظر الجدول رقم 11 أسفله).

مثال11: *أوجد احتمال أن تكون قيمة χ^2 عند $v = 10$:*

أ- أقل من أو تساوي 2.156

ب- أكبر من أو تساوي 15.987

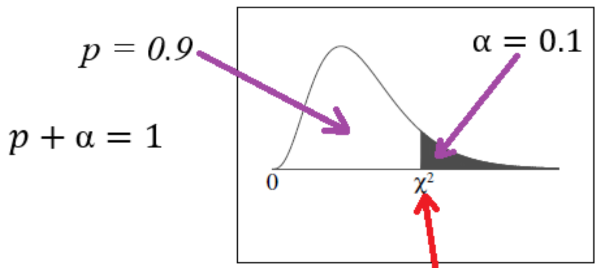
ج- أقل من أو تساوي 23.21

الجواب: *قبل الشروع في الحل، لا بد أولا من شرح مُبسطٍ لكيفية استخدام الجدول:*

يتكون جدول توزيع كاي – مربع- مما يأتي:[1]

- ✓ ***العمود الأول***: *يضم قيم درجات الحرية dl أو df أو v. (هذه هي الرموز المعتادة للتعبير عن درجة الحرية).*
- ✓ ***السطر الأول***: *يضم درجة المعنوية α أو المساحة المضللة بالأسود في الجهة اليمنى*[2] *من الشكل الموجود أعلى الجدول (أي في جناح التوزيع).*
- ✓ ***بقية الخانات***: *تضم قيم المتغير كاي – مربع، والموجودة على محور الفواصل. تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر؛ مثلا عند السطر $v=5$ (أو dl كما هو في الجدول أدناه) ومستوى دلالة $\alpha = 0.1$ (أي $p = 0.9$) فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 06 (أين درجة الحرية تساوي 5) والعمود رقم 07 (أين $\alpha = 0.1$) فنجد قيمة كاي-مربع تساوي 9.236 ونكتب $\chi^2 = 9.236$ (انظر الخانة الملونة بالأحمر في الجدول 11).*

الشكل رقم 11: مقطع من جدول توزيع كاي-مربع



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548

المصدر: https://www.academia.edu/10107363/Chi-square-table

ونعود إلى حل المثال رقم 11:

نذهب إلى السطر المقابل لدرجة حرية تساوي 10، ونبحث عن قيم كاي – مربع التي تقابلها داخل الجدول، وفي كل مرة نجد قيمة من قيم كاي – مربع نبحث عما يقابلها من احتمال أو مساحة في السطر الأول.

1. $p(\chi^2 \leq 2{,}16) = 1 - p(\chi^2 \geq 2{,}16) = 1 - 0{,}995 = \mathbf{0{,}005}$
2. $p(\chi^2 \geq 16) = \mathbf{0{,}1}$
3. $p(\chi^2 \leq 23{,}21) = 1 - p(\chi^2 \geq 23{,}21) = 1 - 0{,}01 = \mathbf{0{,}99}$

[1] قد تختلف هذه المكونات من جدول لآخر، إلا أن النتيجة المتوصل إليها باستخدامها جميعا ستكون واحدة.

[2] وقد نجد اختلافا في جداول كاي-مربع الأخرى، كأن تكون المساحة المضللة في الجهة اليسرى من الشكل، أي قيمة p وليس مستوى الدلالة α

➢ **خصائص توزيع χ^2** :

- إذا كان $\nu = 2$ فإن توزيع χ^2 يصبح التوزيع الأسي، أين $\alpha = \frac{1}{2}$.
- إذا وضعنا $x=2y$ و $\frac{\nu}{2} = n$ ، فإن توزيع χ^2 يصبح توزيع "Γ" .
- إذا كان $\nu > 30$ فإن المتحول العشوائي" $\mathfrak{u}$ " المعرف كما يلي:

$\mathfrak{u} = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ خاضعٌ تقريباً إلى التوزيع الطبيعي المعياري، حيث يمكن إيجاد قيمة $\mathfrak{u}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، وتعويضها في القانون التالي لإيجاد قيمة χ^2 عند احتمال معين p :

$$\chi^2{}_p = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{u}_p + \sqrt{2\nu - 1}\right]^2$$

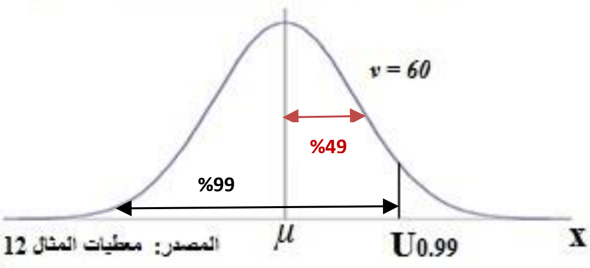
مثال12: *من الجدول رقم 11 أعلاه،"حدد قيمة $\chi^2_{0.99}$ إذا كان $\nu = 60$.*

الجواب: *لنستخدم فكرة اقتراب توزيع كاي-مربع من التوزيع الطبيعي لأن $\nu > 30$*

كما رأينا في الشكل رقم 26 أعلاه فإنه عندما $\nu > 30$ يصبح شكل توزيع كاي-مربع قريبا من شكل التوزيع الطبيعي على النحو الآتي:

ما علينا الآن سوى الذهاب لجدول التوزيع الطبيعي المعياري، واستخراج قيمة $U_{0.99}$ ، أي القيمة على محور الفواصل التي تحصر خلفها أو على يسارها مساحة قدرها 99% ، وبما أن 50% من المساحة محصور بين μ و $-\infty$ فإن ما بقي من المساحة والمحصور بين $U_{0.99}$ و μ يقدر بنسبة 49% . (انظر الشكل رقم 27 المقابل)

الشكل رقم 27: تحول توزيع كاي-مربع إلى التوزيع الطبيعي.



المصدر: معطيات المثال 12

وعلى ذلك نذهب لجدول التوزيع الطبيعي المعياري ونبحث عن القيمة في محور الفواصل (قيمة Z) المقابلة لاحتمال 0.4900 ، وسنجدها تقع عند احتمال 0.4901 أي عند $Z_1 = 2.33$ وهي قيمة U التي نبحث عنها، ومنه:

نعوضها في المعادلة السابقة لنجد قيمة كاي مربع كما يلي:

$$\chi^2{}_{0.99} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{u}_{0.99} + \sqrt{2\nu - 1}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[2.33 + \sqrt{2(60) - 1}\right]^2 = 87.63$$

وقد يطرح الطالب هنا سؤالا مهما: لماذا قمنا بهذه الجولة الطويلة في البحث عن قيمة كاي-مربع في حين كان بإمكاننا استخراجها من جدول كاي، حيث لدينا درجة الحرية 60 والاحتمال 0.99؟

والجواب أننا تعمدنا اختيار درجة الحرية 60 ليتسنى لنا المقارنة بين نتيجة كاي المستخرجة مباشرة من الجدول، ونتيجة كاي المستخرجة بواسطة المعادلة كما في المثال، ونقارن بين النتيجتين لنلحظ التقارب بينهما.

7. توزيع ستودنت: *(La distribution T de Student)*

➢ **تعريفه**: وجد العالم ويليام سيلي قوست *W.S.Gosset* الملقب بـــــ *Student* أنه لا يمكن إجراء عملية اختبار المعنوية (test de signification) على العينات الصغيرة باستخدام التوزيع الطبيعي، رغم خضوع المتحول العشوائي لهذا التوزيع، لذلك وضع توزيعا آخر للعينات الصغيرة وأطلق عليه اسم "توزيع ستودنت ".

➢ **قانون احتماله**: إذا كان T متحولا عشوائيا خاضعا لتوزيع ستودنت فإن دالة كثافته تعرف كما يلي:

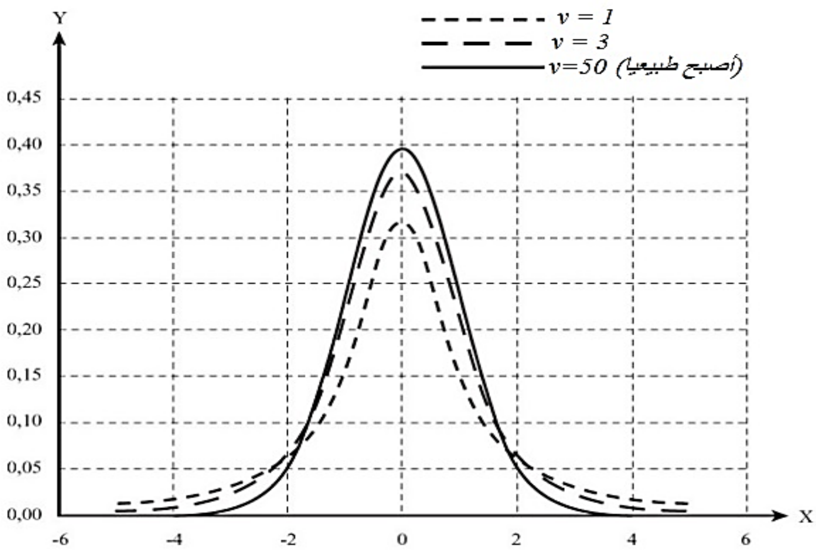
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}.\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left[1+\dfrac{t^2}{\nu}\right]^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \end{cases} \quad \forall t \in]-\infty,+\infty[$$

حيث ν (أو dl أو df في بعض المراجع) تمثل درجة الحرية، وتساوي حجم العينة ناقص 1 ، أي: $\nu = n-1$

➢ **خواصه**: $* \ f(t) \geq 0$ $\qquad * \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

➢ **شكله البياني**:

الشكل رقم 28: توزيع ستودنت حسب درجات الحرية



شكله متناظر حول الصفر، و هو أكثر تفلطحا و انبساطاً من التوزيع الطبيعي، وكلما زادت قيمة ν كلما إقترب من هذا الأخير، حتى إذا بلغت ν 30 فأكثر يصبح توزيع T قريباً جدا من التوزيع الطبيعي.

المصدر: https://statistics.ead-minerve.fr/Web_FR/co/Distributions%20connues_FR.html

➢ **تابع توزيع ستورنت** :

$$F(t_k) = P(T \leq t_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}.\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t_k}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} dt$$

➢ **القيم العددية المميزة لـــT**:

- التوقع الرياضي : $E(t) = 0$
- التباين : $U(t) = \frac{\nu}{\nu-2}$ حيث $\nu > 2$

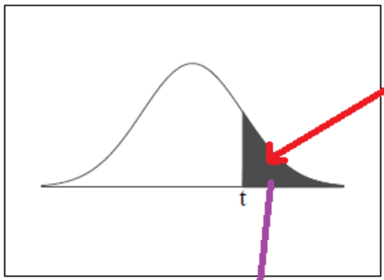
- ➢ **جدول قانون توزيع T** : وضع الإحصائيون جدولاً يساعد على تحديد قيمة T بمعلومية درجة المعنوية α (مستوى الدلالة) ودرجة الحرية ν.

مستوى الدلالة α عبارة عن قيمة احتمالية تتموضع عند جناح التوزيع، وبما أن توزيع ستودنت متناظر فهو توزيع ذو جناحين وليس ذا جناح واحد كما هو الحال مع توزيع كاي-مربع، ولذلك فإن قيمة α ستتوزع مناصفة في أطراف التوزيع.

مثال 13: أ وجد قيمة T إذا كان $\nu = 7$ و $\alpha = 5\%$.

الجواب: لإيجاد قيمة T نذهب الى الجدول الخاص بتوزيع ستودنت (انظر الجدول رقم 12 في الصورة أسفله)، ثم نتبع السطر الموافق لدرجة حرية $dl = 7$ ونحدد نقطة التقاطع مع العمود الموافق لمستوى الدلالة 0.025 (أي نصف α) فنجد **T = 2.365**

الجدول رقم 12: مقطع من جدول توزيع ستودنت



$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

The shaded area is equal to α for $t = t_\alpha$.

df	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055

- ➢ **خصائص توزيع ستورنت** :

- ✓ منحنى T متناظر حول محور التراتيب حيث:

$$P(T \le 0) = P(T \ge 0) = 0.5 \text{ ومنه } P(T \le t) = 1 - P(T \le -t)$$

- ✓ طرفا منحنى T يمتدان الى مالانهاية في الاتجاهين دون أن يتقاطعا مع المحور الأفقي.

8. توزيع فيشر-سنيديكور "F" : *Distribution de Fisher-Snedecor*

➢ **تعريفه** : نقول عن متحول عشوائي F أنه يخضع لتوزيع فيشر إذا كانت دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}.(\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}.(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}}.(x)^{\frac{\nu_1}{2}-1}.(\nu_1+\nu_2x)^{-\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} & x\geq 0\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

حيث ν_1 ν_2 درجتا الحرية لتوزيع F .

➢ **خواصه** :

$$*\ \int_0^{+\infty} f(x)dx=1 \qquad\qquad *\ f(t)\geq 0$$

- إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين ${\chi^2}_1$ ، ${\chi^2}_2$ خاضعين لتوزيع χ^2 بدرجتي حرية ν_1 و ν_2 على الترتيب فإن المتحول العشوائي F حيث $F=\dfrac{{\chi^2}_1/\nu_1}{{\chi^2}_2/\nu_2}$ خاضع لتوزيع فيشر بدرجتي حرية ν_1 ν_2 .
- $F_p(\nu_1,\nu_2)=\dfrac{1}{F_{1-p}(\nu_2,\nu_1)}$

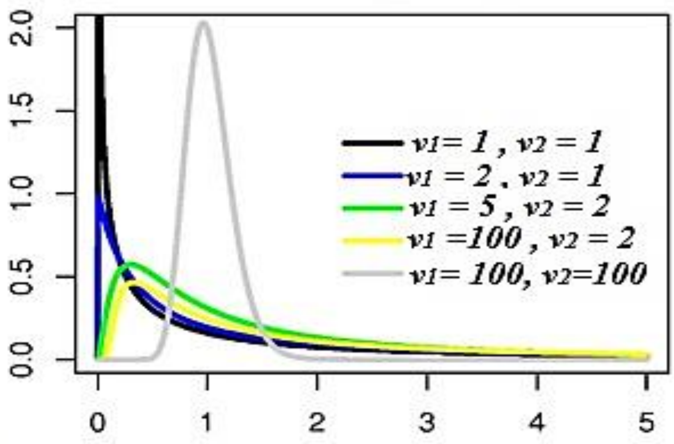
➢ **المميزات العددية للمتغير F**:

- التوقع الرياضي : $E(x)=\dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}$
- التباين : $V(x)=\dfrac{2{\nu_2}^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2}$ حيث $\nu_2>4$

➢ **شكله البياني**:

نلاحظ أن شكله يتغير حسب درجتي الحرية v_1 و v_2 بحيث كلما كبرت قيمتاهما اقترب شكله من شكل التوزيع الطبيعي، وهذا ما يُظهره بوضوح الشكل رقم 29 المقابل.

الشكل رقم 29: توزيع فيشر حسب درجات الحرية.



المصدر: http://www.statelem.com/loi_de_fisher.php

➢ **تابع توزيع فيشر** :

$$F(x_k)=P(X\leq x_k)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^{x_k}(\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}.(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}}.(x)^{\frac{\nu_1}{2}-1}(\nu_2+\nu_1x)^2\,dx$$

➢ جدول قانون توزيع فيشر:

يعطي هذا الجدول القيم الممكنة للمتغير العشوائي F عند احتمال معين P (أو عند درجة معنوية α حيث $(\alpha + P = 1)$ وبدرجتي حرية ν_1 ν_2 ولهذا نكتب أحيانا كل هذه المعطيات كما يلي : "$F_p(\nu_1, \nu_2)$" أو $F_{p(\nu_1,\nu_2)}$

عادة نجد جدولين حسب قيمة P : أحدهما عند P=95% (أي مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$) والآخر عند P=99% (أي مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$).

مثال 14: *أحسب ما يلي :*

- $F_{0.95}(1,10)$
- $F_{0.95}(6,1)$
- $F_{0.99}(6,10)$
- $F_{0.95}(\infty,\infty)$

بالعودة الجدول توزيع فيشر (أنظر الجدول رقم 13 أسفله) نحدد بكل سهولة ويسر قيم F ، ولنشرح القيمة الأولى فقط وبقية القيم تتم على المنوال نفسه.

الجدول رقم 13: مقطع من جدول توزيع فيشر- سنيديكور

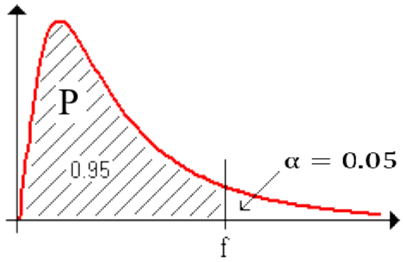
Table : Loi de Fisher-Snedecor

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(\nu1\,;\,\nu2)}$ ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\,(\,F_{(\nu1\,.\,\nu2)} \leq f\,) = 95\%$



ν_2 ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95	246.47
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	**4.74**	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99
10	4.96	4.10	3.71	3.48	**3.33**	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70

من الجدول:

- $F_{0.95}(1,10) = 4.96$

وهكذا مع بقية القيم.

نهاية المحور الخامس والأخير.