8-Les équations de déformation ou équations cinématiques

De manière similaire au champ de contrainte, on va définir un champ de déformation qui peut être représenté en un point par un tenseur. Avant de venir a cette idée, une présentation de certaines définitions s'avère nécessaires.

8-1. Définition : On dit qu'un corps est déformé lorsqu'il y a changement des positions relatives des particules du corps.

Types de déformations :

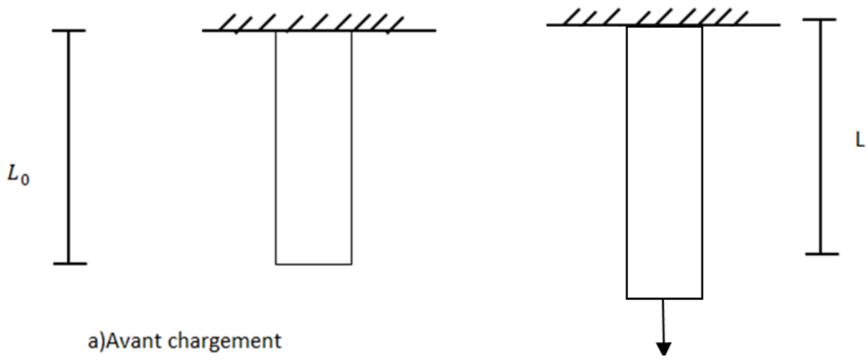
-Déformations longitudinales ou **Extension (ε)**

-Déformations appelées **Distorsion (γ)**

-Déformations appelées **Rotation (ω)**

8-2. Déformations longitudinales ou extension.

Cas d'une barre prismatique (cas le plus simple) suspendue verticalement est soumise a un poids « P » quelconque attaché a son extrémité inferieure, comme dans la figure ci-dessous,



a)Avant chargement

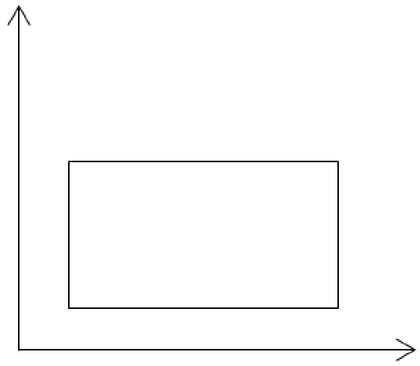
b) Après chargement

$$\frac{\Delta L0}{L0} = \frac{L - L0}{L0} = \varepsilon \quad ; \qquad 51$$

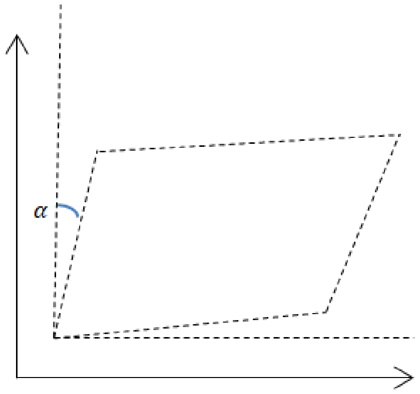
est la définition de la déformation longitudinale (extension). Elle est donc la variation relative de la longueur de l'élément dans l'une des directions du repère considéré.

8-2. Distorsion

Cette forme de déformation est relative au changement de l'angle formé entre les cotés d'un même élément, voir figure, cette distorsion est notée par le symbole « α ». L'exemple le plus simple est celui de l'état de cisaillement pur qui est défini uniquement par les distorsions, tel que l'état des contraintes planes pour lesquels sur les quatre faces d'un élément délimité, seules les contraintes tangentielles sont présentes.



a)Avant déformation



b) Après déformation

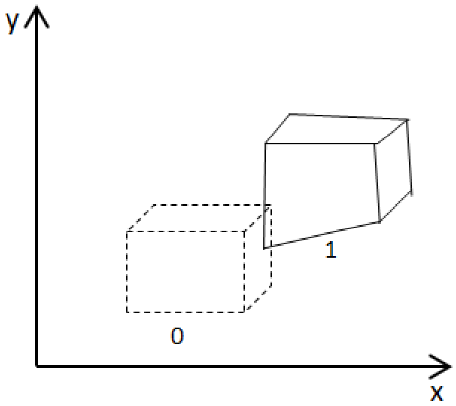
8-3. Les Rotations

C'est le genre de mouvement rigide qui se passe sur un élément solide sans déformation. L'élément solide change de position par rapport au système de coordonnées sans subir des déformations relatives des points du corps. Pour définir la nouvelle position de l'élément cube solide, il serait donc nécessaires de considérer la rotation rigide autour des axes dont les composantes seront notées ; ωxy, ωxz, ωyz.

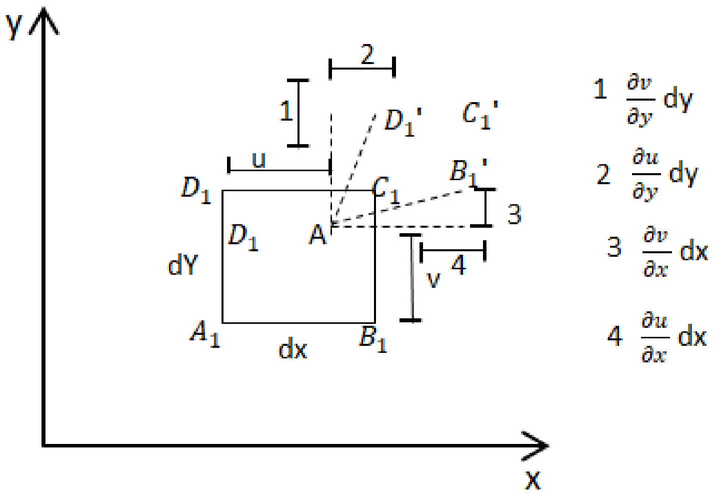
8-4 Les composantes de déformation

8-4.1 Extensions

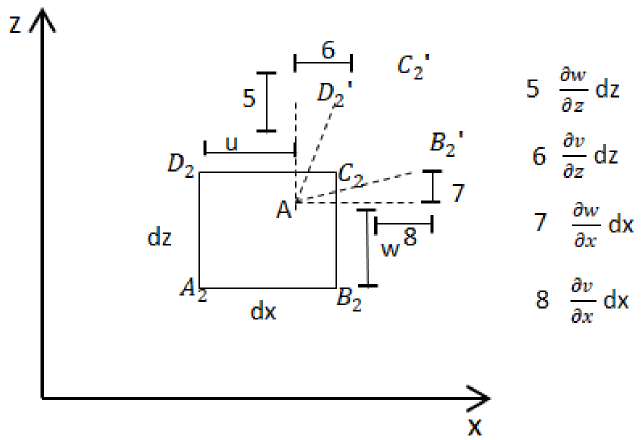
Pour définir les extensions, on considère le petit élément de la figure ci-dessous, dont les projections sur les plan xy et xz sont représentées, ensuite, sur les deux figures a et b.



a) Élément déformé



b)Projection sur le plan x-y



c) Projection sur le plan x-z

Avant déformation la longueur du coté AB est dx. Après déformation A est déplacé en un point dont la projection sur le plan x-y correspond au point A'1 et celle sur le plan x-z au point A'2. Désignons par u,v et w les composantes de déplacement du point A dans les directions x,y et z. Ces composantes varient d'un point à un autre et peuvent être exprimées en utilisant les accroissements de ces quantités. On remarque dans ce cas que le déplacement du point B vers B'1 et B'2 sera défini par :

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx, \qquad v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx, \qquad w + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx,$$

Les projections de A'B' seront donc

$dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$ Suivant la direction x

$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$ Suivant la direction y

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$ Suivant la direction z

Avec ces composantes la longueur du coté A'B' sera ;

$$(A'B')^2 = \left(dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\right)^2 + (\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx)^2$$

Or par définition de la déformation longitudinale on a ;

$\varepsilon_x = \frac{(A'B')}{AB}$-1 , $(A'B') = (\varepsilon x + 1)AB = (1 + \varepsilon x)dx$, d'où

$$(1+\varepsilon_x)^2(dx)^2 = (dx)^2(\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2)$$

$1 + 2\varepsilon_x + {\varepsilon_x}^2 = 1 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

$\varepsilon_x$étant très petite on peut donc négliger ${\varepsilon_x}^2$. D'où

$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2),$

et de façon analogue dans les deux autres directions on définit :

$\varepsilon_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2)$

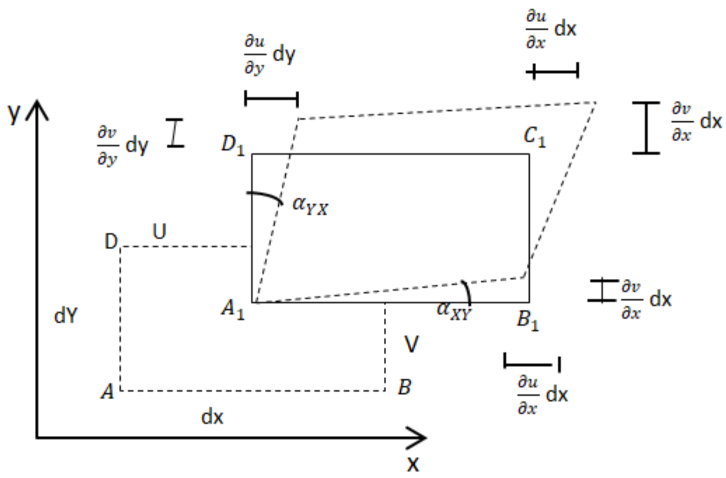
$\varepsilon_z = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2)$

Si on veut s'intéresser uniquement aux petites déformations c'est-à-dire linéariser les expressions alors les dérivées des déplacements sont petites et par conséquent leurs produits et carrées sont aussi négligeables et les expressions de déformations se réduisent aux expressions simples suivantes ;

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \varepsilon_z = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad 53$$

8-4.2 Les Distorsions

Les distorsions peuvent aussi être déterminées a partir des glissements des plans en évaluant les angles formés après déformation et en utilisant les composantes du vecteur de déplacement u,v et w. Considérons le petit élément projeté sur le plan x-y, sur la figure ci-dessous ;



La distorsion est définie par la variation de l'angle que font entre eux les cotés AB et AD, d'où ;

$$\gamma xy = \alpha xy + \alpha yx$$

Les angles étant très petits on peut les considérés par leurs tangentes ;

$$\alpha xy = tg\ \alpha xy = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx}{dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

$$\alpha yx = tg\ \alpha yx = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy}{dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}.$$

Comme les quantités de ε_x et ε_y qui sont $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ sont très petites devant l'unité, on peut les négliger pour écrire enfin que ;

$$\gamma xy = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

De façon similaire les deux autres composantes ;

$$\gamma xz = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\gamma yz = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad 54$$

En introduisant les quantités d'ingénierie, et avec les six composantes de déformation on peut définir le tenseur des déformations comme suite :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\,\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\,\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\,\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\,\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad 55$$

Sachant que pour une écriture uniforme et similaire aux contraintes nous écrivons les composantes de cisaillement du tenseur de déformation comme suite,

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\,\gamma_{xz} = \varepsilon_{zx}\,, \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\,\gamma_{yz} = \varepsilon_{zy}\,. \qquad 56$$

Où ε_{xz} est une composante du tenseur de déformation tangentielle.

Maintenant que nous avons définis le tenseur des déformations, nous allons procéder exactement de la même manière que le tenseur des contraintes et essayer d'obtenir des relations analogues concernant la formule de Cauchy et les déformations principales.

Pendant que le tenseur des contraintes est définit comme étant la limite du rapport de la force sur la surface, la déformation est exprimée par la limite en rapport du taux de changement de la ligne de l'élément sur la longueur initiale de l'élément. De même pour les changements des angles des lignes de la surface sortant d'un point, qui étaient droits avant déformation. Les rotations ne provoquent que des mouvements du corps rigide ou translation et ne produisent pas des déformations au sens exact du terme.

L'état des déformations dans un point est défini comme étant l'ensemble des changements dans les longueurs des éléments et des angles des éléments dans le corps tout en considérant les translations et les rotations des corps rigides.

Ici, comme dans l'état des contraintes, le taux de variation de la longueur par unité de longueur des éléments formant le point solide et le taux de variation des angles entre ces éléments constituant le solide dans le point considéré se calculent une fois l'état finale du solide après déformation est connu.

Notons que la transformation d'un système de coordonnées a un autre se fait par ;

$$\grave{\varepsilon}ij= a_{im}.\, a_{jn}\varepsilon mn, \qquad \varepsilon ij=a_{mi}.\, a_{nj}\grave{\varepsilon} mn\ . \qquad 57$$

Les équations de Cauchy des déformations sont données par les expressions suivantes ;

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_i n_j \qquad et \qquad \varepsilon_{ns} = \varepsilon_{ij} n_j\, s_i \qquad 58$$

En termes de la notation simple et de façon similaire aux chapitre des contraintes, les équations (58) s'écrivent comme les expressions dans (20) ;

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + 2\varepsilon_{xy} l.m + 2\varepsilon_{zy} m.n + 2\varepsilon_{xz} l.n \qquad 59$$

Pour l'expression tangentielle, on s'inspirant de la procédure suivie dans les contraints, on a ;

$${\varepsilon_s}^2 = \varepsilon^2 - {\varepsilon_n}^2 \qquad \text{où} \quad \varepsilon \quad \text{est la résultante} \qquad 60$$