

1- Partie sphérique et déviatorique des contraintes

L'analyse du tenseur des contraintes nous permet de distinguer des états de contraintes indépendants qui peuvent jouer un rôle très important dans les relations contraintes-déformations dans les domaines plastique et élastique. La partie déviatrice du tenseur des contraintes est donnée par ;

$$D_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad 31$$

$$\text{Avec, } \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}I_1 ; \text{ Contrainte moyenne ou octaédrale.} \quad 32$$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix}. \quad 33$$

La somme des composantes diagonales du tenseur déviatorique est nulle.

$$D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = (\sigma_{11} - \sigma_m) + (\sigma_{22} - \sigma_m) + (\sigma_{33} - \sigma_m) = 0. \quad 34$$

L'équation (34) est une condition nécessaire et suffisante pour que l'état des contraintes soit un cisaillement pur. Donc un tenseur de contrainte déviatorique est un état de cisaillement pur. Le tenseur déviateur des contraintes a les mêmes propriétés qu'un tenseur des contraintes ordinaire. A partir de l'équation (31) on peut écrire ;

$$\sigma_{ij} = D_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad 35$$

Qui signifie que chaque état de contrainte se compose d'un état déviatorique D_{ij} et un état de tension sphérique représentée par $\sigma_m \delta_{ij}$.

On peut toujours obtenir les contraintes principales du tenseur déviateur par une simple soustraction de la contrainte moyenne σ_m ;

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix}. \quad 36$$

Les contraintes principales du tenseur déviateur peuvent être déterminées de la même façon que les contraintes principales d'un tenseur de contraintes ordinaire c-a-d ;

$$|D_{ij} - D\delta_{ij}| = 0 \quad 37$$

Qui signifie ;

$$D^3 - J_1 D^2 + J_2 D - J_3 = 0. \quad 38$$

Avec ;

$$J_1 = D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = D_1 + D_2 + D_3 = 0 \quad 39$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(D_{ij}D_{ji}) = - \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad 40$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(D_{ij}D_{jk}D_{ki}) = \frac{1}{3}(D_1^3 + D_2^3 + D_3^3) = D_1D_2D_3 \quad 41$$

Où J_1, J_2 et J_3 sont appelés les invariants du tenseur déviateur, ils sont in affectés par la rotation des axes de coordonnées. Ces invariants seront utiles pour l'étude ultérieure des critères de rupture dans les matériaux isotropiques.

2- Les contraintes octaédrales

Un plan octaédral de contrainte est un plan de normal faisant angles égaux avec chaque axe principal de contrainte. Supposons que x_1, x_2 et x_3 sont les axes principaux, les normales n_i a un plan octaédral a la forme ;

$$n_i = [n_1 n_2 n_3] = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1] \quad 42$$

La contrainte normale σ_n sur un plan octaédral est donné par Cauchy sous la forme ;

$$\sigma_{oct} = \sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad 43$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] = \sigma_m \quad 44$$

Et les contraintes de cisaillement sur un plan octaédral sont données par ;

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - \sigma_{oct}^2 \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad 45$$

En utilisant (40) on peut écrire $\tau_{oct} = \left(\frac{2}{3}J_2\right)^{1/2} \quad 46$

3- Les contraintes de cisaillement principales

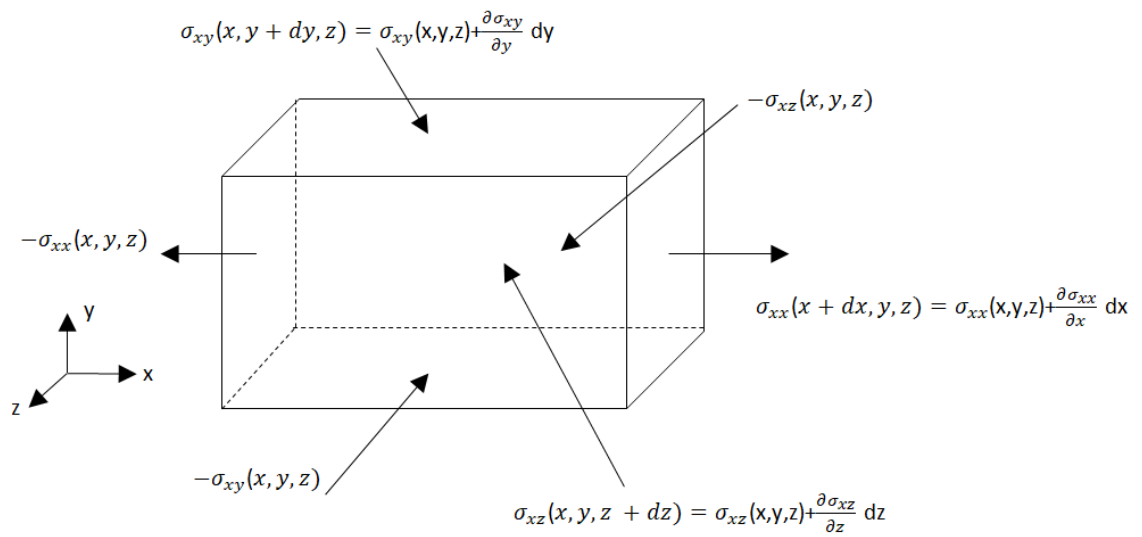
Le cisaillement maximum est, d'après le cercle de Mohr, un demi de la plus grande valeur de la différence entre deux contraintes principales quelconques. Il se passe sur un plan de normale faisant angles de 45° par rapport aux axes principaux de contraintes.

$$\tau_1 = \frac{1}{2}[\sigma_1 - \sigma_2], \tau_2 = \frac{1}{2}[\sigma_2 - \sigma_3], \tau_3 = \frac{1}{2}[\sigma_3 - \sigma_1]. \quad 47$$

$$\tau_{max} = \max[\tau_1, \tau_2, \tau_3]. \quad 48$$

7-Les équations d'équilibre du solide

Soit F_x , F_y et F_z les forces par unité de volume appliquées au point de coordonnées (x,y,z) du solide et soient γ_i les accélérations du point de coordonnées (x,y,z) et ρ la masse volumique du matériau, alors pour établir l'équilibre en translation ; dessin



-la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit de cotés dx , dy et dz , est nulle, soit, après simplification ;

$$-\sigma_{xx}(x, y, z)dydz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z)dydz$$

$$-\sigma_{xy}(x, y, z)dx dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z)dx dz$$

$$-\sigma_{xz}(x, y, z)dxdy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz)dxdy + F_x dxdydz =$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = \rho \gamma_x$$

49

où $\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$.

De même pour les deux autres directions ;

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = \rho \gamma_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = \rho \gamma_z$$

La deuxième partie de l'équation (5) s'applique dans ce cas, c'est-à-dire que,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Dans le cas statique les accélérations sont nulles et les équations d'équilibres deviennent homogènes.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad 50$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$$

En forme tensorielle les trois équations d'équilibre s'écrivent de la manière suivante ;

$$\sigma_{i,j} + f_i = \rho \gamma_j \quad \rho \gamma_j \quad \text{la densité et l'accélération dans le cas dynamique général}$$

$$\sigma_{i,j} + f_i = 0 \quad \text{dans le cas statique}$$

Maintenant on voit que nous avons trois (03) équations à six (06) inconnues qui sont les composantes de contraintes qu'il faut déterminer à chaque point du solide pour que l'état des contraintes soit entièrement connu. Pour résoudre ce problème on doit chercher un autre système d'équations qui va nous servir comme outil de solution et qui sera le système d'équations cinématiques.