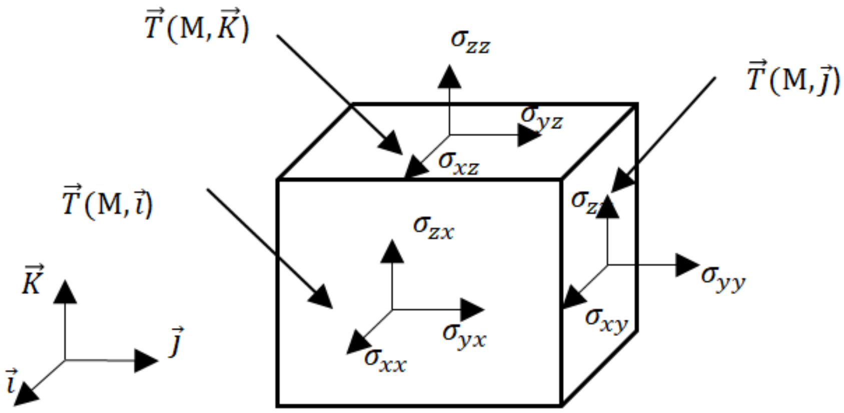
1- Etude des contraintes dans un point

L’étude des contraintes dans un point suppose qu’il n’y a pas de variation des contraintes et que l’élément de solide étudié doit être considéré comme très petit pour que ces dimensions soient négligeable au point où on suppose que ; $\delta x = \delta y = \delta z = 0$. Ainsi dire, toutes les contraintes seront supposées constantes et égales au milieu de l’élément solide et a ces facettes. Fig. élément solides et contraintes 2.2



Considérons maintenant l’élément de structure en forme de cube dans un repère de coordonnées cartésiennes, **xi** [x1, x2, x3] et effectuant la somme des moments par rapport aux axes de coordonnes respectivement.

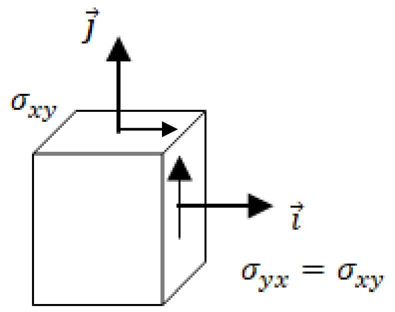
Les contraintes égales et opposées sur les faces ABCD et EFGH ne contribuent pas dans les moments. De même pour les contraintes normales pour les autres quatre faces, par contres le moment par rapport a AE de la force due a σxy sur BCGF de surface δx, δz est :

$\sigma xy. (\delta x\delta z).\delta y.$

Ceci peut être équilibré par la force due a σyx sur CDHG de surface $(\delta y\delta z)$ qui est :

$\sigma yx\ (\delta x\delta z)\ .\delta y.$

Alors on dit que $\sigma xy = \sigma yx$ et de même pour les deux autres axes.



$\sigma ij = \sigma ji,$ c'est a dire que, $\sigma 12 = \sigma 21$, $\sigma 13 = \sigma 31$ et $\sigma 32 = \sigma 23$.

Ce qui laisse écrire l'équation (5) sous la forme ;

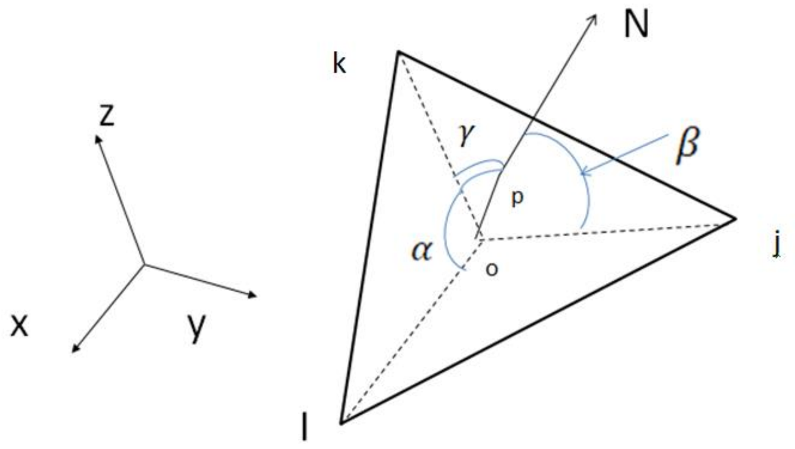
$\boldsymbol{Ti} = \sigma ij\, \boldsymbol{nj}$.

En conclusion, il ne reste donc que six (06) composantes de contraintes a définir dans un point pour que l'état de contrainte soit entièrement connu. Trois contraintes normales $\sigma 11$, $\sigma 22$, $\sigma 33$ et trois contraintes tangentielles de cisaillement qui sont $\sigma 12$, $\sigma 13$, $\sigma 23$.

$$\sigma ij = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

1- <u>Les contraintes sur un plan arbitraire</u>

Une meilleur façon de quantifier et de localiser les composantes de contraintes dans un solide est de les étudier et les présenter sur un plan arbitraire afin d'établir toutes les relations possibles entre elles. L'objectif essentiel est de trouver les plans les plus importants du point de vue intensité des contraintes. Dessin 2.3



Plan oblique, Tétraèdre

Si nous supposons que la surface arbitraire (inclinée dans l'espace) est définit par la normale N et que P est un point quelconque sur cette même surface, alors N fait angles α, β, et γ par rapport aux axes de coordonnés x, y et z respectivement. Ces angles positionnent la surface dans l'espace x, y et z.

Choisissant le point A comme référence de cette espace, alors r désignera la distance entre A et P. Dans ce cas r = **AP**.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad 11$$

$$1 = (x/r)^2 + +(y/r)^2 + (z/r)^2 \qquad 12$$

De la géométrie de la figure nous avons aussi,

cosα $={}^{x}/_{r}=$ **l**, cosβ $={}^{y}/_{r}=$ **m**, cosγ $={}^{y}/_{r}=$ **n**, 13

où **l, m et n** sont les cosinus directeurs de la normale a la surface arbitraire, de (12) et (13),

$$1 = \boldsymbol{l^2} + \boldsymbol{m^2} + \boldsymbol{n^2}. \qquad 14$$

Parmi les propriétés des cosinus directeurs nous avons ;

- La relation entre deux lignes dans l'espace :

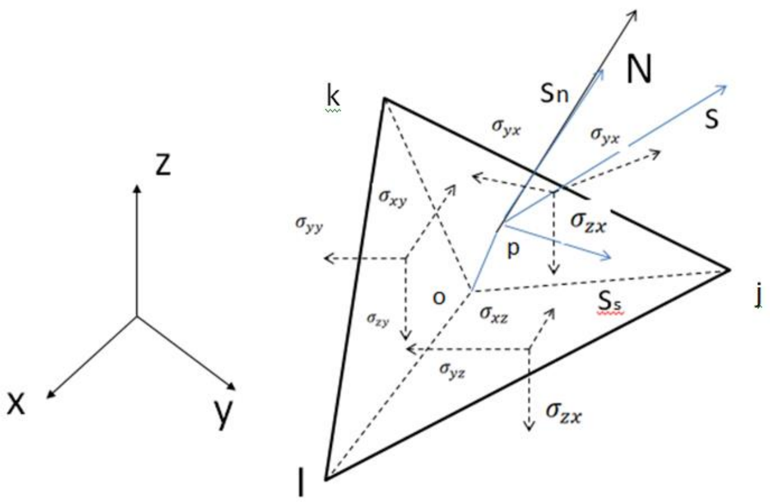
$$cos\varphi = \boldsymbol{l_1 l_2} + \boldsymbol{m_1 m_2} + \boldsymbol{n_1 n_2}$$

Où φ est l'angle entre deux lignes dans l'espace, φ = 0, nous avons (14).

- Sachant aussi qu'on a les relations de surfaces du tétraèdre avec les cosinus directeurs suivantes ;

$\frac{OJK}{IJK}$ = **l**, $\frac{OIJ}{IJK}$ = **m**, $\frac{OKI}{IJK}$ = **n.** 15

Revenant maintenant à l'étude des contraintes sur cette surface arbitraire et qui forme un tétraèdre avec le système de coordonnées, figure ci-dessous



Les contraintes sur le plan oblique

Décomposons, alors une résultante S des forces extérieures appliquées sur cette surface inclinée arbitraire. Cette résultante S peut être décomposée en une contrainte normale S_n et une contrainte tangentielle S_t sur la surface arbitraire, comme elle peut être aussi décomposée sur le système d'axes de coordonnées, S_x, S_yet S_z. On écrit alors ;

$S^2 = S_n^2 + S_s^2$ et $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ 16

L'équilibre des forces sur le tétraèdre dans la direction x nous donne ;

$S_x(IJK) = \sigma xx(OJK) + \sigma xy(OIJ) + \sigma xz(OKI),$ 17

Donc de (15) nous avons ;

$S_x = \sigma xx.\boldsymbol{l} + \sigma xy.\boldsymbol{m} + \sigma xz.\boldsymbol{n}.$

Procédons de la même façon pour la somme des forces par rapport a y et z, nous obtenons ;

$S_y = \sigma yx.\boldsymbol{l} + \sigma yy.\boldsymbol{m} + \sigma yz.\boldsymbol{n}$ et $S_z = \sigma zx.l + \sigma zy.m + \sigma zz.n.$

En forme matricielle ;

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{l} \\ [\boldsymbol{m}] \\ \boldsymbol{n} \end{matrix} \qquad 18$$

Si nous projetons ces forcesS_x, S_y et S_z sur la normale a la surface arbitrairement inclinée, on obtient ;

$S_n = S_x.l + S_y.m + S_z.n$ 19

Remplaçons (18) dans (19), nous obtenons la contrainte normale sur le plan incliné fonction des composantes de contraintes σij ;

$S_n = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\sigma_{xy}l.m + 2\sigma_{yz}m.n + 2\sigma_{xz}l.n$ 20

Et la contrainte tangentielle S_s de (16) ;

$S_s^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 - S_n^2$ 21

Les équations (20) et (21) sont les mêmes relations vectorielles dans (9) et (10).

2- Les valeurs stationnaires des contraintes normales

Les contraintes principales.

Les positions de la surface où $\boldsymbol{Ti}$ coïncide avec la normale a la surface est une position qui permet d'obtenir la valeur stationnaire de la contrainte normale, ceci est appelé plan principale de contrainte. En minimisant la contrainte normale par rapport aux cosinus directeurs on obtient la valeur stationnaire de la contrainte normale,

$$\boldsymbol{Ti} = \sigma\, \boldsymbol{ni}.$$

Ici la contrainte tangentielle est nulle, la direction de cette contrainte est une direction principale aussi, ceci peut être dérivé de ;

$\boldsymbol{Ti} = \sigma ij\, \boldsymbol{nj}$ si $\boldsymbol{Ti} = \sigma\, \boldsymbol{ni}$, alors ; $\boldsymbol{Ti}$ est perpendiculaire a l'élément de surface

Donc on écrit,

$$\sigma ij\, \boldsymbol{nj} = \sigma . \boldsymbol{ni} \qquad 22$$

Qui devient aussi ;

$$(\sigma ij - \sigma \delta ij)\boldsymbol{nj} = 0 \qquad 23$$

Car ***nj.ni*** = δij , où δij est le Kronecker donné par, δij=0 si i≠j et δij=1 si i=j.

L'équation (23) est un ensemble de trois équations pour nj, où j=1, 2, et 3. Cette équation possède une solution non-évidente, ici ***nj*** ≠0, et cette solution est si le déterminant est nulle ;

$$|\ \sigma ij - \sigma \delta ij\ | = 0. \qquad 24$$

La résolution de l'équation (24) permet d'obtenir une équation caractéristique de la forme ;

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \qquad 25$$

Ayant trois racines qui sont les contraintes principales σi.

I_i *sont les invariants des contraintes et* I_1 est la somme des termes diagonaux de σij, c-a d ;

$$I_1 = \sigma ii = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad 26$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \sigma ij\sigma ji) = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \qquad 27$$

$I_3 = \frac{1}{6}\,(2\sigma ij\, \sigma jk\, \sigma ki - 3I_1\, \sigma ij\, \sigma ji + I_1^3)$, qui est le déterminant de σij.

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \qquad 28$$

L'équation caractéristique des contraintes, (25), peut être aussi écrite sous la forme ;

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \qquad 29$$

Oùσ_1, σ_2 et σ_3 sont les trois racines de l'équation caractéristique (25). Ces trois racines sont les contraintes principales ou les valeurs stationnaires des contraintes normales et qui forment aussi les invariants des contraintes de la façon suivante ;

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\ ,\ I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \qquad 30$$

On montre ici que les trois racinesσ_1, σ_2 et σ_3 de l'équation cubique sont réelles, de plus si les racines sont différentes il existe alors trois directions orthogonales en P. Les trois directions sont appelées directions principales. Ces directions sont obtenues a partir de l'équation (23) en remplaçant consécutivement les valeurs des trois racines des contraintes pour obtenir $\boldsymbol{nj}$ qui sont les directions principales**.**

Exercices 06