MMC M1 GEOTECHNIQUE

Introduction

L'élasticité est une caractéristique physique des matériaux, elle permet à ceux-ci de se déformer sous l'action des charges extérieures et revenir, après suppression de ces charges et forces, a la forme et la position initiale sans subir de déformations permanentes.

La théorie d'élasticité étudie les contraintes, les déplacements et les déformations que peut subir un corps solide soumis à des forces et charges extérieures. Pour étudier la théorie d'élasticité (2éme cycle universitaire) certaines hypothèses simplificatrices sont nécessaires, entre autres, **l'homogénéité du matériau, la linéarité du comportement et enfin l'isotropie.**

Un matériau est homogène s'il a les mêmes propriétés en tout point du corps, il est aussi de comportement linéaire si les relations entre les contraintes et les déformations, les déformations-déplacements sont linéaires et enfin il est isotrope si en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions. Dans ce qui suit quelques définitions;

Comportement Homogène et élastique :

Si la densité du solide est constante et les coefficients élastiques; qui caractérisent le comportement physique, sont aussi constants, on dit alors que le solide est élastiques et homogène. Le solide est élastique si sous l'action des charges extérieures le matériau regagnent sa position et forme initiales après déchargement.

Comportement plastique : un matériau a un comportement plastique lorsqu'il se déforme de façon permanente, c'est-à-dire s'il conserve une partie de sa déformation même après le retrait des sollicitations. La plus part des matériaux de l'ingénierie se comportent de façon plastique au-delà d'une certain limite de contrainte.

Comportement non-linéaire : Le comportement des solides est non-linéaire, si sous l'action des conditions statiques, le déplacement (déflection) de n'importe quel point de ce même solide n'est pas proportionnel à l'intensité de la charge appliquée. Deux sortes de non-linéarité sont à signaler. Non-linéarité géométrique et non-linéarité matériel. On parle de non –linéarité géométrique quand les relations déformations- déplacement sont non-linéaires, mais les relations déformations- contraintes sont linéaires. La plus part des travaux non-linéaires adoptent cette approche et pour de bonnes raisons ; les matériaux d'ingénierie traditionnels comme l'acier, l'aluminium restent élastique sauf dans le cas où les déformations principales sont relativement petites de l'ordre de 0.5%. La non-linéarité matérielle ou physique dépend essentiellement de la nature de la matière constituant le solide, tel que le caoutchouc, le plastique, qui présentent de grandes déformations lors de l'application de petites charges.

Comportement visqueux : Un matériau a un comportement visqueux lorsque les déformations qu'il subit varient en fonction du temps, même si les sollicitations auxquelles il est soumis demeurent constantes (il en va autrement des comportements élastiques et plastique qui, par définition, sont indépendantes du temps : dans ce cas, les déformations se produisent dès l'application des sollicitations et ne changent que si celles-ci changent.).

Les matériaux usuels employés dans les structures de Génie civil et industriels ont un comportement élastique-plastique principalement. Les aciers employés dans le béton armé, les ronds à béton, par exemples, pour lui conférer une certaine propriété a la traction, sont un exemple de matériaux qui ont une phase de comportement élastique suivie par une deuxième phase plastique avant la rupture. On entend par comportement élastique, le retour a l'état initial après suppression des forces et des charges qui provoquent la déformation. Fig. 1.

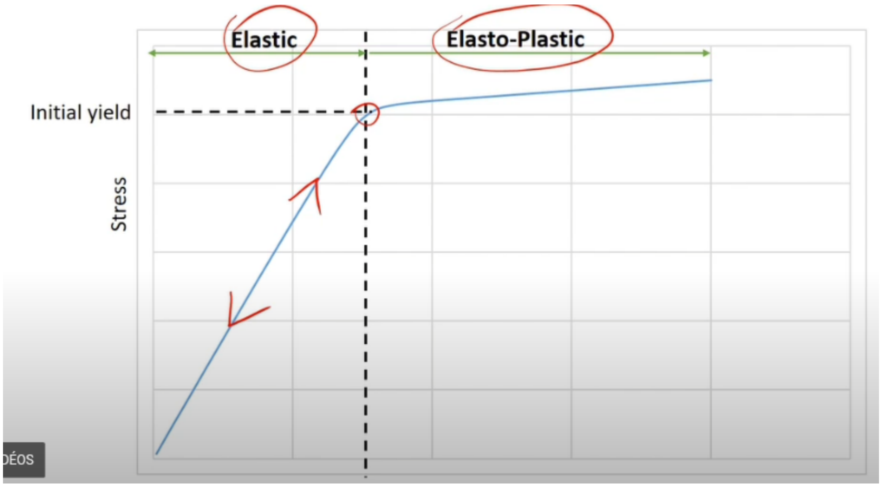


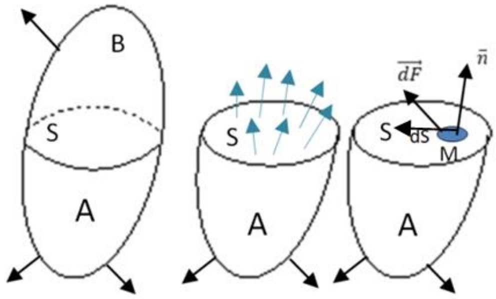
Fig. 1. Diagramme de comportement des matériaux elasto-plastique.

On préfère utiliser dans les structures, des matériaux avec un grand module d'élasticité E**,** ou module de Young, pour assurer le caractère des petites déformations.

La plasticité, par contre, est un domaine de comportement spécifique caractérisé par les déformations permanentes, dans le format et le volume, accumulées dans le matériau pendant le chargement.

1- Les forces et les contraintes

Sous l'action d un système de forces extérieures, le solide subit des déformations dues a un système de contraintes qui se développe a l'intérieure de ce même solide. Ces contraintes qui naissent sur les surfaces et les plans sont de deux types et sont différentes. Fig2.



Considérant un élément de surface plane coupé a travers un point M dans un solide et **ni** vecteur normal unitaire de M.

En général, il ya un vecteur force appliqué sur l'élément de surface. Si la surface est petite pour devenir nulle, il est possible physiquement de considérer que le rapport du vecteur force a la petite surface tend vers une limite définie qu'on appelle le vecteur contrainte **Ti** c'est-à-dire ; Dessin1

$$\lim_{\partial A \to 0} \left(\frac{\partial Fi}{\partial A} \right) = \boldsymbol{Ti} \quad , \qquad i, j = 1, 2, 3; \qquad 1$$

De dimension force par unité de surface.

Il est claire que le type de contrainte dépend du signe de la force appliquée, soit c'est une contrainte de traction ou est une contrainte de compression. Par contre la contrainte est inversement proportionnelle à la surface sur laquelle elle agit.

L'état des contraintes au point M est complètement défini si nous connaissons toutes les valeurs de $\boldsymbol{Ti}$ correspondant aux surfaces passant par M, c'est-à-dire $\boldsymbol{ni}$**.** Le vecteur de contrainte est donné par la formule de Cauchy par ;

$$\boldsymbol{T^n} = T^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{n_1} + T^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{n_2} + T^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{n_3} \qquad 2$$

Où le vecteur contrainte $\boldsymbol{T^n}$en M associé au plan de la coupe **n = [** $n_1 n_2 n_3$] est exprimé comme une relation linéaire combinée de trois vecteurs de contraintes sur les surfaces planes de l'élément perpendiculaires aux trois coordonnées dans le point M.

Donc, il est claire que les trois vecteurs contraintes $\boldsymbol{T^1}$**,**$\boldsymbol{T^2}$**et** $\boldsymbol{T^3}$ définissant l'état des contraintes complètement dans le point M sont ;

$$T_i^1 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}],\ T_i^2 = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}],\ T_i^3 = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}],$$

Les neuf composantes σ_{ij} nécessaires pour définir les trois vecteurs contraintes $\boldsymbol{T_i^1}, \boldsymbol{T_i^2}$ et $\boldsymbol{T_i^3}$sont appelées composantes du tenseur des contraintes ;

$$\sigma ij = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^1 \\ \boldsymbol{T}^2 \\ \boldsymbol{T}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{3}$$

Où σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} sont les composantes normales et $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ sont les composantes de tangentielles ou de cisaillement.

La notation du double suffixe est employé ici, dont le premier indice indique la normale au plan c'est-à-dire il désigne la surface d'application et le deuxième indice indique la direction d'action de la contrainte.

La définition basique en forme différentielle donc des contraintes est ;

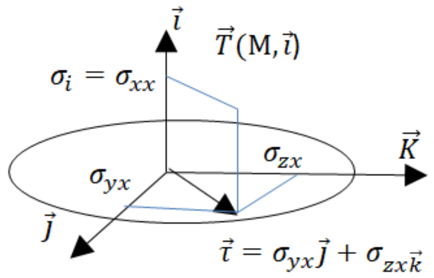
$$\sigma n = \lim_{\partial A \to 0} \left(\frac{\partial Fn}{\partial A} \right)$$, contrainte normale.

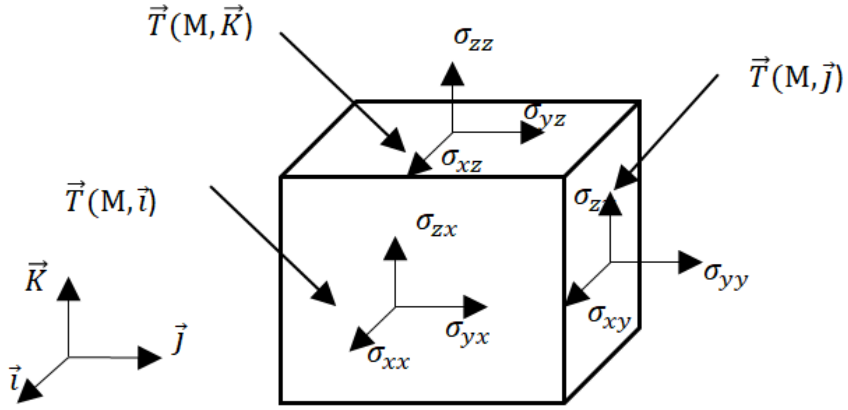
$$\tau = \lim_{\partial A \to 0} \left(\frac{\partial Ft}{\partial A} \right)$$, contrainte tangentielle.

Chaque surface est généralement définit par une normale qui agit perpendiculairement et sur laquelle se développe la contrainte normale. Les contraintes tangentielles sont parallèles à la surface. Donc sur une surface d'un élément de solide se développent trois contraintes dont une normale à la surface et deux autres parallèles a la même surface. L'élément de solide est constitué de plusieurs facettes, donc de plusieurs surfaces qui peuvent développer des contraintes dépendant des directions du système de coordonnées.

Considérant un élément, de forme cubique, d'un solide dans un système de coordonnées cartésiens rectangulaire, rapportant les composantes de contraintes possibles sur ces facettes.

Dans la figure ci-dessous, les composantes de contraintes sont considérées positives par rapport au système de coordonnées **xi** = [x1, x2, x3],





On peut également rencontrer plusieurs types de notations, par exemple ;

$$\sigma ij = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

On voit que le tenseur des contraintes σ est composé de neuf (09) composantes de contraintes de deux différents types, trois contraintes normales suivant les trois directions x, y et z et six composantes tangentielles dans trois plans perpendiculaires.

1- <u>Formule de Cauchy</u>

Si nous remplaçons (3) dans (2) les composantes du vecteur de contraintes s'écrit ;

$$\boldsymbol{Ti} = \sigma ji\ \boldsymbol{nj} \qquad , \sigma ji = \sigma ij \qquad 5$$

En considérant la sommation des indices, selon le principe d'Einstein, nous écrivons ;

$$\boldsymbol{T1} = \sigma j1\ \boldsymbol{nj} = \sigma 11\boldsymbol{n1} + \sigma 21\boldsymbol{n2} + \sigma 31\boldsymbol{n3}$$

$$\boldsymbol{T2} = \sigma j2\ \boldsymbol{nj} = \sigma 12\boldsymbol{n1} + \sigma 22\boldsymbol{n2} + \sigma 32\boldsymbol{n3} \qquad \textbf{6}$$

$$\boldsymbol{T3} = \sigma j3\ \boldsymbol{nj} = \sigma 13\boldsymbol{n1} + \sigma 23\boldsymbol{n2} + \sigma 33\boldsymbol{n3}$$

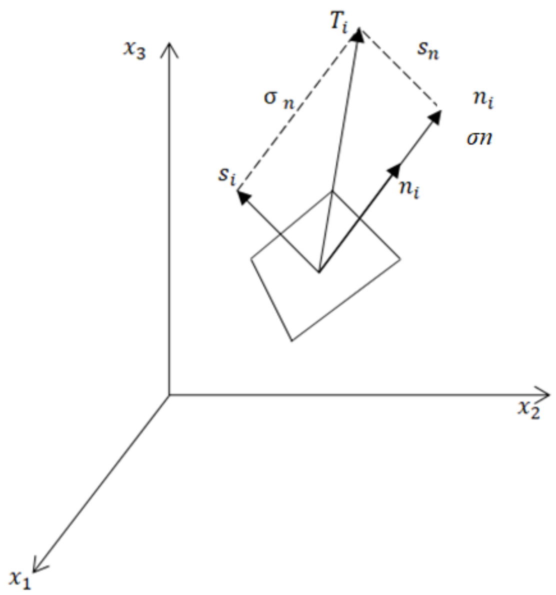
Les neuf (09) composantes forment un tenseur d'ordre deux, en notation tensorielle, au point M. Il est possible de transformer ce tenseur de contrainte σij *de* $\boldsymbol{xi}$ *a* $\acute{\sigma} ij$ *dans* $\boldsymbol{\grave{x}\imath}$ d'ordre deux dans un autre système de coordonnées par la transformation suivante ;

$\grave{\sigma}$ij= $a_{im}.a_{jn}\sigma mn,$ σij=$a_{mi}.a_{nj}\grave{\sigma} mn$. 7

Où $a_{im}.a_{jn}$ sont les matrices de passage d'un système a un autre, en respectant la position des indices.

Remarquant aussi que σii est un scalaire.

Sur un élément de surface ***ni*** au point M, le vecteur de contrainte ***Ti*** peut être décomposé a une composante de contrainte normale *σn* ***ni*** est une composante tangentielle ***Si.***



L'intensité de la contrainte normale *σn* est ***Ti ni,***

σn= ***Ti ni*** = *σij* ***nj ni,*** **8**

et l'intensité de la contrainte de cisaillement Sn **;**

$$Sn^{2} = Si\, Si = Ti\, Ti - \sigma n^{2}$$

$Sn^{2} = \sigma ij\, \sigma ik\, \boldsymbol{nj\, nk} - (\sigma ij\, \boldsymbol{ni\, nj})^{2}$ **9**

Les équations (8) et (9) permettent de déterminer les composantes normale et tangentielle du vecteur ***Ti*** de contrainte agissant sur un plan arbitraire ***ni***. Nous avons aussi de la loi des vecteurs;

$\boldsymbol{Si} = \boldsymbol{Ti}$ - σ_n $\boldsymbol{ni}$ **10**