2.2.4- La torsion maximale - théorème d'énergie

La théorie de l'énergie de distorsion maximale, connue aussi par la théorie de **Von Mises** est peut-être la plus utilisée pour définir la rupture dans les matériaux **ductiles**. Elle a été au début développée par Huber (1904), Von Mises (1913), Levy (1921) et Henky (1924). Dans cette méthode, on considère que l'écoulement ou la rupture se passe quand l'énergie de torsion est égale au maximum de l'énergie de torsion d'écoulement en tension simple.
Considérons un état de contrainte triaxiale. L'énergie total de déformation est donnée par :

$U_t = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\gamma_{ij}$, i,j = 1,2,3 (13)

Théorie de Von-Mises

Considérons un état de contraintes triaxial, l'énergie totale de déformations est donnée par :
$U_t = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\gamma_{ij}$ (1)
Où σ_{ij} et γ_{ij} sont des tenseurs de contraintes et de déformations respectivement ici $i.j = 1,2,3$ et les indices répétés sont sommés, alors en distribuant les indices on écrit :

$U_t = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{33}\gamma_{33} + 2\sigma_{12}\gamma_{12} + 2\sigma_{23}\gamma_{23} + 2\sigma_{31}\gamma_{31})$, et en remplaçant les déformations par les contraintes à partir de la loi de Hooke on aura ;

$= \frac{1}{2}({\sigma_{11}}^2 + {\sigma_{22}}^2 + {\sigma_{33}}^2) - \frac{\eta}{E}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \frac{1}{2G}({\sigma_{12}}^2 + {\sigma_{23}}^2 + {\sigma_{31}}^2)$ (2)

Où $G = \mu = \frac{E}{2(1+\eta)}$, est le module de cisaillement, η coefficient de Poisson
Si les contraintes de cisaillement sont nulles, alors ;

$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ et si on laisse $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = P$; alors on obtient la partie de dilatation de l'énergie totale de déformations en forme

$$U_{dilatation} = \frac{3(1-2\eta)P^2}{2E} = \frac{1-2\eta}{6E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2 \qquad (3)$$

Alors 3 de 2, on aura la part de la distorsion sous la forme :

$$U_{distorsion} = \frac{1}{12G}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2](4)$$

Si l'une des contraintes principales atteint la contrainte d'écoulement alors que les autres contraintes principales sont égales à zéro, cas de la tension simple, alors l'équation 4 devient :

$$U_{distorsion} = \frac{\sigma_0^2}{6G} \qquad (5)$$

Combinant les équations (4) et (5), on obtient :

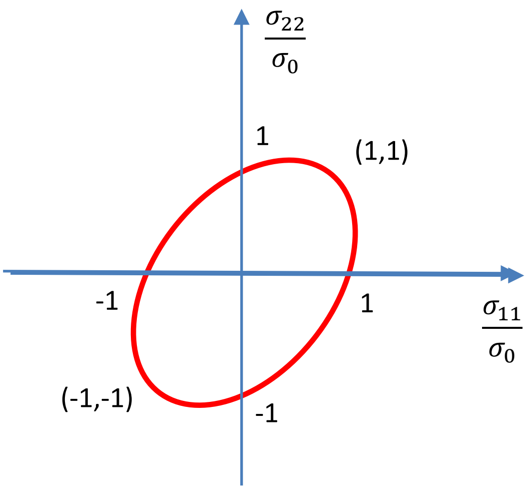
$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2] = \sigma_0^2 \qquad (6)$$

L'équation de Von- Mises où critère de l'écoulement de Von –Mises en (3-D), état des contraintes spécifique.

Dans le cas plan des contraintes, $\sigma_{33} = 0$, alors (6) s'écrit :

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_0^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_0^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_0^2} = 1 \qquad (7)$$

La surface d'écoulement de l'équation (7) est présentée comme une ellipse. On note que la théorie de Von- Mises dépend du carré des contraintes, une forme d'énergie et on peut aussi relie aussi dans la mécanique des milieux continus aux invariants I_2' contraintes déviatrices ou le carré des contraintes octahedrales.



Théorie de Von Mises

Parmi les principaux avantages de la théorie de Von- Mises est la représentation en fonctionnel des phénomènes d'écoulement pas simplement dans le point d'écoulement mais aussi après le point d'écoulement. Donc cette théorie permet la modélisation mathématique de l'écrouissage de déformation qui permet l'étude elasto-plastique des structures.