المحاضرة الثامنة

الانحدار الخطي البسيط

الدرس الخامس

مقدمة.

كما ذكرنا في الدرس السابق فان التحليل الانحداري يهدف بالأساس إلي دراسة تأثير متغير علي متغير أخر علي سبيل المثال دراسة تأثير متغير الإنتاج علي التكلفة أو دراسة تأثير متغير الدخل علي متغير القدرة الشرائية.....الخ، وبالتالي هنالك العديد من الأمثلة تخص العديد من الميادين مثل الاقتصادية والصحية والمالية والهندسية، لذلك فان التحليل الانحدار أسلوب إحصائي يستعملوا العديد من الباحثين في مختلف وشتي العلوم الاجتماعية منها أو الهندسية.

1- نموذج الانحدار.

لدراسة اثر متغير علي الأخر لابد في البداية من تميز المتغيرات عن بعضها البعض، حيث يعرف المتغير الذي يؤثر اسم المتغير المستقل ويطلق علي المتغير المتأثر بالمتغير التابع ، وبالتالي يمكن عرض نموذج الانحدار الخطي علي شكل معادلة خطية من الدرجة الأولي والتي تعكس المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e$$

حيث آن

y : هو المتغير التابع (الذي يتأثر)

x : هو المتغير المستقل (الذي يؤثر)

b_0 : هو الجزء المقطوع من المحور الرأسي y ، وهو يعكس قيمة المتغير التابع في حالة انعدام قيمة المتغير المستقل x ، أي في حالة $x = 0$

b_1 : ميل الخط المستقيم $(b_0 + b_1 x)$ ، ويعكس مقدار التغير في y إذا تغيرت x بوحدة واحدة.

e : هو الخطأ العشوائي، والذي يعبر عن الفرق بين القيمة الفعلية y ، والقيمة المقدرة $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ ، أي أن : $e = y - (b_0 + b_1 x)$ ، ويمكن توضيح هذا الخطأ على

- **تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط.**

حيث يمكن تقدير معاملات الانحدار (b1, b0) من خلال طريقة المربعات ألصغري حيث يمكن حساب تقدير النموذج من خلال المعادلة الحسابية الآتية

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2},$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

حيث أن $\bar{x}$ هو الوسط الحسابي لقيم x، $\bar{y}$ هو الوسط الحسابي لقيم y، وتكون القيمة المقدرة للمتغير التابع هو: $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x$، ويطلق على هذا التقدير " تقدير معادلة انحدار y على x.

مثال

فيما يلي بيانات عن كمية البروتين اليومي بالجرام التي يحتاجها العجل الرضيع، ومقدار الزيادة في وزن العجل بالكجم، وذلك لعينة من العجول الرضيعة حجمها 10.

كمية البروتين	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
الزيادة في الوزن	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

والمطلوب :

1- ارسم نقط الانتشار، وما هو توقعاتك لشكل العلاقة ؟

2- قدر معادلة انحدار الوزن على كمية البروتين.

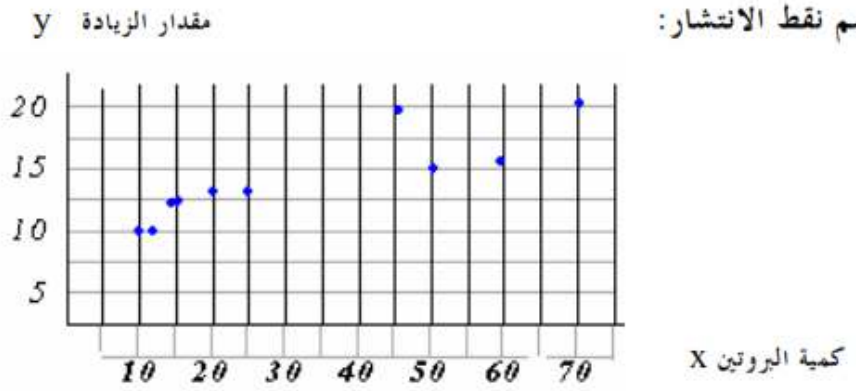
3- فسر معادلة الانحدار.

4- ما هو مقدار الزيادة في الوزن عند إعطاء العجل 50 جرام من البروتين ؟ وما هو مقدار الخطأ العشوائي؟

5- ارسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار في المطلوب (1) .

الإجابة

1- رسم نقط الانتشار:



من المتوقع أن يكون لكمية البروتين أثر طردي (إيجابي) على مقدار الزيادة في الوزن.

2- تقدير معادلة الانحدار

مع افتراض أن **x** هي كمية البروتين، **y** هي مقدار الزيادة في الوزن يمكننا الآن تطبيق المعادلة السابقة ومن ثم حساب المجاميع

كمية البروتين x	الزيادة في الوزن y	$x\ y$	x^2
10	10	100	100
11	10	110	121
14	12	168	196
15	12	180	225
20	13	260	400
25	13	325	625
46	19	874	2116
50	15	750	2500
59	16	944	3481
70	20	1400	4900
320	140	5111	14664

المجاميع المطلوبة
$\sum x = 320$
$\sum y = 140$
$\sum xy = 5111$
$\sum x^2 = 14664$
إذا الوسط الحسابي:
$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{320}{10} = 32$
$\bar{y} = \frac{\sum x}{n} = \frac{140}{10} = 14$

يمكن حساب $\hat{b}_1$ كما يلي:

$$\hat{b}_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(10)(5111) - (320)(140)}{(10)(14664) - (320)^2}$$
$$= \frac{6310}{44240} = 0.1426$$

يمكن حساب $\hat{b}_0$ كما يلي:

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x} = 14 - (0.1426)(32) = 9.4368$$

وبالتالي فان معادلة الانحدار المقدرة هي

$$\hat{y} = 9.44 + 0.143x$$

3- تفسير المعادلة

- الثابت $\hat{b}_0 = 9.44$: يدل على أنه في حالة عدم استخدام البروتين قي التغذيـــة، فـــإن الوزن يزيد 9.44 كجم.
- معامل الانحدار $\hat{b}_1 = 0.143$: يدل على أنه كلما زادت كمية البروتين جرام واحـــد، حدث زيادة في وزن العجل بمقدار 0.143 كجم، أى زيادة مقدارها 143 جرام.

4- مقدار الزيادة في الوزن عندما تكون x=50 هو

$$\hat{y} = 9.44 + 0.143(50) = 16.59$$

وأما ومقدار الخطأ العشوائي هو:

$$\hat{e}_{x=50} = y_{x=50} - \hat{y}_{x=50} = 15 - 16.59 = -1.59$$

5- رسم معادلة الانحدار علي نقاط الانتشار

يمكننا رسم معادلة خط مستقيم أذا علم نقطتين من هذا الخط المستقيم

x	50	10
$\hat{y}$	16.59	10.87

إذا معادلة الانحدار هي: