

الفصل الرابع: تحليل الحساسية

Sensitivity analysis

1. تغيير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف.
2. تغيير قيم الطرف الأيمن من القيود.
3. التغيير في معاملات المتغيرات في القيود.
4. إضافة متغيرة جديدة.
5. إضافة قيد جديد.

الفصل الرابع: تحليل الحساسية Sensitivity analysis

عند استخدام البرمجة الخطية لنمذجة حالات الحقيقية نحتاج غالباً إلى حل البرامج الخطية الجديدة التي تم الحصول عليها من خلال إجراء تغييرات صغيرة على المشكلات التي تم حلها بالفعل. يمكن أن يحدث هذا لأسباب مختلفة منها:

— قد تكون المعطيات عن تقديرات للكميات الرئيسية ، لاحقاً بمزيد من المعلومات قد يكون لدينا تقديرات أفضل.

— حتى إذا كانت المعاملات دقيقة تمامً ، فقد تتغير بمرور الوقت ، على سبيل المثال ، إذا احتجنا إلى مراعاة سعر بعض الموارد ، نظرًا لأن هذا السعر يتغير ، فسنرغب في تحديث نموذجنا.

— قد ندرك أننا نسينا أحد المتغيرات في القيود ، و فجأة أصبح لدينا متغير إضافي نريد أن نعرف عنه في النموذج الرياضي.

— قد نرغب في استبدال أي معاملات تم تقديرها بتقديرات أكثر تشاؤماً ، لحساب سيناريو أسوأ حالة.

(Antolin camarena, 2020, p. 01)

وبالنظر لكثرة التغيرات التي يمكن أن تحدث، فإن عملية إعادة حل البرنامج الخطي يمكن أن تكون مجهددة وتتطلب حسابات كثيرة، مما يؤدي إلى ضياع الوقت و احتمال الوقوع في أخطاء حسابية. ولتجاوز مثل هذه المشكلات يتم استخدام ما يسمى بـ: «تحليل الحساسية» أو «تحليل ما بعد الأمثلية» ، والذي يدرس أثر التغيرات التي يمكن أن تحدث في البرنامج الخطي، وذلك بالاعتماد على آخر جدول عند حله بطريقة السمبلكس (جدول الحل الأساسي الأمثل) دون اللجوء إلى إعادة حله مجدداً.

إذ يستخدم أسلوب تحليل الحساسية جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي لتحديد المدى المسموح به في التغيرات التي تحدث في البرنامج الخطي والتي لا تؤثر على الحل الأمثل. (ريغي، 2021، صفحة 61)

وسيتم دراسة العديد من أنواع التغيرات التي يمكن أن تحدث على البرنامج الخطي:

— تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف؛

— تغير قيم الطرف الأيمن من القيود؛

— التغير في معاملات المتغيرات في القيود؛

— إضافة متغيرة جديدة؛

— إضافة قيد جديد.

ليكن لدينا النموذج التالي والحل الأمثل له (هذا المثال تم حله سابقاً):

$$\text{Mix } Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	C_j X_i^B	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Z_j		0	50	0	50	0	50000
$C_j - Z_j$		50	10	0	M-50	M	

1. تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

— تغير قيم معاملات المتغيرات خارج الأساس:

المتغيرة x_2 هي متغيرة خارج الأساس. فإذا افترضنا أن قيمة معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير

بمقدار Δ فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً ؟

نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة x_2 في دالة الهدف في السطر C_j ونعيد حساب قيم $C_j - Z_j$ في السطر

الأخير، ونحصل على الجدول التالي:

C_i^B	C_j X_i^B	50	$60 + \Delta$	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Z_j		0	50	0	50	0	50000
$C_j - Z_j$		50	$10 + \Delta$	0	M-50	M	

يبقى الجدول السلجلاً أمثلاً ، إذا بقيت جميع قيم السطر الأخير $C_j - Z_j$ أكبر من أو تساوي الصفر ما

دامت دالة الهدف في حالة التقليل.

يلاحظ أن السطر الأخير يحتوي على مجهولين M و Δ ، إلا أننا قلنا سابقاً أن M هي قيمة موجبة كبيرة جداً ، وبالتالي فإن قيمة الخانات التي تحتوي على M تبقى موجبة ، إذا بقي الحل الأمثل إذا كانت قيمة $[C_j - Z_j]$ أكبر من أو تساوي الصفر ، أي:

$$10 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -10$$

$$\Delta \in [-10 + \infty[\quad \text{أي:}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف أكبر من أو تساوي -10 ، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير . وبعبارة أخرى:

$$C_2 \geq 60 + \Delta \Rightarrow C_2 \geq 60 - 10 \Rightarrow C_2 \geq 50$$

أي:

$$C_2 \in [50 + \infty[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة C_2 أكبر من أو تساوي 50 ، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير.

• لنفترض أن قيمة C_2 ارتفعت بوحدة واحدة (تغير داخل المجال) ، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$x_1 = 1000, x_2 = 0, S_1 = 850, \text{Min } Z = 50000$$

وبلاحظ بقاء نفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

• لنفترض أن قيمة C_2 انخفضت بوحدة واحدة (تغير خارج المجال) ، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$$x_1 = 150, x_2 = 850, S_1 = 0, \text{Min } Z = 49150$$

وبلاحظ أن نقطة الحل الأمثل تغيرت . وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف خارج المجال المسموح به ، فهذا يعني أن جدول الحل الأخير سيصبح غير أمثل ، وبالتالي يجب متابعة الحل إنطلاقاً من هذا الجدول.

— تغير قيم معاملات متغيرات الأساس:

المتغيرة X_1 هي متغيرة داخل الأساس ، فإذا افترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ ،

فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً ؟

نكتب قيمة المعامل الجديد للمتغيرة X_1 في دالة الهدف في السطر ~~الأساس~~ ^B ، ونعيد حساب

قيم السطر $[C_j - Z_j]$ ، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	X_i^B	C_j	$50+\Delta$	60	0	M	M	النتيجة R
			x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1		0	1	1	1	-1	850
$50+\Delta$	x_1		1	1	0	1	0	1000
Z_j			$50+\Delta$	$50+\Delta$	0	$50+\Delta$	0	$50000+1000\Delta$
C_j-Z_j			0	$10-\Delta$	0	$M-50-\Delta$	M	

يبقى الجدول الساجد أمثلا ، إذا بقيت جميع قيم السطر C_j-Z_j أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر C_j-Z_j المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي الخانة C_2-Z_2 ، مع إستبعاد الخلية C_4-Z_4 ، لأنها تبقى موجبة مهما كانت قيمة Δ ، لأن قيمة M هي قيمة موجبة كبيرة إذا . يبقى الحل أمثلا عندما:

$$10-\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 10$$

أي:

$$\Delta \in]-\infty, 10]$$

ملاحظة:

— عند دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكانت هذه الأخيرة في حالة التعظيم، فإن الحل يبقى أمثل كلما بقيت قيم السطر Z_j-C_j أكبر من أو تساوي الصفر.

2. تغير قيم الطرف الأيمن من القيود:

يمكن دراسة أثر تغير قيم الطرف الأيمن من القيود على الحل الأمثل من خلال المثال التالي:

لنفترض أن النموذج تغير كما هو ، وضح في البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Mix } Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150 + \Delta \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يكتب جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_i^B	$X_i^B \backslash C_j$	50	60	0	M	M	النتيجة R
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
M	R_1	1	1	0	1	0	1000
M	R_2	1	0	-1	0	1	150+ Δ
Z_j		2M	M	-M	M	M	1150M
$C_j - Z_j$		50-2M	60-M	M	0	0	

نعيد كتابة الجدول السابق كما يلي:

C_i^B	$X_i^B \backslash C_j$	50	60	0	M	M	النتيجة $R+\Delta$
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
M	R_1	1	1	0	1	0	1000+0
M	R_2	1	0	-1	0	1	150+1
Z_j		2M	M	-M	M	M	1150M
$C_j - Z_j$		50-2M	60-M	M	0	0	

يلاحظ أن قيم معاملات العمود (النتيجة $R+\Delta$) لها نفس قيم معاملات عمود المتغيرة المكمل S_1 (مضروبة في -1)، ونفس قيم معاملات عمود المتغيرة الاصطناعية R_2 . وهذا يعني أن قيم العمود (النتيجة $R+\Delta$) في الجدول الأخير الأيمن ستكون نفسها قيم معاملات العمود S_1 (مضروبة في -1)، أو قيم معاملات العمود R_2 في نفس الجدول لأن جميع العمليات التي جرت على صفوف الأعمدة الخاصة بالمتغيرتين S_1 و R_2 جاريها على صفوف العمود (النتيجة $R+\Delta$).

يعد كتابة جدول الحل الأيمن كما يلي:

C_i^B	X_i^B	C_j					R النتيجة
		50	60	0	M	M	
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	$850-\Delta$
50	x_1	1	1	0	1	0	$1000+0\Delta$
Z_j		0	50	0	50	0	50000
C_j-Z_j		50	10	0	M-50	M	

ولكي يبقى الحل أمثلا وممكنا يجب أن تبقى:

$$S_1 \geq 0 \text{ و } x_1 \geq 0 \text{ أي:}$$

$$850-\Delta \geq 0$$

$$\Delta \leq 850$$

$$\Delta \in]-\infty \ 850] \text{ و}$$

ويلاحظ أن قيمة x_1 لن تصبح سالبة مهما كانت قيمة Δ .

3. التغير في قيم معاملات المتغيرات في القيود:

يمكن في بعض الأحيان بسبب التطورات التكنولوجية إستبدال الآلات القديمة بأخرى جديدة أكثر تطورا ، أو، يمكن إحلال الآلات محل العمال ليُنْهَوا ٍ إحلال العمالة الماهرة مكان العمالة الأقل مهارة، ...الخ. ومثل هذه التغيرات، يمكن أن تؤثر على ما تتطلبه المنتجات من عوامل الإنتاج الداخلة في عملية إنتاجها، وهو ما يؤدي إلى تغير في معاملات المتغيرات في القيود. وعند حدوث هذا لا بد من دراسة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

مثال:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 3/2x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

يكون جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	3/2	2	0	0	M	M	R
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	النتيجة
0	S_1	0	0	7/5	1	1/5	-1/5	-1/5	53/5
3	x_1	1	0	-1/5	0	-3/5	3/5	-2/5	6/5
3/2	x_2	0	1	4/5	0	2/5	-2/5	3/5	16/5
Zj		3	3/2	3/5	0	-6/5	6/5	-3/10	42/5
Cj-Zj		0	0	7/5	0	6/5	M-6/5	M+3/10	

سنحاول دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات حسب ترتيب هذه الأخيرة كما يلي:

المتغيرة X_1

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_1 هي متغيرة داخل الأساس، ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتهي إليه كما يلي:

— القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته "أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكتملة في العمود } bi}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكتملة في العمود } S1}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x1} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{53}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_1 أقل من أو تساوي 53/6، فإن الحل يُلْقَى .

$$w = a_{11} + \Delta a_{ij}^* = 1 + \frac{53}{6} = \frac{59}{6}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلاً.

$$a_{11}^* \leq \frac{59}{6}$$

— القيد الثاني: سعر ظله يساوي: 6/5

أي . تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

— القيد الثالث: سعر ظله يساوي -3/10 :

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_2 :

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_2 هي متغيرة داخل الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة

حسب القيد الذي تنتهي إليه كما يلي:

– القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته "أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكمل في العمود } bi}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكمل في العمود } S1}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x2} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{53}{16}$$

$$w = a_{12} + \Delta a_{12}^* = 1 + \frac{53}{16} = \frac{69}{16}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 أقل من أو تساوي $69/16$ فإن الحل يبقئلا .

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{12}^* \leq \frac{69}{16}$$

– القيد الثاني: سعر ظله يساوي: $6/5$

أي . تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

– القيد الثالث: سعر ظله يساوي $-3/10$:

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_3 :

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_3 هي متغيرة خارج الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة

حسب القيد الذي تنتهي إليه كما يلي:

– القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

الحل يبقئلا أمثلا . مهما تغيرت قيمة معامل المتغيرة.

– القيد الثاني: سعر ظله يساوي: $6/5$

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته "أكبر أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{23}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x_3 \text{ في الصف } Cj - Zj}{\text{سعر ظل القيد}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{7}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة x_3 أقل من أو تساوي $7/6$ فإن الحل يُلْقَثُلاً .

$$w = a_{23} + \Delta a_{23}^* = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلاً.

$$a_{23}^* \leq \frac{13}{6}$$

— القيد الثالث: سعر ظله يساوي $-3/10$:

يتم دراسة حساسية معامل المتغيرة كما يلي، مع العلم أن القيد إشارته "يساوي"، ودالة الهدف في حالة التقليل:

$$\Delta a_{33}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x_3 \text{ في الصف } Cj - Zj}{\text{سعر ظل القيد}} = \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{3}{10}} = -\frac{14}{3}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة x_3 أكبر من أو تساوي $-14/6$ فإن الحل يُلْقَثُلاً .

$$w = a_{33} + \Delta a_{33}^* = 2 - \frac{14}{3} = -\frac{8}{3}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلاً.

$$a_{33}^* \geq -\frac{8}{3}$$

4. إضافة متغيرة جديدة:

عند إضافة متغيرة جديدة إلى البرنامج الخطي، فإننا ندرس تأثير هذا التغير على الحل الأمثل من خلال ضرب قيم معاملات عمود المتغيرة الجديدة في مصفوفة المتغيرات المكاملة أو الإصطناعية في جدول الحل الأمثل كما يلي:

— في حالة قيد أقل من يساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة المكاملة؛

— في حالة قيد أكبر من أو يساوي: نأخذ إما قيم معاملات عمود المتغيرة المكاملة بعد ضربها في -1 ، أو قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

– في حالة قيديساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛
ثم يتم حساب قيمة $C_j - Z_j$ (السطر الأخير من جدول السمبلكس) في عمود المتغيرة، إضافة، وهنا نكون أمام حالتين:

✓ **قيمة $C_j - Z_j$ سالبة**: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، إضافة متغيرة جديدة لا يؤثر على الحل الأمثل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن الحل سيصبح غير أمثل، وبالتالي ينبغي مواصلة الحل؛

✓ **قيمة $C_j - Z_j$ موجبة**: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، إضافة متغيرة جديدة سيجعل من الحل غير أمثل، وبالتالي ينبغي مواصلة الحل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن إضافة المتغيرة الجديدة لن يؤثر على الحل الأمثل.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل المقابل له:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$5x_1 + 6x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

C_i^B	x_i^B	C_j						النتيجة
		3	10	0	0	M	M	
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
Z_j		20/7	10	0	-10/7	0	10/7	20
$C_j - Z_j$		1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	

المطلوب: ما هو تأثير إضافة متغيرة ثالثة x_3 على الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2 + 5x_3$$

$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 14$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نضرب قيم معاملات عمود المتغيرة x_3 في مصفوفة المتغيرتين الإصطناعيتين R_1 و R_2 كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ -1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

نظيف العمود المتحصل عليه إلى جدول الحل الأمثل ونحسب قيمة $C_j - Z_j$ كما يلي:

C_i^B	X_i^B	C_j		3	10	5	0	0	M	M	النتيجة
				x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	
10	x_2			2/7	1	3/7	0	-1/7	0	1/7	2
0	s_1			-23/7	0	4/7	1	-6/7	-1	6/7	2
Zj				20/7	10	30/7	0	-10/7	0	10/7	20
Cj-Zj				1/7	0	5/7	0	10/7	M	M-10/7	

يلاحظ أن قيمة $C_3 - Z_3$ هي قيمة موجبة (5/7) وبما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فإن الحل يبقى أمثل بنفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

إذا افترضنا أن قيمة معامل المتغيرة x_3 مضافة في دالة الهدف هي 4 ، ففي هذه الحالة تكون قيمة $C_3 - Z_3$ هي (-2/7) وبالتالي سيصبح الحل غير أمثل، وفي هذه الحالة ينبغي متابعة الحل حيث تدخل المتغيرة x_3 إلى الأساس في جدول الحل الموالي ويتم الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل الجديد التالي:

$$x_1 = 2/11$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 50/11$$

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 0$$

$$\text{Min} Z = 206/11$$

5. إضافة قيد جديد:

إذا افترضنا أننا أضفنا ثلاثاً إلى برنامج خطي يتكون من قيدين (تم حلها سابقاً) ، حيث يتشكل لنا البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$5x_1 + 6x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 14$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نعوض قيم X_1 و X_2 التي تم الحصول عليها سابقاً عند حل البرنامج الخطي وهي على التوالي 0 و 2 في القيد الثالث ، نضاف كما يلي:

$$X_1 + 5X_2 \geq 8 \Rightarrow 0 + 5(2) \geq 8 \Rightarrow 10 \geq 8$$

يلاحظ أن القيد ، حقق ، وبالتالي فنقطة الحل الأمثل لا تتغير.

لنفترض أننا نلثنا جديداً ، آخر حيث يصبح البرنامج الخطي الجديد كما يلي:

$$\text{Mix } Z = 3X_1 + 10X_2$$

$$5X_1 + 6X_2 \geq 10$$

$$2X_1 + 7X_2 \geq 14$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نعوض قيم X_1 و X_2 في القيد الثالث ، نضاف كما يلي:

$$X_1 + 3X_2 \geq 8 \Rightarrow 0 + 3(2) \geq 8 \Rightarrow 6 \geq 8$$

يلاحظ أن القيد الثالث الجديد في هذه الحالة غير محقق ، ولدراسة تأثير هذا القيد الجديد على الحل الأمثل نقوم بما يلي:

يتم تحويل القيد إلى معادلة كما يلي:

$$X_1 + 3X_2 - S_3 + R_3 = 8$$

من جدول الحل الأمثل (قبل إضافة القيد الجديد) نستخرج قيم المتغيرات الحقيقية الأساسية. نلاحظ أن المتغيرة الحقيقية الوحيدة داخل الأساس هي X_2 ، وقيمتهما هي كما يلي:

$$2/7X_1 + X_2 + 0S_1 - 1/7S_2 + 0R_1 + 1/7R_2 = 2 \Rightarrow X_2 = 2 - 2/7X_1 - 0S_1 + 1/7S_2 - 0R_1 - 1/7R_2$$

الخطوة التالية هي تعويض قيمة X_2 في القيد الثالث الجديد المحول إلى معادلة ، نحصل عليها كما يلي:

$$X_1 + 3(2 - 2/7X_1 - 0S_1 + 1/7S_2 - 0R_1 - 1/7R_2) - S_3 + R_3 = 8$$

ونحصل على معادلة القيد الثالث الجديد كما يلي:

$$1/7X_1 + 3/7S_2 - S_3 - 3/7R_2 + R_3 = 2$$

نضيف هذا القيد إلى جدول الحل الأمثل مع إدخال المتغيرة الاصطناعية R_3 إلى الأساس. كما ينبغي ، إضافة العمودين الخاصين بـ S_3 و R_3 وبعد هذه العملية ، لاحظ أن الجدول أصبح غير أمثل ، لهذا ينبغي الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B	C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	
10	x_2		2/7	1	0	-1/7	0	0	1/7	0	2
0	S_1		-23/7	0	1	-6/7	0	-1	6/7	0	2
M	R_3		1/7	0	0	3/7	-1	0	-3/7	1	2
Zj			20/7+M/7	10	0	-10/7+3M/7	-M	0	10/7-3M/7	M	20+2M
Cj-Zj			1/7-M/7	0	0	10/7-3M/7	M	M	10/7M-10/7	0	

14/3

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

• S_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)

• R_3 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)

• العدد (3/7) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

• عناصر صف الإرتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.

• أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

جداء القيمتين المتقابلتين

القيمة الجديدة = القيمة القديمة -
نقطة الإرتكاز

C_i^B	X_i^B	C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	
10	x_2		1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	8/3
0	S_1		-3	0	1	0	-2	-1	0	2	6
0	S_2		1/3	0	0	1	-7/3	0	-1	7/3	14/3
Zj			10/3	10	0	0	-10/3	0	0	10/3	80/3
Cj-Zj			-1/3	0	0	0	10/3	M	M	M-10/3	

8

-

14

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** بقيت قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

• x_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)

• x_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)

• العدد (1/3) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثالث:

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الارتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

جداء القيمتين المتقابلتين

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - $\frac{\text{نقطة الارتكاز}}{\text{نقطة الارتكاز}}$

C_i^B	x_i^B	C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	
3	x_1		1	3	0	0	-1	0	0	1	8
0	S_1		0	9	1	0	-5	-1	0	5	30
0	S_2		0	-1	0	1	-2	0	-1	2	2
Zj			3	9	0	0	-3	0	0	3	24
Cj-Zj			0	1	0	0	3	M	M	M-3	

قيم $(C_j - Z_j)$ كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$$x_1=8$$

$$x_2=0$$

$$S_1=30$$

$$S_2=2$$

$$S_3=0$$

$$Z=24$$

مثال 01:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 460$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

والذي جدول حله الأمثل التالي:

C_i^B	$X_i^B \backslash C_j$	20	30	50	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30	30	50	10	0	20	12700
Zj-Cj		10	0	0	10	0	20	

المطلوب: تحديد مدى أمثلية الحل لمعاملي المتغيرين X_2, X_3 في دالة الهدف على الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

الحل:

1. تحديد مدى الأمثلية لمعامل X_2 :

المتغيرة X_2 هي متغيرة داخل الأساس، فإذا افترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً؟

C_i^B	$X_i^B \backslash C_j$	20	$30+\Delta$	50	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
$30+\Delta$	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		$30+\Delta/6$	$30+\Delta$	50	$10+\Delta/3$	0	$20-\Delta/6$	$12500+\frac{220}{3}\Delta$
Zj-Cj		$10+\Delta/6$	0	0	$10+\Delta/3$	0	$20-\Delta/6$	

يبقى الجدول الساجل أمثلاً ، إذا بقيت جميع قيم السطر $Zj-Cj$ أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التعظيم . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر $Zj-Cj$ المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن الخانة C_6-Z_6 ، تبقى الحل أمثلاً عندما:

$$20 - \Delta/6 \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 120$$

أي:

$$\Delta \in]-\infty, 120]$$

2. تحديد مدى الأمثلية معامل X_3 :

المتغيرة X_3 هي متغيرة داخل الأساس، فإذا افترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً ؟

C_i^B	X_i^B	C_j	20	30	$50+\Delta$	0	0	0	R النتيجة
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30	x_2		1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2		13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
$50+\Delta$	x_3		1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj			$30+\Delta/2$	30	$50+\Delta$	10	0	$20+\Delta/2$	12700+210 Δ
Zj-Cj			$10+\Delta/2$	0	0	10	0	$20+\Delta/2$	

يبقى الجدول السلجلاً أمثلاً ، إذا بقيت جميع قيم السطر $Zj-Cj$ أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التعظيم . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر $Zj-Cj$ المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن :

$$10+\Delta/2 \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -20$$

$$\Delta \in [-20, +\infty] \quad \text{أي:}$$

$$20+\Delta/2 \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -40 \quad \text{و:}$$

$$\Delta \in [-40, +\infty] \quad \text{أي:}$$

$$\Delta \in [-20, +\infty] \quad \text{ومنه:}$$

مثال 02:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 420 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 380 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج هو:

C_i^B	X_i^B	C_j	30	20	0	0	0	R النتيجة
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
20	x_2		0	1	1/3	0	-1/2	20
0	S_2		0	0	-3/2	1	3/2	30
30	x_1		1	0	-1/6	0	1/2	50
Z_j			30	20	5/3	0	5	1900
$Z_j - C_j$			0	0	5/3	0	5	

المطلوب: حدد البرنامج الأمثل لهذا النموذج ، إذا تغير المورد المتاح للقيد الأول بمقدار Δ ؟

الحل:

نموذج يصبح بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 420 + \Delta$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 380$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

يمكن شرح نتائج الصف الأخير من جدول كما يلي:

أرقام الخانات: $Z_1 - C_1$ ، $Z_2 - C_2$ ، $Z_4 - C_4$ كلها مساوية للصفر وهي نتيجة لإدخال وظهور المتغيرات x_1 ، x_2 ، S_2 في الحل النهائي أي في العمود X_i^B ولذلك يجب أن تكون قيمتها دائما مساويا للصفر في السطر الأخير. وتبدو أهمية قيمة أرقام هذه الخانات عندما تكون هناك متغيرات أصلية x_i غير موجودة في الحل النهائي حيث يمكن معرفة آثار إدخال تلك المتغيرات إلى الحل النهائي على الأرباح وعلى البرنامج الإنتاجي.

— أما أرقام الخانات: $Z_3 - C_3$ ، $Z_5 - C_5$ ، فهي تقيس تكلفة قيود الأقسام والتي يمكن شرحها كما يلي:

أولاً/ إن تغير في الطرف الأيمن من القيد الأول (المتعلق بالقسم الأول) والممثل بالمتغير S_1 (متغير الطاقات الغير المستغلة) تبلغ تكلفة هذا القيد 5/3 أي أنه عند إضافة ساعة واحدة فقط للقسم الأول ، فإن الربح سوف يزداد بمقدار الربح الحدي (سعر الظل) والمقدر بـ 5/3 دج. فمثلا زيادة طاقة القسم الأول من 420 ساعة إلى 421 ساعة فإن الحل الأمثل سوف يعطينا برنامجا إنتاجيا مختلفا:

$$x_1 = 50 - 1/6 = 49,83 \text{ Unité}, x_2 = 20 + 1/3 = 20,33 \text{ Unité}$$

$$\text{Max } Z = 30(49,83) + 20(20,33) = 1901,66 \text{ (زيادة قدرها : 1,66 دج أو 3/5 دج)}$$

وللإجابة على السؤال هناك طرق عديدة يمكن إتباعها لتحديد هذا المجال وأبرزها الجانب الرياضي وهو كما يلي:

القيد الأول: S_1 :

$$20 + 1/3\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -60$$

$$30 - 3/2\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 20$$

$$50 - 1/6\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 300$$

ومنه: $20 \geq \Delta \geq -60$

أي تتغير كمية المورد الأول للقسم الأول ضمن مجال $[60-20, 420+420]$ أي: $[440, 360]$

مثال 03:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800$$

$$15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج هو:

C_i^B	$X_i^B \backslash C_j$	300	500	400	0	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	-2	0	1	-4/5	0	0	360
400	x_3	0	3/2	1	0	1/10	0	3/2	165
0	S_3	0	1	0	0	-1/5	1	0	540
300	x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10
Zj		300	600	400	0	40	0	300	69000
Zj-Cj		0	100	0	0	40	0	300	

المطلوب: حدد البرنامج الأمثل لهذا النموذج ، إذا تغير المورد المتاح للقيد الثاني بمقدار Δ ؟

الحل:

نموذج يصبح بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800$$

$$15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800 + \Delta$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

— أما أرقام الخانة: $Z_5 - C_5$ ، فهي تقيس تكلفة قيود الأقسام والتي يمكن شرحها كما يلي:

أولاً/ إن تغيير في الطرف الأيمن من القيد الثاني (المتعلق بالقسم الثاني) والممثل بالمتغير S_2 (متغير الطاقات الغير المستغلة) تبلغ تكلفة هذا القيد 40 أي أنه عند إضافة ساعة واحدة فقط للقسم الأول ، فإن الربح سوف يزداد بمقدار الربح الحدي (سعر الظل) والمقدر بـ : 40 دج. فمثلاً زيادة طاقة القسم الثاني من 1800 ساعة إلى 1801 ساعة فإن الحل الأمثل سوف يعطينا برنامجاً إنتاجياً مختلفاً:

$$x_1 = 10 \text{ تبقى ثابتة}$$

$$x_3 = 165 + 1/10\Delta$$

$$S_1 = 360 - 4/5\Delta$$

$$S_3 = 540 - 1/5\Delta$$

$$\text{Max } Z = 300(10) + 500(0) + 400(165,1) = 69040 \text{ DA (زيادة قدرها : 40 دج)}$$

وللإجابة على السؤال هناك طرق عديدة يمكن إتباعها لتحديد هذا المجال وأبرزها الجانب الرياضي وهو كما يلي:

القيد الثاني: S_2 :

$$165 + 1/10\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1650$$

$$360 - 4/5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 450$$

$$540 - 1/5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 2700$$

أي تتغير كمية المورد الثاني للقسم الثاني ضمن مجال $[-1650, 450]$. حتى لا يتغير الحل الأمثل.