vibration mécanique (machine)

Introduction :

Les phénomènes vibratoire jouent un déterminant dans présque toutes les branches de la physique : mécanique, optique, electriciter, ...,

généralement on étudie les vibrations des machines dans le but de les attenuer, et si possible de les supprimer.

Exemple :

- lithotripteur (appareil médical servant à fragment des calculs rénaux)
- bourreuse-niveleuse (pour entretien de voies de chemin de fer
- polisseuses à vibrations
- Ecographie (ultrassons)

Malgré leur grande diversité, ils sont régis par les lois au moyens des outils mathématiques. (déterminations les grandeurs physique telle que l'amplititude, période, la fréquence d'oscillation, la pulsation, - - -) qui sont les caracteristiques d'un systeme vibratoire.

Dans un systeme mécanique vibratoire dépend des degrés de libertes n où $n = 1, 2, 3, \ldots i$

- le régime libre correspond à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre $f(t) = 0$
- le régime forcé correspond à la solution avec second membre ; il dépend de la nature de $f(t)$: force impulsionnelle, harmonique périodique, de forme quelconque ; aléatoire ; ect ...
- le régime permanent et le régime forcé après disparition des termes transitoire ; provoqué par une force periodique.

. Formes modifiées de l'équation du mouvement.

revenons à l'equation

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t).$$ divisons par la masse m.

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t)$$

introduisant ls notions :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$: pulsation propre du système conservatif.

$$\alpha = \frac{\beta}{2m}$$: coefficient d'amortissement

d'où l'équation s'ecrit ; $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}f(t)$

remarque : les quatrs termes ont la dimension physique d'une accélération.

Si l'on divise l'équation $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$ par la rigidité k :

$$\frac{m}{k}\ddot{x} + \frac{\beta}{k}\dot{x} + x = \frac{1}{k}f(t)$$

le second membre represente le déplacement élastique que provoquerait la force exterieur ;

$$x_e(t) = \frac{1}{k}f(t).$$

on a : $$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{x} + \frac{2\alpha}{\omega_0^2}\dot{x} + x = x_e(t)$$

où : $\alpha = \frac{\beta}{2m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$;

cette équation du mouvement convient quand le régime forcé provoqué par un déplacement imposé au système.

- Régime libre de l'oscillateur élementaire

  - Régime libre conservatif.

    oscilateur harmonique

تقا فقي يسير حسب حركة جيبيّة

Après un lâcher initiale, sans fournir ulterieure d'énergie par une force exterieur c-a-d. $f(t) = 0$

au temps $t=0$ par une élongation initiale $x_0 = x(0)$.

L'oscillateur st dit conservatif quand l'amortissement st nulle $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

d'où l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$

La solution de cette équation donne le déplacement de la masse :

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = A \cos \omega_0 t + B \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$
$$= C \cos(\omega_0 t \mp \varphi)$$

Determinons les constants A, B, φ

$$x = C \cos(\omega_0 t \mp \varphi) = C \cos \omega_0 t \cos \varphi \pm C \sin \omega_0 t \sin \varphi$$

$$\begin{cases} A = C \cos \varphi \\ B = \pm C \sin \varphi \end{cases} \qquad tg\,\varphi = \frac{\pm B}{A}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Pour un déplacement ~~harmonique~~ de la masse ; l'oscillateur harmonique st de pulsation ω_0 de fréquence f_0 et de periode T_0

où : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$; $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

on obtient la vitesse par dérivation de l'equation differentielle : $x = C \cos(\omega_0 t \mp \varphi)$

$$\dot{x} = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t \pm \varphi)$$
$$= \omega_0 C \cos(\omega_0 t \mp \varphi + \frac{\pi}{2})$$

de même pour l'accélération

$$\ddot{x} = -\omega^2 C \cos(\omega_0 t \pm \varphi) = \omega_0^2 C \cos(\omega_0 t \pm \varphi + \pi)$$
$$= + \omega_0^2 C\, x.$$

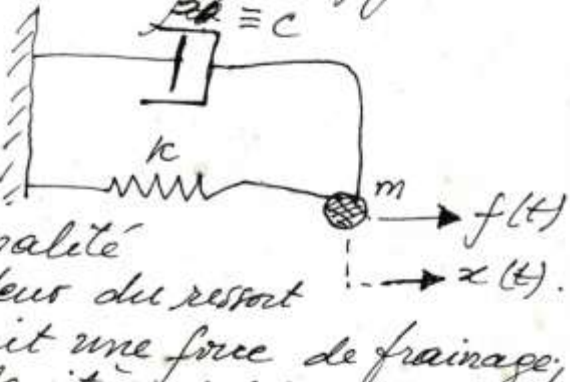
L'oscillateur élémentaire linéaire de la mécanique.

Définition et représentation.

On désigne sous ~~la forme~~ non d'oscillateur élémentaire linéaire un système mécanique à un degré de liberté dont le comportement en fonction du temps est traduit par une équation différentielle du second ordre linéaire et à coeffécients constants et caractérisé par une seule variable. Plus généralement un système possède n degré de liberté si le nombre de variables permettant est égal n. (n : degré de liberté, correspond à n : equations).

Soit l'oscillateur mécanique élémentaire comprend les élements representes par la fig.

- une masse m indéformable
- un ressort sans masse qui fournit une force élastique proportionnelle et opposé au déplacement $x(t)$ (le coeffécient de proportionnalité s'appelle rigidité ou raideur du ressort



- un amortisseur qui fournit une force de frainage, proportionnelle et opposée la vitesse $\dot{x}(t)$ (le coeffecient de proportionnalité s'appelle : constalite d'amortissement visqueux linéaire (لزج)

liquide visqueux
سائل لزج

Equation du mouvement et régime vibratoire

si une force exterieure $f(t)$ agit sur la masse ; loi de Newton s'écrit

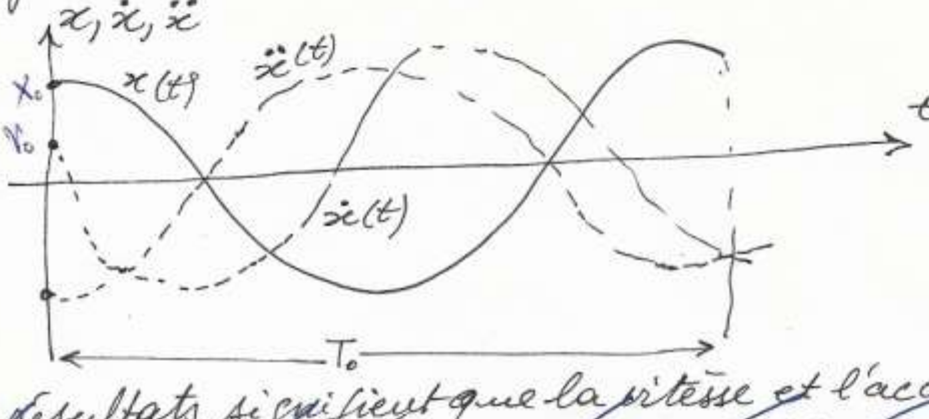
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f(t)$$

soit $$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t).$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficient constants dont-il faut étudier en détail les solutions.

Donnons d'abord quelques définitions relatives au principaux types de comportement du système.

Représation graphique :
du déplacement x, vitesse et $\dot{x}$ et accélération $\ddot{x}$
en régime libre conservatif (oscillateur harmonique)



ces resultats signifient que la vitesse et l'accélération sont respectivement (على التوالي) en quadrature et en opposition de phase avec les déplacements.

• Conservation de l'energie.

apartir de l'équation : (toujours d'1 amortissement nul)

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$m v \frac{dv}{dx} + Kx = 0$$

$\Rightarrow$ $m v . dv + Kx dx = 0$ après intégration :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = E_c + E_p = cte = H$$

ce resultat montre que l'energie mécanique total H du système et égal à la somme de l'energie cinétique E_c et de l'energie potentiel E_p est constant ; se conserve dans le régime libre de l'oscillateur non amortie.

remarque : la relation $E_p + E_c = cte$ peut-être utilisée pour établir l'équation differentielle du mouvement d'un système conservatif c-a-d

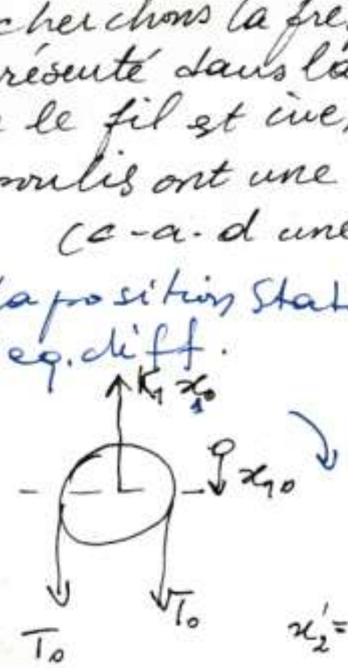
$$\frac{dH}{dt} = 0$$

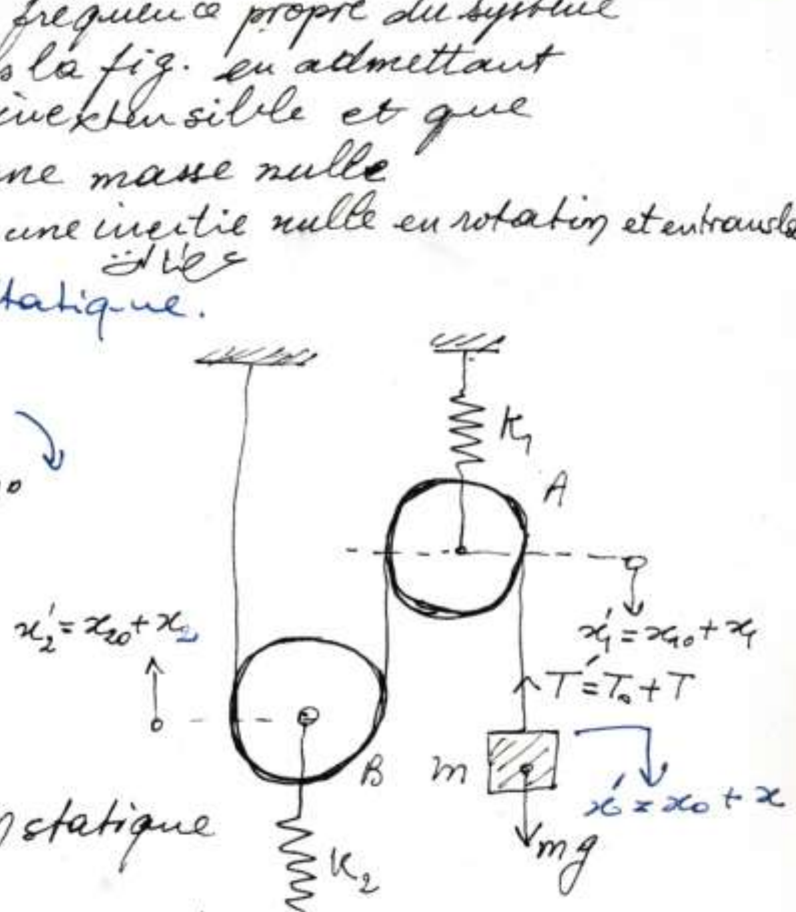
Exemple :

chercheons la fréquence propre du système représenté dans la fig. en admettant que le fil est inextensible et que les poulis ont une masse nulle

(c-a-d une inertie nulle en rotation et en translation)

- chercher la position statique.
- trouver l'éq. diff.





x_0, x_{10}, x_{20}, T_0 :

déplacement et tension statique dus à la gravité.

x_1, x_2, x, T : déplacement et tension dynamique autour des positions d'équilibre

x_1', x_2', x', T' : déplacement et tension totaux.

position statique :

$mg = T_0 \rightarrow (1)$ et que fil inextensible :

$2T_0 = K_1 x_{10} \rightarrow (2)$ pour la poulie A :

$2T_0 = K_2 x_{20} \rightarrow (3)$ $x_0' = \underbrace{x_{10}}_{\text{transl.}} + \underbrace{x_{10}}_{\text{rotation}} = 2x_{10}$

pour la poulie B :

$x_0'' = \underbrace{x_{20}}_{\text{transl.}} + \underbrace{x_{20}}_{\text{rotation}} = 2x_{20}$

donc $x_0 = 2(x_{10} + x_{20}) \rightarrow (4)$

de la relation (2) et (3) et (4)

$$x_0 = 2\left(2\frac{T_0}{K_1} + 2\frac{T_0}{K_2}\right) = 4\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)T_0 = T_0/K_e$$

où $K_e = \left[4\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)\right]^{-1}$: rigidité équivalente

d'où : $mg - K_e x_0 = 0$ éq. de la statique. (6)

déplacement dynamique
(loi de Newton:

$m\ddot{x}' = mg - T'$

et encore: $2T' = K_1 x_1' = K_2 x_2'$

$x' = 2(x_1' + x_2')$

$x' = T'4\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) = \frac{T'}{K_e} \Rightarrow T' = K_e x'$ remplaçant x' par $x_0 + x$

d'où: $m(0 + \ddot{x}) = mg - K_e(x_0 + x)$

$\Rightarrow m\ddot{x} = \cancel{mg} - K_e \cdot x \rightarrow m\ddot{x} + K_e x = 0$

Application numérique:

$m = 50\,kg$; $K_1 = 3.10^4\,N/m$; $K_2 = 5.10^4\,N/m$

$g = 9.81\,m/s^2$

$K_e = \frac{K_1 \cdot K_2}{4(K_1 + K_2)} = \frac{3 \cdot 5}{4(3+5)} \cdot 10^4 = 4690\,N/m.$

$x_0 = \frac{mg}{K_e} = \frac{50 \cdot 9,81}{4690} = 0.105\,m.$

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4690}{50}\right)^{1/2} = 1,54\,Hz.$; $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{K_e}{m}}$

commentaire: le poid mg ne joue pas de rôle sur la fréquence propre du système, il est donc possible de procéder en ne considérant que les déplacements dynamique:

$$\left.\begin{array}{l} 2T = K_1 x_1 \\ 2T = K_2 x_2 \\ x = 2(x_1 + x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow x = T4\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) = \frac{1}{K_e}T$$

$m\ddot{x} = mg - (T_0 + T) = mg - T_0 - T$

$\Rightarrow m\ddot{x} + T = 0$

~~suite page~~

$m\ddot{x} + Kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

$\omega_0^2 = \frac{K}{m} = 2\pi\nu$

pour retrouver ce résultat en annulant la dérivée de l'energie du système pour un système conservative

énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}'^2 m$$

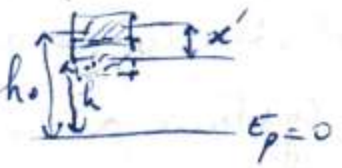
energie potentiel

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1'^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2'^2 + mgh \quad ?$$

$$= \frac{1}{2} K_1 x_1'^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2'^2 + mgh$$

$$= \frac{1}{2} K_1 x_1'^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2'^2 + mg(h_0 - x')$$

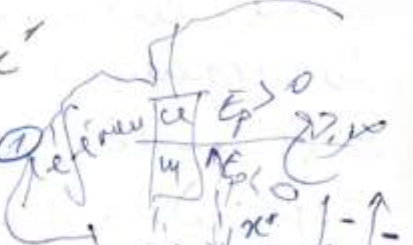
$$- mg x'$$



en tenant compte de :

$$\left.\begin{aligned} 2T' &= K_1 x_1' \\ 2T' &= K_2 x_2' \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_1 x_1' = K_2 x_2' \rightarrow (1)$$

$$x' = 2(x_1' + x_2') \rightarrow (2)$$



de (1) et (2) $\Rightarrow x' = 2\left(x_1' + \frac{K_1}{K_2} x_1'\right) \Rightarrow x_1' = \frac{K_2}{2(K_1 + K_2)} x'$

et (1) et (2) $\Rightarrow x' = 2\left(\frac{K_2}{K_1} x_2' + x_2'\right) \Rightarrow x_2' = \frac{K_1}{2(K_1 + K_2)} x'$

d'où : $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_1 K_2^2 + K_2 K_1^2}{4(K_1 + K_2)^2} \cdot x'^2 + mg(h_0 - x')$

$$= \frac{1}{2} \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot (K_1 + K_2)}{4(K_1 + K_2)^2} \cdot x'^2 + mg(h_0 - x')$$

$$= \frac{1}{2} \frac{K_1 \cdot K_2}{4(K_1 + K_2)} \cdot x'^2 + mg(h_0 - x')$$

$V = \frac{1}{2} K_e \cdot x'^2 + mg(h_0 - x)$ avec $K_e = \frac{K_1 \cdot K_2}{4(K_1 + K_2)}$

$$H = T + V = \frac{1}{2} K_e \cdot x'^2 + mg(h_0 - x') + \frac{1}{2} m \dot{x}'^2$$

$$\frac{dH}{dt} = 0 = \frac{1}{2} K_e \cdot 2\dot{x}' \cdot x' - mg\dot{x}' + \frac{1}{2} m 2 \ddot{x}' \dot{x}' = 0$$

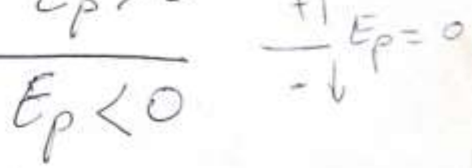
$$\Rightarrow \dot{x}'(m\ddot{x}' + K_e x' - mg) = 0$$

$\underline{t = 0}$ la solution $\dot{x}' = 0$ redonne l'équilibre statique du système. en effet $\dot{x}' = 0 \Rightarrow x' = x_0 + x$

d'où $m(0 + \ddot{x}) + K_e(x_0 + x) - mg = 0$

$\Rightarrow m\ddot{x} + K_e x + K_e x_0 - mg = 0$ or $K_e x_0 = mg$

$$m\ddot{x} + K_e x = 0$$

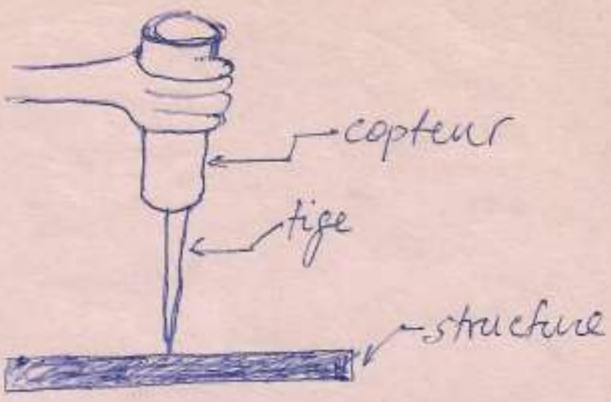


page I

- Pour que les oscillateurs restent dans le domaines linéaire, il faut que le fil reste tendu, ce qui limite l'amplitude ~~de~~ m.v.t $X < x_0 = 0{,}15$ m
- Le système aurait trois ~~de~~ degrés de liberté, au lieu d'un seul, en tenant compte de la masse des poulies. La fréquence fondamentale d'un tel système, c'est-à-dire sa basse fréquence propre, serait inférieur à 1,54 HZ.

$1 - \cos\theta \simeq \theta^2/2$
$\cos\theta \simeq 1$

• on veut mesurer une vibration à l'aide d'un capteur de vitesse tenu à la main, et en contact avec la structure par l'intermédiaire d'une tige (voir figure).



sachant que :

- le capteur pèse $M = 500\,g$
- la tige, en acier fait 20 cm de long et 8 mm de diamètre.
- que le contact est supposé parfait

Quelle sera la fréquence propre de l'ensemble ainsi constitué ?

$E = 2.10^{11}$

contrainte : ~~$\sigma = E\varepsilon\Delta l$~~ $\sigma = \varepsilon . E = \dfrac{\Delta l}{l} E$

et $\sigma = \dfrac{F}{S}$ $\Rightarrow$

$$\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} E \Rightarrow \frac{F}{\Delta l} = \frac{S}{l} E \quad \text{or} \quad K = \frac{F}{\Delta l}$$

d'où : $K = \dfrac{E.S}{l}$; section de la tige : $S = \pi R^2 = \pi (4.10^{-3})^2 = 5{,}03 . 10^{-5}\, m^2$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E.S}{l.M}}$$

A.N. $\nu_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 1597\,Hz$.

$\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{\Delta l . K}{S}$ $\Rightarrow$

$\sigma = \varepsilon E = \dfrac{\Delta l}{l} E$

$\dfrac{\Delta l}{S} K = \dfrac{\Delta l}{l} E$

$\Rightarrow K = \dfrac{S . E}{l}$