Université de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première année Master
option: Probabilités et statistiques
2024/2025

EMD 1

Exercice 1 ***./6pts***

Notons que la loi d'Erlang, notée $E_k(\lambda)$, d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) et de paramètre λ est la loi de la somme de k variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle de paramètre λ.

1. Proposé un algorithme de génération d'un échantillon de taille k d'une loi Exponentielle de paramètre λ (donner les détails de construction de l'algorithme).(**1.5pts**)
2. Écrire un algorithme de génération d'un échantillon de taille n d'une loi d'Erlang d'ordre k de paramètre λ. (**1.5pts**).
3. En utilisant l'approche Monté Carlo, proposé un algorithme qui nous permet d'estimer la moyenne et la variance d'une variable aléatoire issue d'une loi d'Erlang d'ordre k et de paramètres λ.(**3pts**)

Exercice 2 ***(./8pts)***

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

   Question : Proposé un algorithme de simulation qui nous permettra d'estimer la probabilité $P(a \leq X \leq b)$. (**4pts**)
2. Soient les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(x) \text{ et } g(x) = \cos(x).$$

   Question : proposer un simulateur qui nous permet d'estimer la surface délimitée par les fonctions f et g et les deux axes vertical $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.(**4pts**)

Exercice 3 ***(./6pts)***

Soit la densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-xy}, & \text{si } y \geq 0 \text{ et } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la paire (X, Y) de variables aléatoires suivant cette loi.

1. Quelle est la loi de X ? (**2.5pts**)
2. Quelle est la loi de Y sachant $X = x$? (**2pts**)
3. Proposer un algorithme de simulation d'un n-échantillon de (X, Y). (**1.5pts**)

Université de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première année Master
option: Probabilités et statistiques
2024/2025

Corrigé de l'EMD 1

Solution de l'Exercice 1

1. Pour générer un k-échantillon d'une loi exponentielle on peut utiliser la méthode d'inversion.

   Pour une loi Exponentielle on sait que sa fonction de répartition est donnée par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, de plus $F(x)$ est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ alors

$$\begin{aligned} u = F(x) &\Longrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x} \\ &\Longrightarrow 1 - u = e^{-\lambda x} \\ &\Longrightarrow \ln(1-u) = -\lambda x \\ &\Longrightarrow x = \frac{-1}{\lambda}\ln(1-u) \end{aligned}$$

   Ainsi, on aura l'algorithme suivant :

   function [X]=GenereExpo(k, λ)

   for i=1:k

   u=random('unif',0,1);
   $X(i) = \frac{-1}{\lambda}\ln(1-u)$

   end

   end

2. Pour générer un n-échantillon d'une loi d'Erlang, on peut utiliser le programme de la première question c'est-à-dire in utilise la méthode de convolution. Ainsi, l'algorithme sera comme suit:

   function [X]=GenereErlang(k, λ, n)

   for i=1:n

   y=GenereExpo(k, λ);
   $X(i) = sum(y)$;

   end

3. L'algorithme de génération d'un n-échantillon d'une loi $E_k(\lambda)$, sera de la forme suivante :

   function [M,V]=ErlangMoyVar(k, λ, n, mc)

   for i=1:mc

   X=GenereErlang(k, λ, n);

$m(i) = mean(x);$
$v(i) = var(x);$

end

M=mean(m);
V=mean(v);

Solution de l'Exercice 2

1. Par définition la probabilité
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx,$$
donc on a affaire au calcul d'une intégrale.
On a
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
de plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a
$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$
alors l'algorithme sera comme suit:
function [P]=Probability (μ, σ, n)
nbr=0;

for i=1:n

$x_i = random('unif', a, b);$
$y_i = random('unif', 0, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}});$

if $y_i \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
nbr=nbr+1;

end

$P = (nbr/n) * (b - a) * \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}};$

end

2. Soit s la surface recherchée. Par définition la surface en question est définie par l'intégrale suivante
$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |sin(x) - cos(x)|dx.$$
Sachant que dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a
$$\begin{cases} 0 \leq \sin(x) \leq 1 \\ 0 \leq \cos(x) \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin(x) \leq 1 \\ -1 \leq -\cos(x) \leq 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow -1 \leq \sin(x) - \cos(x) \leq 1$$
$$\Longrightarrow |\sin(x) - \cos(x)| \leq 1$$

Ainsi, l'algorithme sera comme suit :

function [s]=Surface(n)
$nbr = 0$;

for i=1:n

$x_i = random('unif', 0, \pi/2)$;
$y_i = random('unif', 0, 1)$;
if $y_i \leq |\sin(x_i) - \cos(x_i)|$
$nbr = nbr + 1$;
end
$s = (nbr/n) * (\pi/2)$;

end

Solution de l'Exercice 3

1. Trouvons d'abord la densité marginale de X. Par définition, elle est égale à

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-xy}dy = \left[-e^{-xy}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Trouvons maintenant la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Dans ce cas in distingue trois cas, à savoir :

Cas $x < 0$**:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{t} 0dt = 0.$$

Cas $0 < x < 1$**:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x,t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 1dt = x.$$

Cas $x > 1$**:**

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x,t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 1dt + \int_{1}^{x} 0dt = 1.$$

D'après ces résultats il est clair que la distribution de la variable aléatoire de X est une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

2. Afin d'obtenir la loi conditionnelle de Y sachant $X = 1$, déterminant sa fonction de répartition pour un x fixe. Par définition on a

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,t)}{f(x)}dt = \int_{-\infty}^{y} f(x,t)dt =$$

, ainsi on distingue deux cas:

Cas $y < 0$**:**

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x,t)dt = \int_{-\infty}^{y} 0dt = 0.$$

Cas $y \geq 0$**:**

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x,t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{y} xe^{-xt}dt = 1 - e^{-xy}.$$

D'après la forme de $F(y)$ il est clair que la loi de Y n'est rien d'autre qu'une loi Exponentielle de paramètre x.

3. L'analyse du problème nous permet de conclure que l'algorithme de simulation qui nous permettra de générer un échantillon de taille n du couple (X, Y) aura la forme suivante :

   function [X,Y]=CoupleXY(n)

   for i=1:n

   $X(i) = random('unif', 0, 1);$
   $Y(i) = random('exp', X(i));$

   end