كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير السنة الجامعية:2024-2025

قسم العلوم الإقتصادية السنة: ماستر 1

المقياس: تحليل السلاسل الزمنية

---------- السلسلة رقم 04 (دالة الارتباط الذاتي) ----------

التمرين 01 :

ليكن لينا المعلومات التالية:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	5	6	7	−5	−1	5	10	25	65

المطلوب:

1- احسب معاملات الارتباط الذاتي للعينة عند الايزاحات الممكنة.

2- ارسم دالة الارتباط الذاتي للعينة

الحل:

1- من اجل حساب معاملات الارتباط الذاتي للعينة نقوم بتطبيق العلاقة التالية:

$$r_k = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

بعض المراجع ترمز له بالرمز : ρ_k

من اجل حسابه يجب حساب كل من : $X_t - \bar{X}$،$X_{t-k} - \bar{X}$

- حساب معامل الارتباط الذاتي بازاحة واحدة (بتاخير 1): المتوسط الحسابي = 13

t	1		3	4	5	6	7	8	9	المجموغ
X_t	**5**	**6**	**7**	**−5**	**−1**	**5**	**10**	**25**	**65**	**117**
$X_t - \bar{X}$	8−	7−	6−	18−	14−	8−	3−	12	52	/
$X_{t+1} - \bar{X}$	7−	6−	18−	14−	8−	3−	12	52	−	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$	56	42	108	252	112	24	36−	624	−	1182
$(X_t - \bar{X})^2$	64	49	36	324	196	64	9	144	2704	3590

بتطبيق القانون نجد :

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{8}(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{1182}{3590} = 0.329$$

* حساب معامل الارتباط الذاتي بازاحة واحدة (بتاخير 2): المتوسط الحسابي = 13

t	1		3	4	5	6	7	8	9	المجموغ
X_t	**5**	**6**	**7**	**−5**	**−1**	**5**	**10**	**25**	**65**	**117**
$X_t - \bar{X}$	8−	7−	6−	18−	14−	8−	3−	12	52	/
$X_{t+2} - \bar{X}$	6−	18−	14−	8−	3−	12	52	−	−	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t-2} - \bar{X})$	48	126	84	144	42	96−	156−	−	−	192
$(X_t - \bar{X})^2$	64	49	36	324	196	64	9	144	2704	3590

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{7}(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{192}{3590} = 0.053$$

* حساب معامل الارتباط الذاتي بازاحة واحدة (بتاخير 3): المتوسط الحسابي = 13

t	1		3	4	5	6	7	8	9	المجموغ
X_t	**5**	**6**	**7**	**−5**	**−1**	**5**	**10**	**25**	**65**	**117**
$X_t - \bar{X}$	8−	7−	6−	18−	14−	8−	3−	12	52	/
$X_{t+3} - \bar{X}$	18−	14−	8−	3−	12	52	−	−	−	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})$	144	98	48	54	168−	416−	−	−	−	240−
$(X_t - \bar{X})^2$	64	49	36	324	196	64	9	144	2704	3590

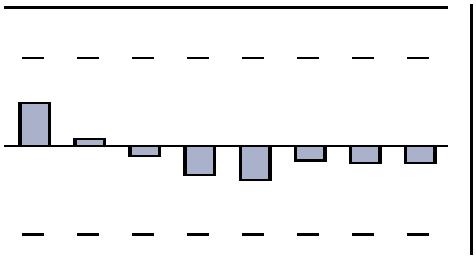
$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{6}(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{-240}{3590} = -0.067$$

بنفس الطريقة الى ان نصل الى معامل الارتباط الذاتي بازاحة 8 وهو اخر معامل يمكن حسابه

t	1		3	4	5	6	7	8	9	المجموغ
X_t	**5**	**6**	**7**	**−5**	**−1**	**5**	**10**	**25**	**65**	**117**
$X_t - \bar{X}$	8−	7−	6−	18−	14−	8−	3−	12	52	/
$X_{t+8} - \bar{X}$	52	−	−	−	−	−	−	−	−	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+8} - \bar{X})$	416−	−	−	−	−	−	−	−	−	416−
$(X_t - \bar{X})^2$	64	49	36	324	196	64	9	144	2704	3590

$$r_8 = \frac{\sum_{t=1}^{1}(X_t - \bar{X})(X_{t+8} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{-416}{3590} = -0.116$$

2- رسم دالة الارتباط الذاتي (AC) ACF



التمرين 02:

ليكن لينا المعلومات التالية:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	11	5	10	2	2	8	8	2	10	12

المطلوب:

1- احسب معاملات الارتباط الذاتي عند الازاحة 1، 2، 3.

2- احسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية لنفس الازاحات السابقة

الحل:

1- من اجل حساب معاملات الارتباط الذاتي للعينة نقوم بتطبيق العلاقة التالية:

$$r_k = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

من اجل حسابه يجب حساب كل من : $X_t - \bar{X}$،$X_{t+k} - \bar{X}$

- حساب معامل الارتباط الذاتي بازاحة واحدة (بتاخير 1): المتوسط الحسابي = 7

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموع
X_t	**11**	**5**	**10**	**2**	**2**	**8**	**8**	**2**	**10**	**12**	**70**
$X_t - \bar{X}$	4	2-	3	5-	5-	1	1	5-	3	5	/
$X_{t+1} - \bar{X}$	2-	3	5-	5-	1	1	5-	3	5	-	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$	8-	6-	15-	25	5-	1	5-	15-	15	-	13-
$(X_t - \bar{X})^2$	16	4	9	25	25	1	1	25	9	25	140

بتطبيق القانون نجد :

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{-13}{140} = -0.093$$

* حساب معامل الارتباط الذاتي بازاحة واحدة (بتاخير 2): المتوسط الحسابي = 7

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموغ
X_t	**11**	**5**	**10**	**2**	**2**	**8**	**8**	**2**	**10**	**12**	**70**
$X_t - \bar{X}$	4	2−	3	5−	5−	1	1	5−	3	5	/
$X_{t+2} - \bar{X}$	3	5−	5−	1	1	5−	3	5	−	−	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})$	12	10	15−	5−	5−	5−	3	25−	−	−	30−
$(X_t - \bar{X})^2$	16	4	9	25	25	1	1	25	9	25	140

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{8}(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{-30}{140} = -0.214$$

* حساب معامل الارتباط الذاتي بازاحة واحدة (بتاخير 3): المتوسط الحسابي = 13

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموغ
X_t	**11**	**5**	**10**	**2**	**2**	**8**	**8**	**2**	**10**	**12**	**70**
$X_t - \bar{X}$	4	2−	3	5−	5−	1	1	5−	3	5	/
$X_{t+3} - \bar{X}$	5−	5−	1	1	5−	3	5	−	−	−	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})$	20−	10	3	5−	25	3	5	−	−	−	21
$(X_t - \bar{X})^2$	16	4	9	25	25	1	1	25	9	25	140

$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{7}(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{21}{140} = 0.150$$

2- احسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية لنفس الازاحات السابقة

3- من اجل حساب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية نقوم بتطبيق العلاقة التالية:

$$\begin{cases} r_{kk} = \dfrac{r_k - \sum_{t=1}^{k-1} r_{k-1,t} r_{k-t}}{1 - \sum_{t=1}^{k-1} r_{k-1,t} r_t} \quad ; k = 2,3,\ldots. \\ k = 1, r_{kk} = r_{11} = r_1 \\ r_{kt} = r_{k-1,t} - r_{kk} r_{k-1,k-1} \end{cases}$$

- حساب معامل الارتباط الذاتي الجزئي k=2

بتطبيق العلاقات السابقة نجد

$$r_{22} = \frac{r_2 - \sum_{t=1}^{1} r_{2-1,t} r_{2-t}}{1 - \sum_{t=1}^{2-1} r_{2-1,t} r_t}$$
$$r_{11} = r_1$$

$$r_{22} = \frac{r_2 - r_{11}r_1}{1 - r_{11}r_1} = \frac{-0.214 - [(-0.093)(-0.093)]}{1 - [(-0.093)(-0.093)]} = \frac{-0.223}{0.991} = -0.225$$

- حساب معامل الارتباط الذاتي الجزئي k=3

$$r_{33} = \frac{r_3 - \sum_{t=1}^{2} r_{3-1,t}r_{3-t}}{1 - \sum_{t=1}^{3-1} r_{3-1,t}r_t}$$
$$r_{11} = r_1$$
$$r_{21} = r_{11} - r_{22}r_{11}$$

$$r_{33} = \frac{r_3 - [(r_{21}r_2) + (r_{22}r_1)]}{1 - [(r_{21}r_1) + (r_{22}r_2)]}$$
$$r_{11} = r_1 = -0.093, r_{22} = -0.225$$
$$r_{21} = r_{11} - r_{22}r_{11} = -0.093 - [(-0.225)(-0.093)] = -0.114$$

بالتعويض نجد

$$r_{33} = 0.111$$

التمرين 3:

الجدول التالي يوضح قيمة المبيعات السنوية لاحدى السلع بملايين الدينارات في الفترة 1990-1998:

t	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x	9	11	10	12	11	9	13	11	9

المطلوب:

1- احسب معاملات الارتباط الذاتي عند k=1، 2، 3.

2- االحسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية.

3- هل السلسلة مستقرة مبررا اجابتك؟

الحل

- من اجل حساب معاملات الارتباط الذاتي للعينة نقوم بتطبيق العلاقة التالية:

$$r_k = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

من اجل حسابه يجب حساب كل من : $X_t - \bar{X}$،$X_{t+k} - \bar{X}$

- حساب معامل الارتباط الذاتي بإزاحة واحدة (بتأخير 1): المتوسط الحسابي = 10.55

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	المجموع
X_t	9	**11**	**10**	**12**	**11**	**9**	**13**	**11**	**9**	**95**
$X_t - \bar{X}$	**1.55−**	**0.45**	**−0.55**	**1.45**	**0.45**	**−1.55**	**2.45**	**0.45**	**−1.55**	/
$X_{t+1} - \bar{X}$	0.45	-0.55	1.45	0.45	-1.55	2.45	0.45	-1.55	-	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$	-0.697	-0.248	-0.798	0.6525	-0.697	-3.798	1.1025	-0.697	-	−5.18
$(X_t - \bar{X})^2$	2.4025	0.2025	0.3025	2.1025	0.2025	2.4025	6.0025	0.2025	2.4025	16.223

بتطبيق القانون نجد :

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{-5.18}{16.223} = -0.3192 \cong 0.32$$

* حساب معامل الارتباط الذاتي بإزاحة واحدة (بتأخير 2): المتوسط الحسابي = 10.55

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	المجموع
X_t	9	**11**	**10**	**12**	**11**	**9**	**13**	**11**	**9**	**95**
$X_t - \bar{X}$	**1.55−**	**0.45**	**−0.55**	**1.45**	**0.45**	**−1.55**	**2.45**	**0.45**	**−1.55**	/
$X_{t+2} - \bar{X}$	-0.55	1.45	0.45	-1.55	2.45	0.45	-1.55	/	/	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$	0.8525	0.6525	-0.2475	-2.2475	1.1025	-0.6975	-3.7975	/	/	−4.3825
$(X_t - \bar{X})^2$	2.4025	0.2025	0.3025	2.1025	0.2025	2.4025	6.0025	0.2025	2.4025	16.223

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{6}(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{8}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{-4.3825}{16.223} = -0.2701$$

* حساب معامل الارتباط الذاتي بإزاحة واحدة (بتأخير 3): المتوسط الحسابي = 11

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	المجموع
X_t	9	**11**	**10**	**12**	**11**	**9**	**13**	**11**	**9**	**95**
$X_t - \bar{X}$	**1.55−**	**0.45**	**−0.55**	**1.45**	**0.45**	**−1.55**	**2.45**	**0.45**	**−1.55**	/
$X_{t+3} - \bar{X}$	1.45	0.45	-1.55	2.45	0.45	-1.55	/	/	/	/
$(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$	-2.2475	0.2025	0.8525	3.5525	0.2025	2.4025	/	/	/	4.965
$(X_t - \bar{X})^2$	2.4025	0.2025	0.3025	2.1025	0.2025	2.4025	6.0025	0.2025	2.4025	16.223

$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{5}(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{4.965}{16.223} = 0.306$$

- احسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية لنفس الازاحات السابقة
- من اجل حساب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية نقوم بتطبيق العلاقة التالية:

$$\begin{cases} r_{kk} = \dfrac{r_k - \sum_{t=1}^{k-1} r_{k-1,t} r_{k-t}}{1 - \sum_{t=1}^{k-1} r_{k-1,t} r_t} \quad ; k = 2,3, \dots . \\ k = 1, r_{kk} = r_{11} = r_1 \\ r_{kt} = r_{k-1,t} - r_{kk} r_{k-1,k-1} \end{cases}$$

- حساب معامل الارتباط الذاتي الجزئي k=2

بتطبيق العلاقات السابقة نجد

$$r_{22} = \frac{r_2 - \sum_{t=1}^{1} r_{2-1,t} r_{2-t}}{1 - \sum_{t=1}^{2-1} r_{2-1,t} r_t}$$
$$r_{11} = r_1$$

$$r_{22} = \frac{r_2 - r_{11} r_1}{1 - r_{11} r_1} = \frac{-0.2701 - [(-0.32)(-0.32)]}{1 - [(-0.32)(-0.32)]} = \frac{-0.3725}{0.8976} = -0.4149$$

- حساب معامل الارتباط الذاتي الجزئي k=3

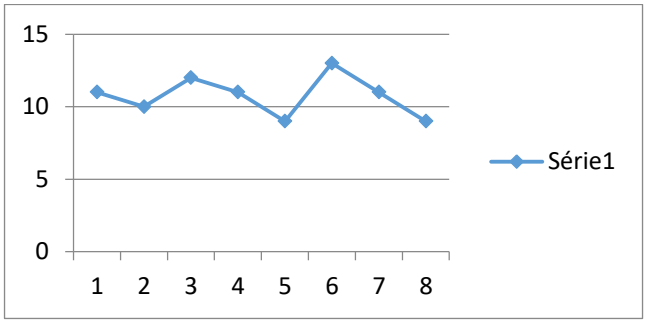
$$r_{33} = \frac{r_3 - \sum_{t=1}^{2} r_{3-1,t} r_{3-t}}{1 - \sum_{t=1}^{3-1} r_{3-1,t} r_t}$$
$$r_{11} = r_1$$
$$r_{21} = r_{11} - r_{22} r_{11}$$

$$r_{33} = \frac{r_3 - [(r_{21} r_2) + (r_{22} r_1)]}{1 - [(r_{21} r_1) + (r_{22} r_2)]}$$
$$r_{11} = r_1 = -0.32, r_{22} = -0.4149$$
$$r_{21} = r_{11} - r_{22} r_{11} = -0.32 - [(-0.4149)(-0.32)] = -0.4528$$

بالتعويض نجد

$$r_{33} = 0.067$$

1- هل السلسلة مستقرة مبررا اجابتك؟ من البيان يتضح ان السلسلة غير مستقرة



2- حساب احصائية ستودنت

$$s_{r_k} = \frac{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{k-1} r_j^2}}{\sqrt{n - b + 1}}$$

$$S_{r_{kk}} = \frac{1}{\sqrt{n - b + 1}}$$

بالتوفيق $t = \frac{r}{s}$