المحاضرة الثالثة عشر / الفصل الثالث
" إختبار الفرضيات"
يتبع ....

5- اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع

في الكثير من الأحيان يكون من الأهمية بما كان معرفة تباين مجتمع من المجتمعات. ففي عملية التصنيع يلزمنا معرفة التباين في أوزان المنتجات أو في أحجامها، لأن هذا التباين يعكس مستوى الدقة ومستوى الجودة في عملية التصنيع. ولهذا كثيرا ما يقوم مهندسوا الإنتاج بقياس التباين في المنتجات من حين لآخر ويحاولون أن يبقوا ذلك التباين ضمن حدود معينة.

نظرية (9): إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تباينه σ^2، وأردنا إجراء إختبارات حول المعلمة σ^2، فإن إحصاء الإختبار المناسب في هذه الحالة هو الإحصاء الذي يعتمد على أفضل مقدر للمعلمة σ^2، وهو تباين العينة S^2، وهذا الإحصاء هو المتغير العشوائي χ^2 ، حيث:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى **توزيع كأي تربيع** بدرجة حرية:

$$\upsilon = n-1$$

وبالتالي أردنا اختبار الفرضية الصفرية $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة:

1 . $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$\chi^2 > \chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad \chi^2 < \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$\chi^2 > \chi^2_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha,\upsilon)}$$

مثال: يدعى مدير أحد المصانع أن منتجاته لا يزيد الإنحراف المعياري لأطوالها عن 0.2سم. أراد أحد الزبائن أن يتأكد من هذا الإدعاء، فأخذ عينة عشوائية مكونة من 10 منتجات فوجد أن الانحراف المعياري فيها كان 0.4سم.

المطلوب: هل تعطينا هذه النتيجة مبررا قويا لرفض إدعاء البائع مستخدما في ذلك مستوى الدلالـة 0,05.

الحل:

$$H_0: \sigma^2 = 0.04$$

$$H_1: \sigma^2 > 0.04$$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد، إذن القيمة الحرجة يتم إيجادها كما يلي:

$$\chi^2_{(\alpha,\upsilon)} = \chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$\chi^2 > 16.919$$

الآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)0.16}{0.04} = 36$$

بما أن:36 > 16.919 ، فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة عند مستوى الدلالة 0.05؛

أي أن هذه النتيجة تعطينا مبررا قويا لرفض إدعاء البائع، ومن هنا يمكننا القول أن الإنحراف المعياري يزيد عن 0.2 سم.

6 . اختبار الفروض حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

نظرية (10): إذا كان لدينا مجتمعان يتوزعان طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 عينة عشوائية حجمها n_1، وكان تباينها s_1^2 ، ثم سحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 ، وكان تباينها s_2^2 ، وأردنا إجراء إختبار خاص بمقارنة σ_1^2 و σ_2^2، فإن إحصاء الإختبار المناسب هو المتغير العشوائي F ، حيث:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى **توزيع فيشر** بدرجتي حرية:

$\upsilon_1 = n_1 - 1$ (درجة حرية البسط).

$\upsilon_2 = n_2 - 1$ (درجة حرية المقـــام).

وعليه أردنا اختبار الفرضية الصفرية:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \qquad \text{أو} \qquad H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$F > F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} \qquad \text{أو} \qquad F < F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}$$

2. $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$F > F_{(\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$$

3. $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$F < F_{(1-\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$$

وما يجب الإشارة إليه هو أن:

$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشـــر والتي يقع إلـى يمينـها مساحة $(\frac{\alpha}{2})$.

$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر والـتي يقع إلى يمينـــــها مساحة $(1-\frac{\alpha}{2})$.

$F_{(\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر والتي يقع إلى يمينـها مساحة (α).

$F_{(1-\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$**:** هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر والتي يقـــع إلى يمينـــها مساحــة $(1-\alpha)$.

7. اختبار الفرضيات حول النسبة P في المجتمع

نظرية (11): إذا كانت ($x_1,x_2.....,x_n$) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يخضع لتوزيع ذي الحدين، وكان حجم هذه العينة **كبير**، وأردنا إختبار الفرضية الصفرية: $H_0: P = P_0$ ، مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1: P \neq P_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\alpha/2}$$

2. $H_1: P > P_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1: P < P_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha}$$

مع العلم أن إحصاء الاختبار Z في هذه الحالة نجده يساوي:

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}}$$

8. اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي المجتمعين

نظرية (11): إذا أخذت عينتين عشوائيتين مستقلتين من توزيع ذي الحدين وكان حجمهما n_1 و n_2 كبير بدرجة كافية. فتكون الفرضية الصفرية التالية:

$H_0 : (P_1 - P_2) = d_0$. وبالتالي فإن إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$Z = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - d_0] / \sqrt{\frac{\bar{p}_1 q_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 q_2}{n_2}}$$

وما يجب الإشارة إليه هو أنه إذا كانت $d_0 = 0$ في الفرضية الصفرية السابقة، فهذا يعني أن $P_1 = P_2$. فعندئذ يكون إحصاء الاختبار كما يلي:

$$\bar{Z} = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \sqrt{\frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_2}}]/$$

حيث:

$$\bar{P} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\frac{x_1}{n_1} + n_2\frac{x_2}{n_2}}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

وتشير $\bar{P}$ الى **المتوسط المرجح** لنسبتي العينتين $\bar{p}_1$ و p_2 ، ويطلق عليها أيضا **بالنسبة التجميعية**.

ومنه أردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (P_1 - P_2) = 0$ مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1 : (P_1 - P_2) \neq 0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\alpha/2}$$

2. $H_1 : (P_1 - P_2) > 0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1 : (P_1 - P_2) < 0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha}$$