المحاضرة الثانية عشر / الفصل الثالث
" إختبار الفرضيات"
يتبع ....

2-4. عندما يكون تبايني المجتمعين مجهولين وحجمي العينتين كبير بدرجة كافية:

نظرية (5): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **كبير** تم سحبها من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **مجهول**، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينـة عشوائية أخرى حجمها n_2 **كبير** أيضا مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **مجهول** أيضا. فان إحصاء الإختبار المناسب هو Z .

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha}$$

مع العلم أن قيمة Z يتم حسابها وفقا للصيغة التالية:

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

مثال: أخذت عينة عشوائية من مجتمع معين، وكان حجمها 50، ووسطها الحسابي 57.5 وانحرافها المعياري 6.2، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع آخر، وكان حجمها 60، ووسطها الحسابي 54.4 وانحرافها المعياري 10.6 .

المطلوب:

هل نستطيع أن نستنتج أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى الدلالة 0.05.

الحل: نريد اختبار ما يلي:

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > 0$$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد، إذن القيمة الحرجة هي:

$$z_{0.05} = 1.645$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$Z > 1.645$$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

فنجد أن:

$$Z = \frac{(57.5 - 54.4) - 0}{\sqrt{\frac{(6.2)^2}{50} + \frac{(10.6)^2}{60}}} = 1.908$$

نلاحظ أن $1.645 < 1.908$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة رفض H_0 (المنطقة الحرجة)، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 ؛ وعليه نستنتج أن هناك دليلا كافيا على أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية 0.05 .

3-4. عندما يكون تبايني المجتمعين مجهولين والعينتين مستقلتين وصغيرتا الحجم

وفي هذا العنصر لدينا حالتين:

- حالة تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.
- حالة تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

ويمكن توضيح كل هذا في النظريتين **السادسة** و**السابعة** التاليتين.

نظرية (6): إذا كان $\bar{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وكان $\bar{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع

الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان **تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين**، فإن إحصاء الإختبار المناسب هو:

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية $\upsilon = n_1 + n_2 - 2$

وأردنا إختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T < -t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad T > t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مثال: قدمت مؤسستين من المؤسسات المنتجة للآلات عرضين، يتضمن كل عرض طريقة معينة للإنتاج، وانعكس ذلك في الزمن اللازم لإنتاج الوحدة من المنتج، ولقياس متوسط هذا الزمن للآلتين تم قياس الزمن لعدد 5 وحدات من الآلة الأولى، و6 وحدات من الآلة الثانية وكانت كما يلي:

الطريقة الأولى (الزمن بالدقيقة)	الطريقة الثانية (الزمن بالدقيقة)
2	3
4	7
9	5
3	8
2	4
/	3

المطلوب: إختبار الفرض القائل بعدم وجود فروق معنوية بين متوسطي الزمن للآلتين عند مستوى معنوية 0.01، مع العلم أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.

الحل:

قبل اختبار الفرضية السابقة يجب أولا حساب ما يلي:

$$s_p^2 \text{ ، } s_2^2\text{ ، } s_1^2\text{ ، } \bar{x}_2 \text{ ، } \bar{x}_1$$

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية نجد أن:

$$\bar{x}_1 = 4 \quad , \bar{x}_2 = 5 \quad , \quad s_1^2 = 8.5 \quad , \quad s_2^2 = 4.4 \quad , \quad s_p^2 = 6.22$$

وعليه فإن اختبار الفرضية السابقة يتم وفقا للخطوات التالية:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

$$\alpha = 0.01$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد إتجاها واحدا، فإن الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون:

$$-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = -t_{(0.005,9)} = -3.250 \text{ ، } t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.005,9)} = 3.250$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.01 إذا كان:

$$T < -3.250 \quad \text{أو} \quad T > 3.250$$

والآن نقوم بحساب T من خلال المعادلة التالية:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

أي:

$$T = \frac{(4-5)-0}{\sqrt{6.22(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}} = -0.662$$

نلاحظ أن: $-0.662 > -3.250$؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 ، ومنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي الزمن للآلتين عند مستوى معنوية 0,01.

نظرية (7): إذا كان $\bar{x}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وكان $\bar{x}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى

مستقلة عن الأولى حجمها n_2 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان **تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين**، فإن إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية لها الصيغة المركبة التالية:

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}} \right)$$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: (\mu_1-\mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1: (\mu_1-\mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T < -t_{\left(\frac{\alpha}{2},\upsilon\right)} \quad \text{أو} \quad T > t_{\left(\frac{\alpha}{2},\upsilon\right)}$$

2. $H_1: (\mu_1-\mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1: (\mu_1-\mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مثال (07): لنفرض أننا سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين لكل منهما توزيع طبيعي فوجدنا النتائج الآتية:

$$\bar{X}_1 = 32 \quad , \quad \bar{X}_2 = 30.2$$

$$n_1 = 7 \quad , \quad n_2 = 6 \quad , \quad s_1^2 = 4.470 \quad , \quad s_2^2 = 0.652$$

المطلوب: إختبر الفرضية $H_0: (\mu_1-\mu_2) = 0$ مقابل $H_1: (\mu_1-\mu_2) \neq 0$ عند مستوى المعنوية 0.05، وكان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

الحل:

$$H_0 : (\mu_1-\mu_2) = 0$$

$$H_1 : (\mu_1-\mu_2) \neq 0$$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، ومنه فإن الإختبار المناسب هو ذو طرفين، ومن أجل إيجاد القيم الحرجة، يجب أولا تحديد قيمة درجة الحرية، حيث:

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}\right) = \left(\frac{\left(\frac{4.470}{7}+\frac{0.652}{6}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4.470}{7}\right)^2}{(6)}+\frac{\left(\frac{0.652}{6}\right)^2}{(5)}}\right) = 8$$

ومنه تكون القيم الحرجة كما يلي:

$$-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = -t_{(0.025,8)} = -2.306 \quad ، \quad t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.025,8)} = 2.306$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$T < -2.306 \quad \text{أو} \quad T > 2.306$$

والآن نقوم بحساب T من خلال المعادلة التالية:

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)-d_0}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

أي :

$$T = \frac{(32-30.2)-0}{\sqrt{\left(\frac{4.470}{7}+\frac{0.652}{6}\right)}} = 2.08$$

نلاحظ أن: $2.08 < 2.306$ ؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1، ومن هنا نستنتج أنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين عند مستوى المعنوية 0,05.