المحاضرة الحادية عشر / الفصل الثالث
" إختبار الفرضيات"
يتبع ....

3- إختبار الفروض حول وسط المجتمع μ

3-1. إختبار الفروض حول وسط المجتمع μ، عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين معلوم:

نظرية (1): إذا كانت ($x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **معلوم**، فإن إحصاء الاختبار المناسب هو: $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$،

وأردنا إختبار الفرضية الصفرية التالية:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1: \mu \neq \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\alpha/2}$$

2. $H_1: \mu > \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1: \mu < \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha}$$

مثال: تخضع أوزان عبوات أحد مساحيق الغسيل لتوزيع طبيعي إنحرافه المعياري 7غ ومعدله μ، عند مستوى الدلالة 0.05 .

المطلوب:

اختبر الفرضية الصفرية: $H_0: \mu = 200$ ، مقابل الفرضية البديلة: $H_1: \mu \neq 200$، إذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها 25 هو 208.

الحل:

$$H_0: \mu=200$$
$$H_1: \mu\neq200$$
$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد إتجاها واحدا، فإن الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96 \quad ، \quad -z_{\alpha/2} = -z_{0.025} = -1.96$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$Z > 1.96 \quad \text{أو} \quad Z < -1.96$$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية : $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

فنجده يساوي: $Z = \frac{208-200}{7/\sqrt{25}} = 5.71$

نلاحظ أن $5.71 > 1.96$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض (المنطقة الحرجة)، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن قيمة $\mu > 200$ ، لأن Z وقعت في منطقة الرفض اليُمنى، أي على يمين $z_{\alpha/2}$.

2-3. اختبار الفروض حول وسط المجتمع، عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين مجهول، وحجم العينة كبير

نظرية (2): إذا تم أخذ عينة عشوائية كبيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **مجهول**، فإن إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1: \mu\neq\mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\alpha/2}$$

2. $H_1: \mu>\mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1: \mu<\mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -\ z_{\alpha}$$

3- 3. اختبار الفروض حول وسط المجتمع، عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين مجهول، وحجم العينة صغير

نظرية (3): إذا تم أخذ عينة عشوائية صغيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **مجهول**، فإن إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

وهو توزيع t بدرجات حرية $(\upsilon = n - 1)$.

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu= \mu_0$ ، مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1: \mu\neq\mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T > t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad T < -t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1: \mu>\mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1: \mu<\mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مع الإشارة إلى أن القيمة الحرجة $t_{(\frac{\alpha}{2})}$ هي قيمة على المحور الأفقي لتوزيع t ذي درجات حرية $(n - 1)$ ويقع إلى يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$. أما القيمة الحرجة $t_{(\alpha)}$ فهي قيمة على المحور الأفقي لتوزيع t ذي درجات حرية $(n - 1)$ ويقع إلى يمينها مساحة قدرها α .

مثال: استنتج أحد الباحثين أن معدل عدد الساعات التي يقضيها طلبة إحدى الجامعات في الدراسة أثناء أسبوع الامتحانات هو 50 ساعة، والمطلوب هو اختبار هذه الفرضية مقابل

فرضية أن معدل عدد الساعات يختلف عن 50 ساعة، إذا كان الوسط الحسابي لعدد الساعات التي قضاها 10 طلاب أثناء ذلك الأسبوع هو 7.51 ساعة بإنحراف معياري 6.3 ساعة. مع العلم أن مستوى الدلالة هو 0.05، وتوزيع عدد الساعات الدراسية يقترب من التوزيع الطبيعي.

الحل:

$$H_0: \ \mu=50$$
$$H_1: \ \mu \neq 50$$
$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، وبما أن توزيع المجتمع طبيعي، وتباينه غر معلوم، وحجم العينـــــة صغير، نستعمل توزيع t بدرجات حرية $(n-1)$ ، ولذلك فالقيم الحرجة هي:

$$t_{(0.025,9)} = 2.262$$

$$-t_{(0.025,9)} = -2.262$$

نرفض الفرضة الصفرية عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$T > 2.262 \quad \text{أو} \quad T < -2.262$$

والآن نقوم بحساب قيمة T من خلال المعادلة التالية:

$$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

أي :

$$T = \frac{51.7-50}{6.3/\sqrt{10}} = 0.85$$

نلاحظ أن: $(-2.262<0.85< 2.262)$؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة القبول، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن إستنتاج الباحث صحيح $(\mu= 50)$.

4- اختبار الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

4-1. عندما يكون تبايني المجتمعين معلومين

نظرية (4): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **معلوم**، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة

عشوائية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **معلوم** أيضا.

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: (\mu_1-\mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1:(\mu_1-\mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1:(\mu_1-\mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1:(\mu_1-\mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha}$$

مع العلم أن قيمة Z يتم حسابها وفقا للصيغة التالية:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

في معظم الحالات تكون الفرضية الصفرية في هذا النوع من الاختبار على الشكل: $H_0 : (\mu_1-\mu_2) = 0$ أي أن وسطي المجتمعيين متساويين.

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع طبيعي تباينه 9 فوُجد أن وسطها الحسابي 69، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 20 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول تباينه 25، فوُجد أن وسطها الحسابي 71.

المطلوب: إختبر الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرضية $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى المعنوية 0.05.

الحل:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 : (\mu_1-\mu_2) = 0$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 : (\mu_1-\mu_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تُحدد اتجاها واحدا، فإن الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96 \quad ، \quad -z_{\alpha/2} = -z_{0.025} = -1.96$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$Z > 1.96 \quad \text{أو} \quad Z < -1.96$$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية:

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

أي :

$$Z = \frac{(69-71)-0}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{25}{20}}} = -1.486$$

نلاحظ أن: $-1.486 > -1.96$ ؛ أي أن قيمة Z تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن وسطي المجتمعين متساويين عند نفس مستوى المعنوية.