المحاضرة الثامنة:
الفصل الثاني " التقدير الإحصائي"
يتبع ....

4- فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين: $(\mu_1 - \mu_2)$

4-1. عندما يكون تبايني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:

نحتاج في بعض الدراسات الإحصائية إلى مقارنة متوسطين حسابيين لمجتمعين ومعرفة الفرق بينهما $(\mu_1 - \mu_2)$ ، فإذا كان المجتمع الأول يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2 معلوم، والمجتمع الثاني يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2 معلوم أيضا، وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها n_1، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها n_2، وكانت العينتين مستقلتين فقد علمنا من دراستنا السابقة أنه في هذه الحالة يكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ توزيعا طبيعيا بمتوسط وتباين قدرهما على التوالي:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

وبالتالي، فإن المتغير العشوائي Z حيث:

$$Z = [(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

هو متغير عشوائي يتبع توزيعا طبيعيا معياريا. وبهذا نصل إلى النظرية التالية:

نظرية (07): إذا كان $\bar{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع **طبيعي** متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **معلوم**، وكان $\bar{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع **طبيعي** آخر متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **معلوم**، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ 100% للفرق بين متوسطي المجتمعين تعطى حسب العلاقة التالية:

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots(06)$$

مثال: لمقارنة متوسط طول نوع معين من الأنابيب المنتجة من المصنع (أ) بطول الأنابيب المنتجة من المصنع (ب)، سحبنا عينة عشوائية من المصنع (أ) تحتوي على 20 أنبوبة، وكان الوسط الحسابي لأطوالها 3.8 سم، وسحبنا عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى من المصنع (ب) تحتوي على 25 أنبوبة، وكان الوسط الحسابي لأطوالها 3.2 سم، فإذا كان طول الأنابيب المنتجة في المصنع (أ) يتبع توزيعا طبيعيا بتباين 0.82 سم، وطول الأنابيب المنتجة في المصنع (ب) يتبع توزيعا طبيعيا بتباين 0.64 سم.

المطلوب : أوجد فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطي الطول في المصنعين.

الحل:

بما أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا، والعينتين مستقلتين، وتبايني المجتمعين معلومين، فإن فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

انطلاقا مما سبق لدينا: $z_{\alpha/2}=1.96$ ، وبالتعويض في هذه الفترة بالبيانات المتوافرة لدينا نتحصل على:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = (3.8-3.2) - 1.96.\sqrt{\frac{0.82}{20}+\frac{0.64}{25}} = 0.09$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = (3.8-3.2) + 1.96.\sqrt{\frac{0.82}{20}+\frac{0.64}{25}} = 1.11$$

إذن **فترة الثقة للفرق** بين الوسط الحسابي لأطوال أنابيب المصنع (أ) والوسط الحسابي لأطوال أنابيب المصنع (ب) عند مستوى الثقة 95% هي:
[0.09 ، 1.11]، أي نستطيع القول بثقة قدرها 95% أن الفرق الحقيقي بين الوسط الحسابي لأطوال كل أنابيب المصنع (أ)، والوسط الحسابي لأطوال كل أنابيب المصنع (ب)، يقع بين القيمتين 0.09 سم و1.11 سم.

وبما أن **حدي فترة الثقة موجبان**، نستنتج أن الوسط الحسابي لأطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (أ) أكبر من الوسط الحسابي لأطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (ب).

2-4. حالة تباييني المجتمعيـن مجهوليـن والعينتين مستقلتين وصغيرتا الحجم

وفي هذا العنصر لدينا حالتين:

- حالة تباييني المجتمعين مجهولين ومتساويين.
- حالة تباييني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

ويمكن توضيح كل هذا في النظريتين **الثامنة** و**التاسعة** التاليتين على الترتيب.

نظرية (08): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان **حجم العينتين صغير وتباييني المجتمعين مجهولين ومتساويين**، فإن فترة ثقة (1- α) 100% للفرق بين متوسطي المجتمعين تعطى حسب العلاقة التالية:

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})} \quad , \quad (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + \quad t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}\right]$$

.....(07)

حيث درجات الحرية تأخذ الشكل التالي: $\upsilon = n_1 + n_2 - 2$

مثال: استخدمت طريقتين لإنتاج سلعة معينة، وتوضح البيانات التالية الوقت بالدقائق المستغرق في إنتاج الوحدة بالنسبة لست وحدات أنتجت بالطريقة الأولى، وخمس وحدات أنتجت بالطريقة الثانية، حيث X_1 يمثل الوقت المستغرق عند استعمال الطريقة الأولى، و X_2 يمثل الوقت المستغرق عند استعمال الطريقة الثانية:

X_1	40	40	50	60	60	50
X_2	40	45	55	58	62	/

فإذا علمت أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا بتباينين متساويين. أوجد فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطي الوقت المستغرق بالطريقتين $(\mu_1 - \mu_2)$.

الحل:

بما أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا **بتباينين مجهولين ومتساويين**، والعينتين صغيرتان ومستقلتان لأن كل عينة خاصة بآلة مستقلة عب الآلة الأخرى، إذن فترة الثقة المناسبة في هذه الحالة هي:

$$\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}\ ,(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\ \ t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}\right]$$

لإيجاد هذه الفترة يجب حساب: $\overline{X}_1$، $\overline{X}_2$ ، s_1^2 ، s_2^2 ، s_p^2 وذلك كما يلي:

$$\overline{X}_1=\frac{\sum X_{1i}}{n_1}=\frac{300}{6}=50$$

$$\overline{X}_2=\frac{\sum X_{2i}}{n_2}=\frac{260}{5}=52$$

$$s_1^2=\frac{\Sigma\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2}{n_1-1}=\frac{400}{5}=80$$

$$s_2^2=\frac{\Sigma\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2}{n_2-1}=\frac{338}{4}=84.5$$

إذن يكون :

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)\,s_1^2+(n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(6-1)80+(5-1)84.5}{6+5-2}=82$$

وبما أن: $1-\alpha=0.95$ فإن : $\frac{\alpha}{2}=0.025$

ولدينا: $\upsilon=n_1+n_2-2=6+5-2=9$

فيكون : $t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}=t_{(0.025,9)}=2.262$

إذن بالتعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}=(50-52)-2.626.\sqrt{82(\frac{1}{6}+\frac{1}{5})}=-14.40$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}=(50-52)+2.626.\sqrt{82(\frac{1}{6}+\frac{1}{5})}=10.40$$

وعليه نجد أن فترة الثقة للفرق بين متوسطي الوقت المستغرق بالطريقتين عند مستوى ثقة 95 % هي: [10.40 ، 14.40-]. أي نستطيع القول بثقة قدرها 95% بأن الفرق الحقيقي بين متوسط الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة بالطريقة الأولى ومتوسط الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة بالطريقة الثانية يقع بين القيمتين: 14.40- دقيقة و 10.40 دقيقة.

نظرية (09): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان **حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين**، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)100\%$ للفرق بين متوسطي المجتمعين تعطى حسب العلاقة التالية:

$$\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}\ ,\ (\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}\right]$$

..... (08)

مع العلم أن درجات الحرية في هذه الحالة لها الصيغة المركبة التالية:

$$\upsilon=\left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}\right)$$

وعندما يكون **حجما العينتين كبيرين** بدرجة كافية أي حجم كل عينة يكون اكبر أو يساوي 30 ، فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عندما يكون تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، وعند مستوى ثقة $(1-\alpha)100\%$ تعطى حسب العلاقة التالية:

$$\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}\ ,(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\ z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}\right]$$

..... (09)

وهذا حتى لو لم يكن المجتمعان خاضعان للتوزيع الطبيعي، وذلك وفقا لنظرية النهاية المركزية.

مثال: البيانات التالية خاصة بعينتين مستقلتين مسحوبتين من مجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين غير متساويين:

العينة الثانية	العينة الأولى
$=n_2\ 5$	$=4n_1$
$=1.2\,\overline{X}_2$	$=1\,\overline{X}_1$
$=0.0991\ s_2^2$	$=0.0547\ s_1^2$

المطلوب : أوجد فترة ثقة 90% للفرق بين متوسطـي المجتمعين.

الحل:

بنا أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين غير متساويين، والعينتين مستقلتان ، فإن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}\ ,(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\ \ t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}\right]$$

ولدينا : $1-\alpha=0.90$ فإن : $\frac{\alpha}{2}=0.05$

$$\upsilon=\left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{0.0547}{4}+\frac{0.0991}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0.0547}{4}\right)^2}{(4-1)}+\frac{\left(\frac{0.0991}{5}\right)^2}{(5-1)}}\right)=6.99\approx 7$$

وعليه يكون :

$$t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}=\ \ t_{(0.05,7)}=1.895$$

عند التعويض في فترة الثقة المطلوبة نحصل على:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}=(1-1.2)-1.895.\sqrt{(\frac{0.0547}{4}+\frac{0.0991}{5})}=\ -0.5468$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}=(1-1.2)+1.895.\sqrt{(\frac{0.0547}{4}+\frac{0.0991}{5})}=\ 0.1468$$

إذن فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى الثقة 90% هي بالتقريب:

$$[-0.55\ ،0.15]$$

5-فترة الثقة لتباين المجتمع σ^2