المحاضرة السابعة:
الفصل الثاني " التقدير الإحصائي"
يتبع ....

3-تقدير متوسط المجتمع بفترة أو بمجال (فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ)

إن تقدير وسط المجتمع بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لوسط المجتمع أولا ومن ثم استعمال هذا المقدار لإيجاد قيمتين تعتمدان على التوزيع الاحتمالي لهذا المقدر وعلى معامل الثقة، وبالتالي تمثل هاتان القيمتان الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة المطلوبة .

فإذا كان وسط المجتمع μ غير معلوم وأردنا إيجاد فترة ثقة للمعلمة μ فإننا نستعمل وسط العينة $(\overline{X})$ كتقدير نقطي للمعلمة، ونستعمل توزيع المعاينة للإحصاءة $(\overline{X})$ لنحدد الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة المطلوبة.

3-1. فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما:

إذا كانت العينة المدروسة كبيرة الحجم وتم سحبها من مجتمع تباينه معلوم، فان توزيع المعاينة للإحصاء $\overline{X}$ هو التوزيع الطبيعي أو تقريبا التوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ ، وفي مثل هذه الحالات نستطيع إيجاد فترة الثقة للوسط μ من العبارة الاحتمالية التالية:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1- \alpha$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{حيث:}$$

حيث: $z_{\alpha/2}$ هي النقطة على المحور الافقي لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقع على يمينها $\alpha/2$ من المساحة.

ومن المعادة السابقة نجد فترة الثقة ذات معامل ثقة $(1- \alpha)$ للوسط μ، ونسميها فترة ثقة $(1- \alpha)$ 100% وهي تأخذ الشكل التالي:

$$\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وبهذا نصل إلى النظرية التالية:

نظرية (03): إذا كانت $(x_1,x_2.....,x_n)$ هي مشاهدات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 معلوم، فان فترة ثقة $(1-\alpha)$ 100% للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{x} - \boldsymbol{z_{\alpha/2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \overline{x} + \boldsymbol{z_{\alpha/2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (02)$$

حيث: $z_{\alpha/2}$ هي النقطة على المحور الافقي لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقع إلى يمينها مساحة $\alpha/2$.

مثال: أوجد فترة ثقة 95% للوسط μ في مجتمع طبيعي تباينه 64، هذا إذا اخترت عينة عشوائية حجمها 9، وكان وسطها الحسابي 52.

الحل:

بما أن: $1-\alpha = 0.95$ فإن : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

وبالتالي يكون:

$z_{\alpha/2} = 1.96$ من جدول التوزيع الطبيعي.

إذن بالتعويض في فترة الثقة نجد أن فترة ثقة 95% للوسط μ هي:

$$52 - 1.96\cdot\frac{8}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 52 + 1.96\cdot\frac{8}{\sqrt{9}}$$

$$52 - 5.227 \leq \mu \leq 52 + 5.227$$

$$46.773 \leq \mu \leq 57.227$$

وهي فترة ثقة 95% للوسط μ.

انطلاق مما سبق، فإن الهيكل العام لفترة الثقة لتوزيعات المعاينة المتماثلة يأخذ الشكل التالي:

الخطأ المعياري للتقدير بنقطة x قيمة جزئية ± التقدير بنقطة

هامش خطأ المعاينة ± التقدير بنقطة

- اختيار حجم العينة المناسب لتقدير الوسط μ:

إن التحكم في خطأ المعاينة هو أحد الرؤى الأساسية عند التخطيط لدراسة إحصائية معينة، ويمكن تحديد هامش خطأ معاينة مرغوب فيه (الخطأ في تقدير μ) وذلك باختيار حجم العينة المناسب.

حيث يسمى المقدار $z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حد (1- α)100% للخطأ في تقدير μ. ولهذا إذا تم تحديد المقدار الأكبر المسموح به لهذا الخطأ في التقدير أمكن حساب حجم العينة المناسب لتحقيق ذلك الحد عن طريق حل المتباينة التالية:

$$z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E$$

حيث أن E هو حد المقدار الأكبر المسموح به لهذا الخطأ، وينتج من ذلك أن:

$$\boldsymbol{n \geq \left[\frac{z_{\alpha/2}.\sigma}{E}\right]^2} \quad \cdots\cdots\cdots (03)$$

مثال: أراد عميد إحدى الكليات أن يُحدد حجم العينة اللازمة لحساب متوسط الزمن اللازم لانتقال الطلبة من مدرج إلى آخر، وذلك ألا يزيد الخطأ في هذا المتوسط عن 0.3 دقيقة، وهذا بدرجة ثقة 95% على أساس أن الانحراف المعياري σ من دراسات مماثلة يساوي 1.5 دقيقة.

الحل:

لتحديد حجم العينة اللازمة، فإننا سوف نطبق العلاقة التالية:

$$n \geq \left[\frac{z_{\alpha/2}.\sigma}{E}\right]^2 \Leftrightarrow n \geq \left[\frac{1.96\ X\ 1.5}{0.3}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow n \geq 96.04$$

$$\Rightarrow n \approx 96 \text{ مفردة}$$

مثال: قامت مجموعة من الخبراء بتقدير متوسط الزمن اللازم لتركيب آلة معينة في صناعة كبيرة وذلك استنادا على عينة عشوائية حجمها 150 ، ومن المعلومات المتوفرة لدى تلك المجموعة أن الانحراف المعياري σ يساوي 6.2 دقيقة.

المطلوب: أحسب الحد الأقصى للخطأ لهذا التقدير بدرجة ثقة 99% .

الحل:

نعلم أن:

$$\text{الخطأ} = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.575.\frac{6.2}{\sqrt{150}} = 1.30$$

وبذلك يمكن القول بأن الخطأ الأقصى هو 1.3 بدرجة ثقة 99% .

3- 2. فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول

نظرية (04): إذا كان $\overline{X}$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها كبير بدرجة كافية مسحوبة من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ 100% للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \; , \; \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (03)$$

مثال: إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمعدلات عينة عشوائية مؤلفة من 36 طالبا في إحدى الجامعات هما على التوالي: 66.3 ، 12

المطلوب: أوجد فترة ثقة 95% لمعدل جميع طلبة الجامعة إذا افترضنا أن علامات الطلبة تخضع للتوزيع الطبيعي.

الحل:

نلاحظ أن تباين المجتمع مجهول، وحجم العينة كبير بدرجة كافية فإن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

بما أن: $1-\alpha = 0.95$ فإن : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

وباستخدام الجدول الإحصائي نجد: $z_{\alpha/2} = 1.96$

إذن بالتعويض نجد أن فترة ثقة 95% للوسط μ هي:

$$66.3 - 1.96\cdot\frac{12}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 66.3 + 1.96\cdot\frac{12}{\sqrt{36}}$$

$$66.3 - 3.92 \leq \mu \leq 66.3 + 3.92$$

$$62.38 \leq \mu \leq 70.22$$

وهي فترة ثقة 95% لمعدل جميع طلبة الجامعة.

نظرية (05): إذا كان $(\overline{X})$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية صغيرة الحجم تم سحبها من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)100\%$ للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{X} - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \; , \; \overline{X} + t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \quad \ldots\ldots (04)$$

مع العلم أن:

$t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$ هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع ستيودنت t ذي درجات حرية (n- 1) والتي يقع إلى يمينـها مساحة $\alpha/2$.

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها 7 من مجتمع طبيعي، فكان وسطها الحسابي 11.2، وإنحرافها المعياري 0.4 .

المطلوب: أوجد فترة ثقة 95% لمعدل المجتمع μ .

الحل:

بتطبيق النظرية الخامسة نجد فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left[\overline{X} - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

بما أن: $1-\alpha = 0.95$ فإن : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ومن جدول توزيع t بدرجات حرية 6 نجد أن:

$$t_{(0.025,6)} = 2.447$$

إذن فترة الثقة 95% للمعدل μ هي:

$$11.2 - 2.447.\frac{0.4}{\sqrt{7}} \leq \mu \leq 11.2 + 2.447.\frac{0.4}{\sqrt{7}}$$

$$11.2 - 0.37 \leq \mu \leq 11.2 + 0.37$$

$$10.83 \leq \mu \leq 11.57$$

وهذا بدرجة ثقة 95%.

3- 3. فترة الثقة لمتوسط مجتمع غير طبيعي:

نظرية (06): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع غير طبيعي، فإنه بإمكاننا استعمال نظرية النهـاية المركـزية لمعرفة توزيع الوسـط إذا كان حجم العينة **كبيـر** ، ومن ثم تكون فتـرة ثقـة (1- α) 100% للمعدل μ هي:

$$\left[\overline{X} - \boldsymbol{z_{\alpha/2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{X} + \boldsymbol{z_{\alpha/2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \ldots\ldots (05)$$

وفي حالة عدم معرفة σ نستعمل S بدلا منها، شريطة أن تكون n كبيرة.

مثال: تم دراسة عينة عشوائية حجمها 81 سيجارة لتقدير متوسط النيكوتين في السجائر، فوُجد أن متوسط العينة هو 3.6 ملغم بانحراف معياري قدره 0.9 ملغم.

المطلوب: أوجد فترة ثقة 99% لمتوسط النيكوتين في السجائر.

الحل:

لدينا: $1-\alpha = 0.99$ فإن : $\frac{\alpha}{2} = 0.005$

وبالتالي يكون : $z_{\alpha/2} = 2.57$

إذن، باستعمال النظرية السادسة فإن فترة الثقة المطلوبة هي على الشكل التالي:

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبالتطبيق نجد:

$$3.6 - 2.57.\frac{0.9}{\sqrt{81}} \leq \mu \leq 3.6 + 2.57.\frac{0.9}{\sqrt{81}}$$

$$3.6 - 0.257 \leq \mu \leq 3.6 + 0.257$$

$$3.343 \leq \mu \leq 3.85$$