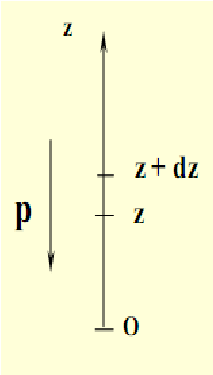
$$\rho g dv\overrightarrow{k} - \frac{dp}{dz}dv\overrightarrow{k} = \vec{0}$$

On projette les vecteurs sur l'axe (Oz) orienté vers la verticale montante et on obtient:



La loi de la statique des fluides

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

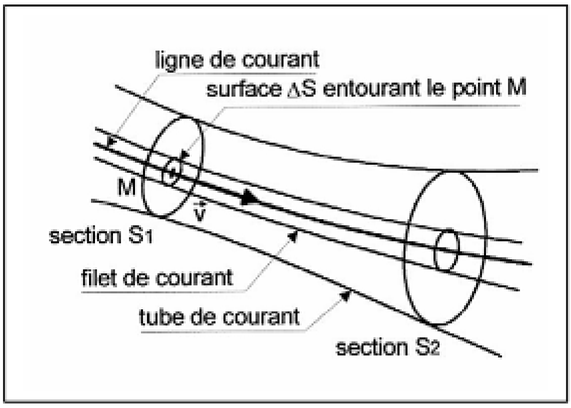
Comme la masse volumique est constante, il est facile d'intégrer la prédite relation et d'obtenir la loi finale de la statique des fluides incompressibles et homogènes comme [7][8][9][10][11]:

$$\rho g z + p = \text{constante}$$

3- Dynamique des fluides incompressibles

1- Définitions :

Le principe de continuité exprime la conservation de masse, ce qui signifie qu'aucune matière de fluide ne peut être créé ni disparaître dans un volume donné :



- *Le Débit* : est la quantité de matière qui traverse une section droite de la conduite pendant l'unité de temps.

- *Débit masse* **:** Si *dm* est la masse élémentaire de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant l'intervalle de temps *dt*, le débit-masse s'écrit :

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad [kg \cdot s^{-1}]$$

- *Débit volume :* Si *dV* est le volume élémentaire de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant l'intervalle de temps dt , le débit-volume s'écrit :

$$q_v = \frac{dV}{dt} \quad [m^3 \cdot s^{-1}]$$

- *Relation entre q_m et q_V :* La masse volumique ρ est donnée par la relation : $\rho = \frac{dm}{dV}$. De cela on tire que : $q_m = \rho q_V$

Etant donné que le débit d'écoulement reste toujours constant dans un régime permanent), *l'équation de continuité* s'écrit comme suit:

$$Q = S_1V_1 = S_2V_2$$

<u>*Remarques*</u> :

- Les liquides sont incompressibles et peu dilatables (masse volumique constante) ; on parle alors d'écoulements iso-volumes.
- Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression. Pour des vitesses faibles (variation de pression limitée) et pour des températures constantes, on retrouve le cas d'un écoulement iso-volume (vérifiant l'équation de continuité).

<u>*Exemple*</u>

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile (*ρ_1=850 kg/m^3*) sur une hauteur *h_1=6 m*

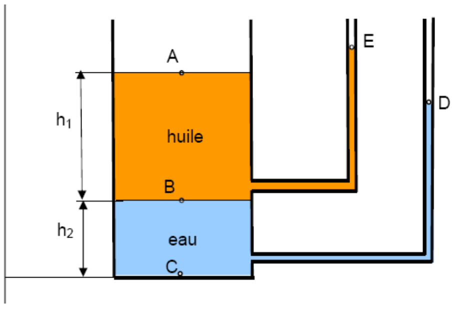
- de l'eau (*ρ_2=1000 kg/m^3*) sur une hauteur *h_2=5 m*

1- Calculer la pression P_B (en bar) au point *B*.

En déduire le niveau de l'huile Z_E.

2- Déterminer la pression P_C au point *C*.

En déduire le niveau de l'eau Z_D.



1- Appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points B et A, on aura: $p_B - p_A = \rho_1 g(Z_A - Z_B)$

Or : $Z_A - Z_B = h_1 \; et \; p_A = p_{atm}$.

Donc : $p_B = p_{atm} + \rho_1 g h_1$

Application numérique : $p_B = 10^5 + 850.9{,}81.6 = 150031 Pa = 1{,}5 \, bar$.

- Appliquant la RFH entre les points A et E,

$$p_A - p_E = \rho_1 g\left(Z_E - Z_A\right) \; or \; p_A = p_E = p_{atm}$$

Donc : $Z_E = Z_A = h_1 + h_2 = 5 + 6 = 11m.$

2- Appliquant la RFH entre les points C et B, on aura: $p_C - p_B = \rho_2 g\left(Z_B - Z_C\right)$

Or : $Z_B - Z_C = h_2$

Donc : $p_C = p_B + \rho_2 g h_2 = 150031 + 1000.9,81.5 = 199081 Pa = 2 bar$

- Appliquant la RFH entre les points C et D,

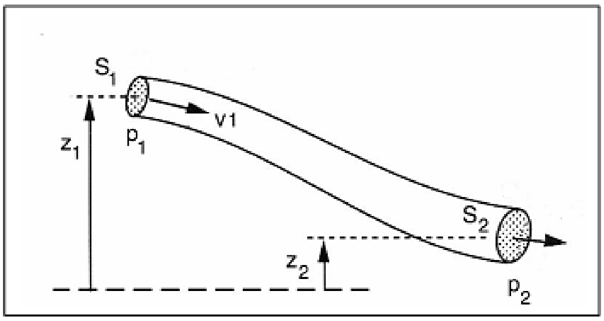
$$p_C - p_D = \rho_2 g\left(Z_D - Z_C\right) \; or \; p_D = p_{atm} \; et \; Z_C = 0.$$

Donc : $Z_D = \dfrac{p_C - p_D}{\rho_2 g} = \dfrac{199081 + 10^5}{10^3.9,81} = 10,1m.$

2- Equation Générale d'Ecoulement ou Equation de Bernoulli

Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ..), ont des valeurs constantes au cours du temps[7][8][9][10][11]**:**

a- ***Cas des Fluides Parfaits (non visqueux)***



L'équation de Bernoulli exprime que, tout le long d'un filet fluide en mouvement permanent (stationnaire), l'énergie totale par unité de poids du fluide reste constante, elle s'écrit :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H = constante$$

b- Cas des Fluides réels (visqueux)

Dans le cas des fluides réels, l'énergie diminue dans la direction de l'écoulement. Ceci est dû à la nature visqueuse du fluide qui dissipe une partie de l'énergie: cette perte d'énergie est appelée *Perte de charge* et l'équation s'écrit :

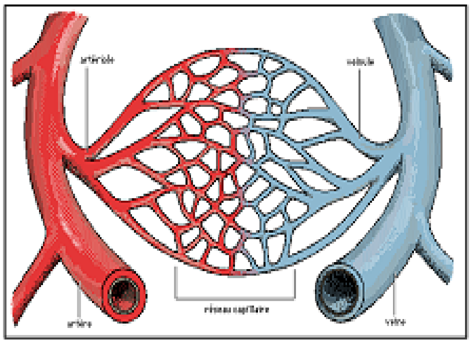
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h$$

h : est du fait de la viscosité du fluide et de la rugosité des parois de la section d'écoulement.

3- Application biologique de la mécanique des fluides: Vitesse de circulation sanguine

Le système circulatoire est composé de vaisseau de différents diamètres. D'après l'équation de continuité, le débit sanguin restera constant dans tout le réseau ce qui implique un changement de vitesse de circulation du sang.

D'après l'équation de continuité lorsque le sang passe de la veine de l'aorte à la veine puis au capillaire, la vitesse du sang devrait augmenter. Or lorsque l'on se coupe au bout du doigt, le sang coule plutôt lentement alors qu'un capillaire a été touché. Ce paradoxe s'explique par le fait que l'équation de continuité s'applique à l'ensemble des capillaires et non pas à chacun d'entre eux. Ainsi la somme des sections de surfaces de tous les capillaires est supérieure à celui de l'aorte, si bien que le sang y circulera plus lentement.



	aorte	capillaire	veinules
Diamètre	2,5 cm	0,0008 cm	0,25 cm
Section totale	3-4 cm^2	2500 cm^2	30 cm^2
Vitesse	30 cm. sec^{-1}	0,02-0,1 cm. sec^{-1}	15 cm. sec^{-1}

Lorsqu'un vaisseau sanguin se bouche, son diamètre diminue. En fonction de cette diminution, un médecin prendra la décision d'intervenir ou non. La question est donc de pouvoir mesurer la taille du rétrécissement sans avoir à ouvrir chaque vaisseau sanguin.

Pour mesurer le diamètre du vaisseau bouché, on mesure la vitesse de circulation. L'échographie permet de mesurer la taille du vaisseau en amont du rétrécissement. Le Doppler permet de mesurer la vitesse du sang. Grâce à l'équation de continuité, il devient alors facile de déterminer le diamètre du rétrécissement.

Le théorème de Bernoulli permet de calculer la différence de pression à l'endroit du rétrécissement. La pression totale étant constante, on a:

$$h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{{v_1}^2}{2g} = h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{{v_2}^2}{2g}$$

En réorganisant cette équation on obtient :

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

D’après cette équation, on déduit que plus la sténose n’est pas serrée, plus la vitesse du sang à cet endroit sera élevée et plus la pression artérielle ne sera pas grande. C'est cela qui déclenchera la décision d'opérer ou non.