

TD 06

Résoudre et étudier selon δ le programme linéaire paramétré suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z(x) &= 8x_1 + 6x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 30 + 2\delta \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 + 1\delta \\ x_1 + 3x_2 &\leq 18 + 2\delta \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \delta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Max } Z(x) = c^T x$$

$$Ax \leq \bar{b} + \delta b'$$

$$x \geq 0, \delta \in \mathbb{R}$$

Le programme linéaire paramétré sous forme standard :

$$\text{Max } Z(x) = 8x_1 + 6x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$5x_1 + 3x_2 + e_1 = 30 + 2\delta$$

$$2x_1 + 3x_2 + e_2 = 24 + \delta$$

$$x_1 + 3x_2 + e_3 = 18 + 2\delta$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_i \geq 0, i=1,2,3, \delta \in \mathbb{R}$$

first

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$\bar{b}$	b'
e_1	5	3	1	0	0	30	2
e_2	2	3	0	1	0	24	1
e_3	1	3	0	0	1	18	2
	8	6	0	0	0	0	0

Min $b/x_1 \geq 0$
 $30/5 = 6 \xrightarrow{\text{Min}}$
 $24/2 = 12$
 $18/1 = 18$

Max δ

$\bar{b}$

b'

4

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$\bar{b}$	b'	
x_1	1	$3/5$	$1/5$	0	0	6	$2/5$	$\min \bar{b}/x_2 \geq 0$
e_2	0	$9/5$	$-2/5$	1	0	12	$1/5$	$12/9/5 = \frac{40}{3}$
e_3	0	$12/5$	$-1/5$	0	1	12	$8/5$	$12/12/5 = 5 \xrightarrow{\min}$
	0	$6/5$	$-4/5$	0	0	-48	$-16/5$	

RHS (row 3)
 $\text{Max} \geq 0$
 max (arrow to $6/5$)
 $\bar{z}$ (arrow to -48)
 z' (arrow to $-16/5$)

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$\bar{b}$	b'
x_1	1	0	$1/4$	0	$-1/4$	3	0
e_2	0	0	$-1/4$	1	$-3/4$	3	-1
x_2	0	1	$-1/12$	0	$5/12$	5	$2/3$
	0	0	$-3/2$	0	$-1/2$	-54	-4

$\bar{z}$ (arrow to -54)
 z' (arrow to -4)

Toutes les $c_j \geq 0 \Rightarrow$ le critère d'arrêt est satisfait

la sol est $x_1 = 3$

$x_2 = 5$

$z = 54$

$$z = \bar{z} + \gamma z' = (54) + (4)\gamma$$

$$x_1 = \bar{b}_1 + \gamma b'_1 = 3 + 0\gamma = 3$$

$$x_2 = \bar{b}_3 + \gamma b'_3 = 5 + \frac{2}{3}\gamma$$

on va étudier la sol de PL selon γ

Pour $\gamma = 0$ ($\gamma_0 = 0$)

la sol est $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 54$

$\theta > 0$

la ligne qui va sortir est :

$$\theta = \min \left(-\frac{\bar{b}_i}{b'_i}, \text{telque } b'_i < 0 \right)$$

$$\theta = -\frac{-3}{-1} = 3$$

la colonne qui va entrer :

$$\min \left(\frac{c_{s_0}}{a_{s_0 i}}, \text{telque } a_{s_0 i} < 0 \right) = \min \left\{ \frac{-3}{-\frac{1}{4}}, \frac{-1/2}{-\frac{3}{4}} \right\} \\ = \min \left\{ 6, \frac{2}{3} \right\}$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$\bar{b}$	b'	$\min(\bar{b}/b') \quad b' < 0$
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3	0	car $b' = 0$
e_2	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	3	-1	$-3/-1 = 3$ → sortir
x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	5	$\frac{2}{3}$	car $b' > 0$
	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-54	-4	

$\min_{i \neq j} \frac{c_i}{a_{ij}}$
 $-\frac{3}{2} / \frac{1}{12}$
 $-\frac{1}{2} / \frac{3}{4}$
 $\min$

e_3 prend la place de e_2 dans la base

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$\bar{b}$	b'
x_1							
e_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	-4	$\frac{4}{3}$
x_2							

$\bar{b} = -4$ (le cd n'est pas réalisable)

donc on va remplacer -4 par 0, pour la suite on va calculer les autres lignes par le pivotage de Gauss.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$\bar{b}$	b'
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	$\frac{1}{3}$
e_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	0	5	$\frac{11}{9}$
	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	-54	$-\frac{10}{3}$

toutes les

$b' > 0$

le critère

d'arrêt est satisfait

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = 3}$$

$$0 \leq \theta \leq 3$$

$$\bar{z} = \bar{z} + \theta \bar{z} = +54 + \frac{10}{3} \theta$$

$$54 + \frac{10}{3} \theta \leq \bar{z} = 54 + \frac{10}{3} \theta \leq 54 + \frac{10}{3} (3)$$

$$54 \leq \bar{z} \leq 64$$

$$x_1 = 3 + \theta \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$3 + 0 \left(\frac{1}{3}\right) \leq x_1 \leq 3 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$3 \leq x_1 \leq 4$$

$$x_2 = 5 + \theta \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$5 + 0 \left(\frac{1}{9}\right) \leq x_2 \leq 5 + 3 \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$5 \leq x_2 \leq 5 + \frac{1}{3}$$