Interrogation

Exercice 1 $(2pts \times 3)$

Soit la densité f définie par

$$f(x) = ke^{-|x|},\ x \in \mathbb{R};$$

avec k est une constante réelle.

1. Déterminer la fonction de réparation F de f.
2. En utilisant la méthode d'inversion, proposé un simulateur qui nous permet de générer un échantillon de taille n de la même loi F.
3. En utilisant la méthode de décomposition, proposé un simulateur qui nous permet de générer un échantillon de taille n de la même loi F.

Exercice 2 $(2pts \times 2)$

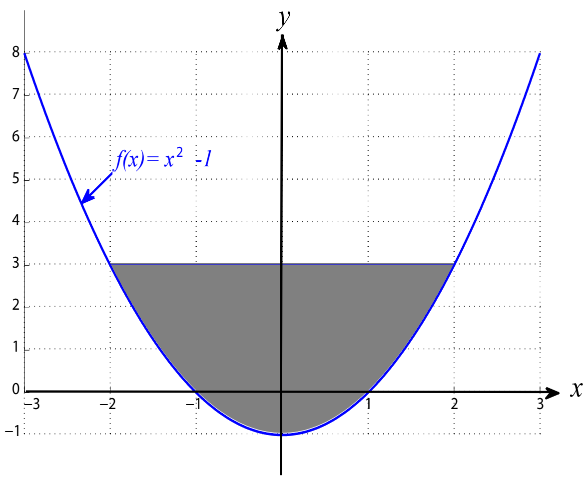
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - 1.$$

1. Proposer un simulateur qui nous fournis une estimation de l'intégrale:

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)dx.$$

2. Proposer un simulateur qui nous permet d'estimer la surface indiquée dans la figure ci-dessous.



Bon courage

Solution de l'Interrogation

Solution de l'Exercice 1

1. Détermination la fonction de réparation F.

   (a) Avant de déterminer la fonction de répartition F, on doit d'abord déterminer la valeur de la constante k pour que f soit une densité de probabilité.
   Notons que la fonction f peut-être réécrite comme suit :
$$f(x)=\begin{cases} ke^{x}, & \text{si } x\leq 0;\\ ke^{-x}, & \text{si } x>0.\end{cases}$$
   Pour que f soit une densité, il faut que
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \quad &\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-|x|}dx=1\\ &\Longrightarrow \int_{-\infty}^{0} ke^{x}dx+\int_{0}^{+\infty} ke^{-x}dx=1\\ &\Longrightarrow 2k\int_{0}^{+\infty} e^{-x}=1\\ &\Longrightarrow 2k=1\Longrightarrow k=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   (b) Par définition $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Ainsi on distingue deux cas à savoir :

   Cas $x\leq 0$:
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}\left[e^{t}\right]_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{x}.$$

   Cas $x>0$:
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}tdt\\ &= \frac{1}{2}\left[e^{t}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_{0}^{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-x}\right)\\ &= 1-\frac{1}{2}e^{-x}.\end{aligned}$$

   On conclut que la fonction de réparation est donnée par :
$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x\leq 0;\\ \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x>0.\end{cases}$$

2. Soit $u\in[0,1]$.

Pour x négatif on:

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x \Longrightarrow u = \frac{1}{2}e^x \Longrightarrow 2u = e^x \Longrightarrow \ln(2u) = x.$$

Mais le fait que $x \leq 0$, alors il faut que $\ln(2u) \leq 0 \Longrightarrow u \leq 0.5$.

Pour x positif on:

$$\begin{aligned} F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \quad &\Longrightarrow \quad u = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \\ &\Longrightarrow \quad 1 - u = \frac{1}{2}e^{-x} \Longrightarrow \ln(2-2u) = -x \\ &\Longrightarrow \quad x = -\ln(2-2u). \end{aligned}$$

Mais le fait que $x \geq 0$, alors il faut que $-\ln(2-2u) \geq 0 \Longrightarrow u > 0.5$.

D'après les résultats précédents on conclut que l'algorithme de génération d'un n-échantillon de la même loi que F sera comme suit :

```
function [x]=InerrogationExo11(n,N)
    for i=1:n
        u=random('unif',0,1);
       if u<=0.5
           x(i)=log(2*u);
       else
           x(i)=-log(2-2*u);
       end
    end
end
```

3. On remarque que la variable décrite par f peut être s'exprimer par $x = \pm y$ avec y est une variable aléatoire qui suit une loi Exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. De plus, elle est symétrique ie pour y une variable aléatoire exponentielle on a :

$$x = \begin{cases} y, & \text{avec une probabilité } 0.5; \\ -y, & \text{avec une probabilité } 0.5; \end{cases}$$

A cet effet, l'algorithme de génération d'un n-échantillon de la loi F par la méthode de décomposition aura la forme suivante:

```
function [x]=InerrogationExo12(n)
        i=1:n
        y= random('exp',1);
        u=random('unif',0,1);
       if u<=0.5
           x(i)=y;
       else
           x(i)=-y;
       end
    end
end
```

Solution de l'Exercice 2

1. On remarque que $f(x)$ change de signe dans l'intervalle $[-2;2]$, où

$$f(x) \in \begin{cases} [0,3], & \text{si } x \in [-2,-1]; \\ [-1,0], & \text{si } x \in [-1,1]; \\ [0,3], & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

   Alors, pour la calculer l'intégrale, on doit décomposer l'intégrale I en trois sous intégrales suivantes :

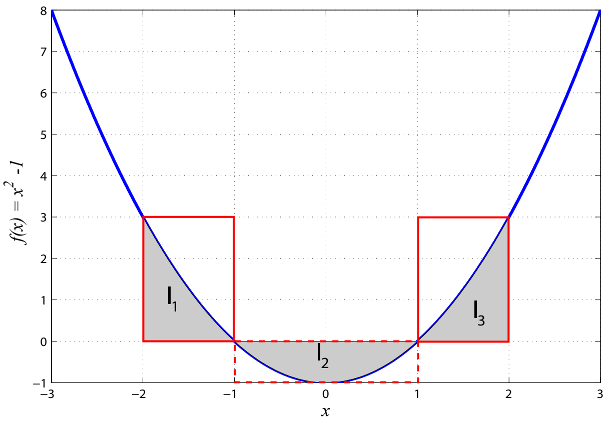
$$I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx.$$

   Ainsi, on aura leurs estimations comme suit:
   $I_1 = \frac{n_1}{N} * (3-0)(-1-(-2)) = \frac{n_2}{N} * 3;$
   $I_2 = \frac{n_2}{N} * (0-(-1))(1-(-1)) = \frac{n_2}{N} * 2;$
   $I_3 = \frac{n_3}{N} * (3-0)(2-1) = \frac{n_3}{N} * 3;$
   et l'estimateur de l'intégrale globale I sera donnée par :

$$I = I_1 - I_2 + I_3.$$

   L'analyse de la situation nous permet de construire le simulateur suivant:

```
function [I]=InerrogationExo21(N)
    n1=0;
    n2=0;
    n3=0;
    for i=1:N
        xi=random('unif',-2,-1);
        yi=random('unif',0,3);
        if (yi<=(xi^2-1))
            n1=n1+1;
        end
        xi=random('unif',-1,1);
        yi=random('unif',-1,0);
        if (yi>=(xi^2-1))
            n2=n2+1;
        end
        xi=random('unif',1,2);
        yi=random('unif',0,3);
        if (yi<=(xi^2-1))
            n3=n3+1;
        end
    end
    I1=3*(n1/N);
    I2=2*(n2/N);
    I3=3*(n3/N);
    I=I1-I2+I3;
end
```



2. Pour estimer la surface en question nous proposons d'utiliser la méthode de rejet (Monté Carlo). Dans cette situation deux algorithmes sont envisageables, soit l'algorithme qui nous permet d'estimer directement la surface désirée soit en procédant par la décomposition de la surface en trois sous surface (voir l'exemple du calcul de l'intégrale I).

   En prenant le rectangle délimiter par les points $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(-2,3)$ et $(2,3)$, le code source de l'algorithme sous MATLAB peut être exprimé comme suit:

```
function [S]=InerrogationExo22(N)
    n=0;
    for i=1:N
        xi=random('unif',-2,2);
        yi=random('unif',-1,3);
        if (yi>=(xi^2-1))
            n=n+1;
        end
    end
    S=16*n/N;
end
```