Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2022/2023
Module: tests statistiques

Solution du devoir

Le sujet:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramèter $\theta > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{\theta}x\right) \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}, \ \theta > 0,$$

où $\mathbb{I}_A$ désigne l'indicatrice de l'ensemble A.

1. Etant donné $X_1, ..., X_n$ un échantillon aléatoire de X, montrer que $T := \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi gamma de paramètre (n, θ), noté $T \rightsquigarrow \Gamma(n, \theta)$.
2. Montrer que $2T/\theta \rightsquigarrow \chi^2_{2n}$ (Khi-deux à $2n$ degrés de liberté).
3. Considérons le test suivant: $H_0 : \theta = 1$ contre $H_0 : \theta \neq 1$. Donner la forme explicite du rapport de vraisemblance généralisé (maximal) associé à ce test.
4. Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, déterminer la région critique correspondante.
5. Etant donné l'échantillon observé suivant:

   1.19; 2.33; 2.82; 1.04; 0.58; 0.77; 0.37; 3.28; 0.04; 0.22; 0.74; 2.11.

   Peut-on dire que X suit la loi exponentielle de paramètre $\theta = 1$?

* * * * * * * * * **

Solution:

1. On peut utiliser soit la méthode de convolution soit la méthode de la fonction caratéristique. Nous choisissons ici la deuxième méthode. La fonction caractérisique d'une variable aléatoire Y qui suit la loi Gamma de paramèter (k, θ) est donnée par la formule $\varphi_Y(t) = \mathbf{E}\left[e^{itY}\right] = (1 - i\theta t)^{-n}$, où $i^2 = -1$. Donc il suffit de montrer que $\varphi_T(t) = \varphi_Y(t) = (1 - i\theta t)^{-n}$. En effet, nous avons

$$\varphi_Y(t) = \mathbf{E}\left[e^{itT}\right] = \mathbf{E}\left[e^{it\sum_{j=1}^n X_j}\right] = \prod_{j=1}^n \mathbf{E}\left[e^{itX_j}\right].$$

Comme X_1 suit la loi exponentielle de paramètre θ, alors sa fonction caratéristique est $\varphi_{X_1}(t) = (1 - i\theta t)^{-1}$, ce qui implique que

$$\varphi_Y(t) = \prod_{j=1}^n \mathbf{E}\left[e^{itX_j}\right] = \prod_{j=1}^n (1 - i\theta t)^{-1} = (1 - i\theta t)^{-n} = \varphi_Y(t).$$

Ainsi on a montrer que T suit la loi gamma de paramèter (k, θ).

2. La fonction caractéristique d'une v.a Y quit suit la loi khi-deux à ν degré de liberté est donnée par

$$\varphi_Y(t) = (1 - 2it)^{-\nu/2}.$$

La fonction caractéristique de $W = 2T/\theta$ est

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \mathbf{E}\left[e^{itW}\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(i(2T/\theta)\right]\right. = \mathbf{E}\left[\exp\left(i\left(2t/\theta\right)T\right)\right] \\ &= \left(1 - i\theta\left(\left(2t/\theta\right)\right)\right)^{-n} = (1 - 2it)^{-n} = (1 - 2it)^{-\nu/2}, \text{ avec } \nu = 2n,\end{aligned}$$

donc $2T/\theta \rightsquigarrow \chi^2_{2n}$.

3. Le rapport de vraisemblance généralisé associé à ce test est:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sup_{\theta>0} L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)}{L\left(x_1,...,x_n;\theta_0\right)} \\ &= \frac{L\left(x_1,...,x_n;\theta_{EMV}\right)}{L\left(x_1,...,x_n;\theta_0\right)} = \frac{L\left(x_1,...,x_n;\overline{x}\right)}{L\left(x_1,...,x_n;1\right)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{x}} \exp\left(-\frac{1}{\overline{x}} x_i\right)}{\prod_{i=1}^{n} \exp\left(-x_i\right) \mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}} = \frac{\frac{1}{\left(\overline{x}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{\overline{x}}\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right)}. \end{aligned}$$

Nous avons $\sum_{i=1}^n x_i = n\overline{x}$, donc

$$R_1 = \frac{1}{\left(\overline{x}\right)^n} \frac{\exp\left(-n\right)}{\exp\left(-n\overline{x}\right)} = \left(e^{-1}\frac{1}{\overline{x}}\exp\left(\overline{x}\right)\right)^n.$$

4. La région critique de ce test est:

$$W = \left\{\left(x_1,...,x_n\right) \in \left(\mathbb{R}_+/\left\{0\right\}\right)^n : \left(e^{-1}\frac{1}{\overline{x}}\exp\left(\overline{x}\right)\right)^n > c\right\},$$

où

$$P_{\theta=1}\left(\left(e^{-1}\frac{1}{\overline{X}}\exp\left(\overline{X}\right)\right)^n > c\right) = 0.05.$$

Ceci peut être simplifiée en

$$W = \left\{\left(x_1,...,x_n\right) \in \left(\mathbb{R}_+/\left\{0\right\}\right)^n : \frac{1}{\overline{x}}\exp\overline{x} > k\right\},$$

où

$$P_{\theta=1}\left(\frac{1}{\overline{X}}\exp\overline{X} > k\right) = 0.05.$$

Nous avons déjà noté en cours que

$$\frac{1}{\overline{X}}\exp\overline{X} > k \Longleftrightarrow \exists\left(c_1 < c_2\right) \text{ telles que } \overline{X} > c_1 \text{ ou } \overline{X} < c_2.$$

Ce qui implique (vue la continuité de la v.a.) que

$$W = \left\{\left(x_1,...,x_n\right) \in \left(\mathbb{R}_+/\left\{0\right\}\right)^n : \ \overline{x} \geq c_1 \text{ ou } \overline{x} \leq c_2\right\},$$

où

$$P_{\theta=1}\left(\overline{X} \geq c_1\right) = P_{\theta=1}\left(\overline{X} \leq c_2\right) = 0.05/2 = 0.025.$$

Comme $T = \sum_{i=1}^n X_i = n\overline{X}$, alors

$$\begin{aligned} P_{\theta=1}\left(\overline{X} \geq c_1\right) &= P_{\theta=1}\left(T \geq nc_1\right) = P_{\theta=1}\left(\frac{2T}{1} \geq 2nc_1\right) \\ &= P\left(\chi^2_{2n} \geq 2nc_1\right) = 0.025 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{\theta=1}\left(\overline{X} \leq c_2\right) &= 1 - P_{\theta=1}\left(T \geq nc_2\right) = 1 - P_{\theta=1}\left(\frac{2T}{1} \geq 2nc_2\right) \\ &= 1 - P\left(\chi^2_{2n} \geq 2nc_2\right) = 0.025. \end{aligned}$$

5. L'échantillon observé est de taille $n = 12$, donc

$$P\left(\chi^2_{24} \geq 24c_1\right) = 0.025 \Longleftrightarrow P\left(\chi^2_{24} \geq 24c_1\right) = 0.025.$$

De la table statistique de la loi de khi-deux en obtient: $24c_1 = 39.364 \Longleftrightarrow c_1 = 1.640$. De même, nous avons $P\left(\chi^2_{24} \geq 24c_2\right) = 0.975$, ce qui donne $24c_2 = 12.40 \Longleftrightarrow c_2 = 0.516$. Finalement, la région critique est

$$W = \left\{\left(x_1,...,x_{12}\right) \in \left(\mathbb{R}_+/\left\{0\right\}\right)^{12} : \overline{x} \geq 1.640 \text{ ou } \overline{x} \leq 0.516\right\}.$$

La moyenne des données observées est égale à 1.290 qui est ni ≥ 1.640 ni ≤ 0.516, donc en garde H_0, c'est à dire $\theta = 1$.