جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى.

سلسلة التمارين رقم 03 في مقياس الاحصاء الوصفي.

عرض المعطيات: العرض البياني.

التمرين الأول:

فيما يلي البيانات الخام لأربعين ورقة من أوراق نبات الغار قيست أطوالها (الوحدة: ملم):

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

المطلوب:

أولا:

1- كون توزيعا تكراريا لهذه البيانات، مستخدما في ذلك 5 ملم كطول للفئات.

2- أحسب مراكز الفئات.

3- كون توزيعا تكراريا متجمعا صاعدا وآخر نازلا.

4- ما هو عدد الأوراق التي يزيد طولها عن 138.5 ملم، لكنه لا يتجاوز 163.5 ملم؟

5- ما هو عدد الأوراق التي يقل طولها عن 151.5 ملم؟

6- حدد الطول الذي تقع دونه أطوال الأوراق الأربع والثلاثين الأولى.

7- كون توزيعا تكراريا نسبيا وتوزيعا تكراريا نسبيا مئويا.

ثانيا: اعتمادا على إجاباتك السابقة، أرسم كلا من:

1-المدرج التكراري والمضلع التكراري لتوزيع أطوال أوراق نبات الغار.

2-المضلعين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل.

التمرين الثاني:

أرسم المدرج التكراري للتوزيع التكراري التالي:

الجدول رقم (3-1): مثال افتراضي.

الفئـات	n_i
10 - 05	25
15 - 10	40
25 - 15	60
35 - 25	50
50 - 35	60
70 - 50	40
المجمـوع	**275**

المصدر: افتراضي.

التمرين الثالث: يبين التوزيع التكراري التالي عدد العمال الذين يعملون في إحدى المؤسسات حسب تخصصاتهم:

الجدول رقم (3-2): العمال حسب التخصصات.

التخصص	A	B	C	D	E	F	G
عدد العمال	77	64	47	44	85	18	28

المصدر: افتراضي.

المطلوب: قم بعرض هذا الجدول بيانيا في شكل:

1- أعمدة مستطيلة.

2-دائرة نسبية.

التمرين الرابع: سحبنا عينة مكونة من 100 عائلة، وسجلنا عدد الأبناء لدى كل عائلة، ثم لخصنا النتائج في الجدول التالي:

الجدول رقم (3-3): عدد الأبناء لكل عائلة.

عدد الأبناء	0	1	2	3	4	5	6
التكرار	4	10	16	18	25	15	12

المصدر: افتراضي

المطلوب:

1- أرسم كلا من الأعمدة البسيطة (القضبان) والمدرج التكراري لهذا التوزيع التكراري.

2-حسب رأيك أيهما أحسن تمثيلا لهذا المتغير ولماذا؟

التمرين الخامس: يلخص الجدول التالي أعداد التقنيين والإداريين في ثلاث مؤسسات.

الجدول رقم (3-4): أعداد التقنيين والإداريين في ثلاث مؤسسات

المؤسسة	A	B	C
التقنيون	100	120	165
الإداريون	20	35	55

المصدر: افتراضي

المطلوب: استخدم الأعمدة المزدوجة لعرض معطيات هذا الجدول بيانيا.

أسـرة المقيـاس.

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى.

حلول سلسلة التمارين رقم 03 في مقياس الاحصاء الوصفي.

عرض المعطيات: العرض البياني.

حل التمرين الأول:

1. **تكوين توزيع تكراري لهذه البيانات، باستخدام 5 ملم كطول للفئات**: للقيام بذلك نتبع خطوات انشاء توزيع تكراري المبينة في المحاضرة والمفصلة في حلول التمرين الخامس من تمارين السلسلة رقم 02 السابقة (تمرين أجور العمال)، حيث ذكرنا أن هناك خمس خطوات هي:
   - ✓ حساب مدى البيانات.
   - ✓ تحديد عدد ملائم من الفئات (عدد الفئات = 1 + 3.33 لغ n).
   - ✓ تحديد طول الفئات، ويساوي (المدى / عدد الفئات).
   - ✓ تحديد الحدود الظاهرية (العادية) والحدود الفعلية للفئات.
   - ✓ تحديد التكرارات.

   لكن الاختلاف الوحيد هنا أن طول الفئات "محدد مسبقا" في التمرين وهو 5ملم، وهذا يجعلنا نحذف الخطوة الثالثة (تحديد طول الفئات)، ونحدد عدد الفئات بحيث يكون الطول 5 ملم، يتم ذلك بقسمة المدى على طول الفئات فيتحدد لنا عدد الفئات، لأن $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \text{طول الفئات}$.

   وبالتالي: $\text{عدد الفئات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفئات}} = \frac{(176-119)}{5} = \frac{57}{5} = 11.4 \cong 12$

   إذن عدد الفئات يساوي 12 فئة.

   بقية الخطوات تتم تماما كما شرحنا وفصّلنا لدى حلنا للتمرين الخامس من سلسلة التمارين رقم 02 المشار إليها سابقا، يمكنكم الرجوع إليه وتطبيق الأفكار المذكورة هناك على هذا التمرين، فنتحصل على الأعمدة 2 و 3 و 4 من الجدول رقم (3-5) أسفله.
2. **حساب مراكز الفئات**: مركز كل فئة = (حدها الأدنى + حدها الأعلى) تقسيم 2. أنظر المراكز في الجدول رقم (3-5) أسفله.

3. **تكوين توزيع تكراري متجمع صاعد وآخر نازل**: شرح ذلك بالتفصيل في حل التمرين الخامس من تمارين السلسلة رقم 02 السابقة (تمرين أجور العمال) وحل هذا السؤال مبين في الأعمدة 6 و 7 (للمتجمع الصاعد) و 8 و 9 (للمتجمع النازل) من الجدول رقم (3-5) أسفله.

الجدول رقم (3-5): تبويب بيانات أطوال أوراق نبات الغار. (الوحدة ملم)

رقم الفئة	الفئات (حدود ظاهرية)	الفئات (حدود فعلية)	التكرار n_i	مراكز الفئات x_i	تكرار متجمع صاعد		تكرار متجمع نازل		تكرار نسبي fi	تكرار نسبي مئوي $fi\%$
					ح. عليا فعلية	F↗	ح. دنيا فعلية	F↙		
1	123 - 119	123,5 - 118,5	1	121	أقل من 118,5	0	أكثر من 118,5	40	0.025	2.5
2	128 - 124	128,5 - 123,5	3	126	أقل من 123,5	1	أكثر من 123,5	39	0.075	7.5
3	133 - 129	133,5 - 128,5	1	131	أقل من 128,5	4	أكثر من 128,5	36	0.025	2.5
4	138 - 134	138,5 - 133,5	6	136	أقل من 133,5	5	أكثر من 133,5	35	0.150	15.0
5	143 - 139	143,5 - 138,5	**4**	141	أقل من 138,5	11	أكثر من 138,5	29	0.100	10.0
6	148 - 144	148,5 - 143,5	**9**	146	أقل من 143,5	15	أكثر من 143,5	25	0.225	22.5
7	153 - 149	153,5 - 148,5	**5**	151	أقل من 148,5	24	أكثر من 148,5	16	0.125	12.5
8	158 - 154	158,5 - 153,5	**4**	156	أقل من 153,5	29	أكثر من 153,5	11	0.100	10.0
9	163 - 159	163,5 - 158,5	**2**	161	أقل من 158,5	33	أكثر من 158,5	7	0.050	5.0
10	168 - 164	168,5 - 163,5	3	166	أقل من 163,5	35	أكثر من 163,5	5	0.075	7.5
11	173 - 169	173,5 - 168,5	1	171	أقل من 168,5	38	أكثر من 168,5	2	0.025	2.5
12	178 - 174	178,5 - 173,5	1	176	أقل من 173,5	39	أكثر من 173,5	1	0.025	2.5
	المجموع		**40**	/	أقل من 178,5	40	أكثر من 178,5	0	**1.000**	**100**

المصدر: معطيات التمرين الأول.

4. **عدد الأوراق التي يزيد طولها عن 138.5 ملم ولا يتجاوز 163.5 ملم**: هناك عدة طرائق لحساب هذا العدد:

✓ **الطريقة الأولى**: باستخدام التكرارات المطلقة، وذلك بجمع التكرارات المحصورة بين الفئات من الفئة الخامسة (138.5 – 143.5) إلى الفئة التاسعة (158.5 – 163.5).

وعليه... عدد الأوراق = 4 + 9 + 5 + 4 + 2 = **24 ورقة**.

✓ **الطريقة الثانية**: باستخدام التكرارات المتجمعة الصاعدة.

عدد الأوراق = (الأقل من 163.5 ملم) – (الأقل من 138.5 ملم).

= 35 - 11 = **24 ورقة**.

✓ **الطريقة الثالثة**: عدد الأوراق = (الأكثر من 138.5 ملم) - (الأكثر من 163.5 ملم).

= 29 - 5 = **24 ورقة**.

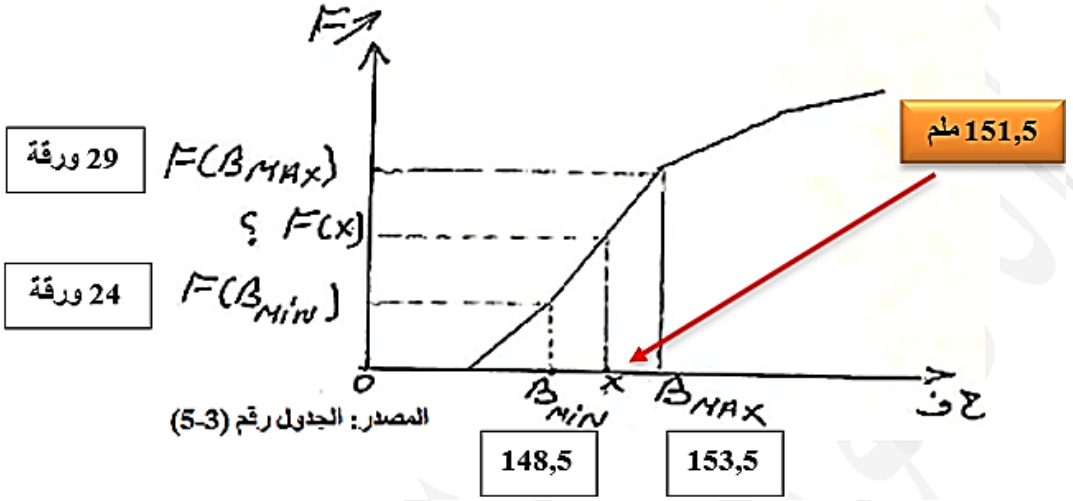
5. **عدد الأوراق التي يقل طولها عن 151.5 ملم**: أي حساب $F(151.5)$

نلاحظ أولا أن هذا الطول (151.5 ملم) لا هو حد أدنى ولا هو حد أعلى لأية فئة، بل هو قيمة داخل الفئة السابعة (148,5 - 153,5).

لذلك سنفترض أن هذه الأوراق الخمسة **موزعة بانتظام داخل هذه الفئة**، كي نطبق القاعدة الثلاثية الآتية:

$$[Bmax - Bmin] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [F(Bmax) - F(Bmin)]$$
$$[x - Bmin] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\boldsymbol{F(x)} - F(Bmin)]$$

الشكل رقم (3-1): عدد الأوراق الأقل من 151.5 سم



المصدر: الجدول رقم (3-5)

حيث:

Bmin الحد الأدنى الفعلي للفئة المعنية (السابعة) ويساوي 148.5 ملم. *F(Bmin)* التكرار المتجمع الصاعد للفئة ما قبل الفئة المعنية (أي للفئة السادسة). ويساوي 24 ورقة.

Bmax الحد الأعلى الفعلي للفئة المعنية (السابعة) ويساوي 153.5 ملم. *F(Bmax)* التكرار المتجمع الصاعد للفئة المعنية (أي للفئة السابعة) ويساوي 29 ورقة.

x الطول الذي نبحث عن عدد الأوراق الأقل منه (151.5ملم) *F(x)* التكرار المتجمع الصاعد (أي عدد الأوراق الأقل من 151.5 ملم) **وهو المطلوب**.

نطبق القاعدة الثلاثية السابقة فنحصل على القانون الآتي:

$$F(x) = F(Bmin) + \left[\left(F(Bmax) - F(Bmin)\right) \times \frac{x - Bmin}{Bmax - Bmin}\right]$$
$$= 24 + \left[(29 - 24) \times \frac{151.5 - 148.5}{153.5 - 148.5}\right] = \mathbf{27}$$

ومنه عدد الأوراق التي يقل طولها عن 151.5 ملم هو 27 ورقة.

6. تحديد الطول الذي تقع دونه أطوال الأوراق الأربع والثلاثين الأولى:

أي تحديد الطول الأكبر للأربع والثلاثين ورقة الأولى... وللقيام بذلك نعود الى تطبيق القاعدة الثلاثية السابقة نفسها اعتمادا على الشكل السابق نفسه، الفرق الوحيد أن المجهول هنا هو الطول *x* وليس العدد *F(x)*.

$$[F(Bmax) - F(Bmin)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [Bmax - Bmin]$$
$$[F(x) - F(Bmin)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [x - Bmin]$$

$$x = Bmin + \left[Bmax - Bmin \times \frac{\mathrm{F(x)} - \mathrm{F}(Bmin)}{\mathrm{F(Bmax)} - \mathrm{F(Bmin)}}\right]$$

ولتحديد قيم $Bmin$ و $Bmax$ لا بد أن نعرف الفئة التي تحوي هذا الطول المجهول x ، نستدل عليها بالرجوع الى التكرارات المتجمعة الصاعدة (العمود السابع في الجدول السابق) فنجد أن التكرار المتجمع الصاعد $F(x) = 34$ ورقة موجود بين التكرارين المتجمعين الصاعدين $F(Bmin) = 33$ ورقة و $F(Bmax) = 35$ ورقة. وهو ما يوافق الفئة التاسعة (158.5 – 163.5).

$$x = 158.5 + \left[163.5 - 158.5 \times \frac{34 - 33}{35 - 33}\right] = \mathbf{161\ mlm}$$

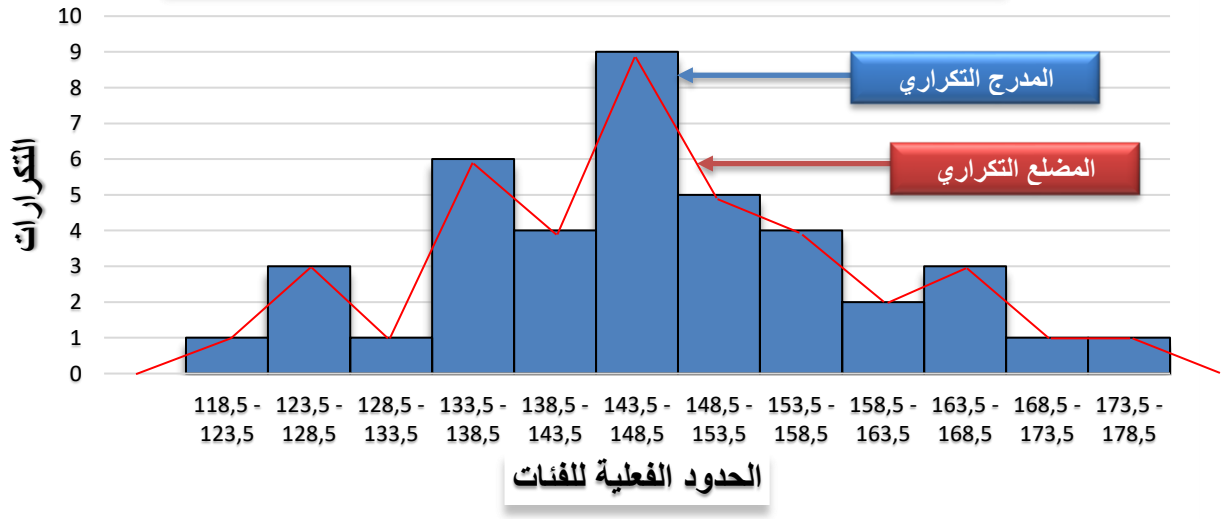
إذن الطول الذي تقع دونه أطوال الأربع والثلاثين ورقة الأولى هو 161 ملم.

7. **تكوين توزيع تكراري نسبي وتوزيع تكراري نسبي مئوي**: شرحنا ذلك بالتفصيل في حلول تمارين السلسلة رقم 02 السابقة وخاصة حل التمرين الخامس (تمرين أجور العمال) وحل هذا السؤال مبين في العمودين الأخيرين من الجدول أعلاه.

ثانيا: اعتمادا على إجاباتنا السابقة، رسم كل من:

1-المدرج التكراري والمضلع التكراري لتوزيع أطوال أوراق نبات الغار.

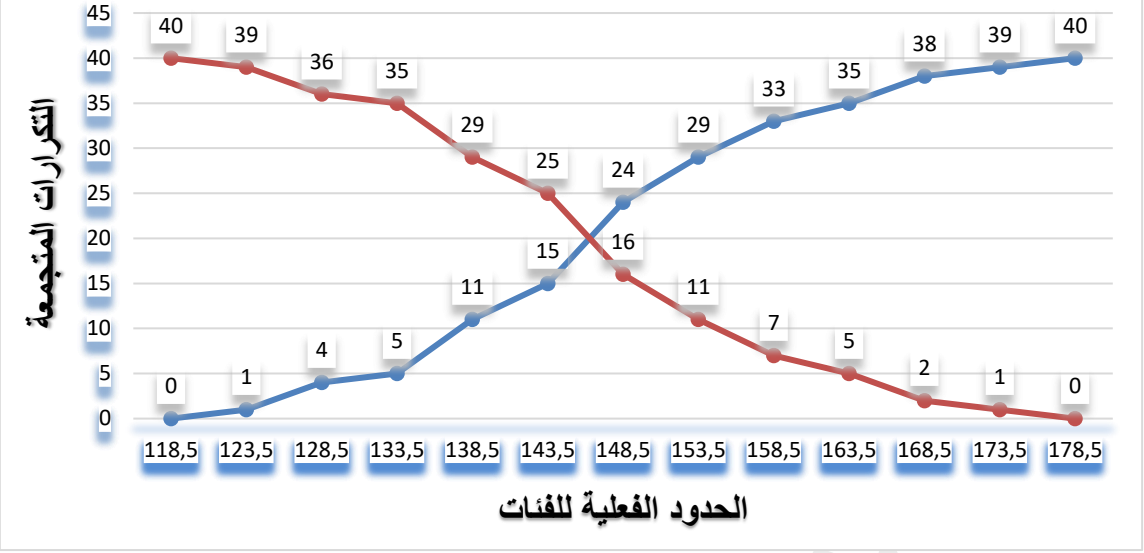
الشكل رقم (3-2): المدرج التكراري والمضلع التكراري لأطوال أوراق نبات الغار



المصدر: بيانات الجدول رقم (3-5)

2-المضلعين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل:

الشكل رقم (3-3): المضلعان التكراريان الصاعد والنازل



المصدر: الجدول رقم (3-5)

حل التمرين الثاني:

الجدول رقم (3 – 1) السابق

الفئـات	n_i
10 - 05	25
15 - 10	40
25 - 15	60
35 - 25	50
50 - 35	60
70 - 50	40
المجمـوع	**275**

المصدر: التمرين الثاني السابق.

رسم المدرج التكراري للتوزيع التكراري المبين في الجدول رقم (3 – 1) السابق:

نلاحظ أن فئات هذا التوزيع غير متساوية الطول، لذا لابد من تعديل "**تكرارات**" الفئات قبل الشروع في الرسم بما يكفل تحقيق قاعدة التناسب المبينة في المحاضرة.

وفقا لهذا القاعدة يجب أن تكون "**مساحات المستطيلات *Si* متناسبة مع التكرارات *ni***" أي: $\frac{S_1}{n_1} = \frac{S_2}{n_2} = \cdots = \frac{S_6}{n_6}$ حيث المساحة هي الطول في العرض.

فلو طبقنا هذه القاعدة على هذا التوزيع التكراري فلن تتحقق المساواة، لنجرب:

$$\frac{(5 \times 25)}{25} = \frac{(5 \times 40)}{40} \neq \frac{(10 \times 60)}{60} = \frac{(10 \times 50)}{50} \neq \frac{(15 \times 60)}{60} \neq \frac{(20 \times 40)}{40}$$

لذلك وجب تعديل "**تكرارات**" الفئات قبل الشروع في الرسم بما يكفل تحقيق قاعدة التناسب المبينة أعلاه.

للقيام بذلك يمكن ان نسلك إحدى الطريقتين الآتيتين:

- **الطريقة الأولى**: باستخراج القاسم المشترك الأكبر لأطوال الفئات. وذلك باتباع الخطوات الآتية:
  - ✓ **باستخراج القاسم المشترك الأكبر لأطوال الفئات *PGCD***: في مثالنا يساوي 5.
  - ✓ **حساب القيم a_i لكل فئة من الفئات**: وذلك بقسمة طول كل فئة على القاسم المشترك الأكبر (5).
  - ✓ **حساب التكرار الجديد (المصحح) n'_i** : والذي يساوي التكرار الأصلي n_i مقسوما على القيمة a_i لكل فئة.

يمكن نتائج هذه الخطوات في الجدول الآتي:

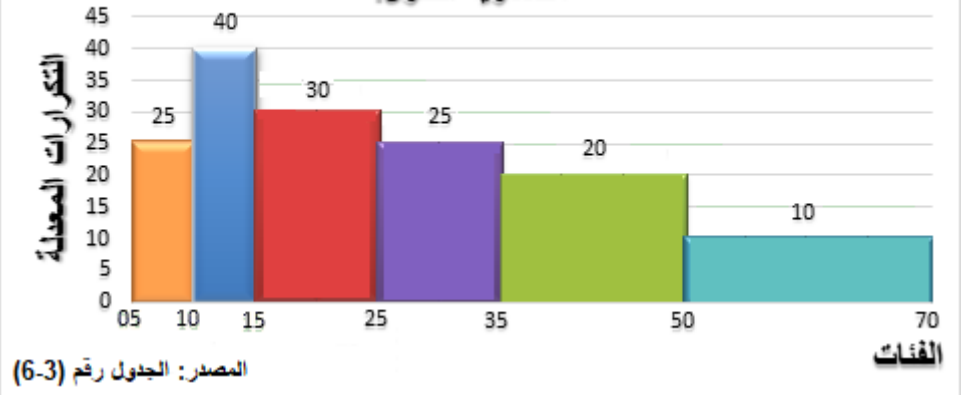
الجدول رقم (3-6): تعديل تكرارات الجدول (3 – 1) السابق.

الفئات	التكرار n_i	أطوال الفئات	القيم ai *(طول الفئة / PGCD)*	التكرار المعدل n_i' $ni'=ni/ai$
10-05	25	5	1	**25**
15-10	40	5	1	**40**
25-15	60	10	2	**30**
35-25	50	10	2	**25**
50-35	60	15	3	**20**
70-50	40	20	4	**10**
المجموع	**275**	/	/	/

المصدر: الجدول رقم (3 -1) السابق.

وعلى ذلك يكون المدرج التكراري على النحو الآتي: (أنظر الشكل رقم (3-4) أسفله) .

الشكل رقم (3-4): المدرج التكراري لتوزيع ذي فئات غير متساوية الطول.



المصدر: الجدول رقم (3-6)

لنجرب الآن مدى تحقق قاعدة التناسب في ظل المستطيلات الجديدة:

$$\frac{(5\times 25)}{25}=\frac{(5\times 40)}{40}=\frac{(10\times \mathbf{30})}{60}=\frac{(10\times \mathbf{25})}{50}=\frac{(15\times \mathbf{20})}{60}=\frac{(20\times \mathbf{10})}{40}=\mathbf{5}$$

➢ **الطريقة الثانية**: تُستخدم كبديل عن الطريقة السابقة، وتظهر أهميتها أكثر فأكثر عندما لا يكون بالإمكان استخرج القاسم المشترك الأكبر لأطوال الفئات... خطواتها بسيطة وهي اثنتان فقط:

✓ **اختيار أحد أطوال الفئات كطول مرجعي**: يُستحسن أن يكون الطولُ المختارُ هو الطول الأكثر انتشارا ويستحسن أيضا أن يكون الأصغر من بين الأطوال.

✓ **تطبيق القانون الآتي**: $\boxed{n_i'=n_i\times\frac{ls}{l_i}}$ حيث:

n_i' التكرار المعدل للفئة i — ls الطول المختار من بين أطوال الفئات.

n_i التكرار الأصلي للفئة i — l_i الطول الأصلي للفئة i

مثلا... نختار طول الفئة الأولى كطول مرجعي.. أي $ls = 5$ وبالتالي يحسب تكرارها المعدل على النحو الآتي:

$$n'_i = n_i \times \frac{ls}{l_i} = 25 \times \frac{5}{5} = 25$$

وهكذا مع بقية الفئات... ثم نرسم المدرج على أساس التكرارات الجديدة...

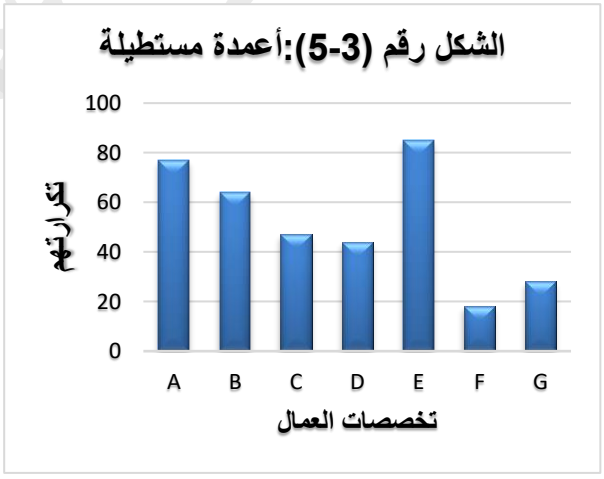
ملاحظات:

- سنحصل هنا على التكرارات المعدلة نفسِها وفق الطريقة السابقة، لأن الطول المختار في الطريقة الثانية جاء مطابقا لقيمة *PGCD* في الطريقة الأولى.
- يمكننا اختيار 10 مثلا كطول مرجعي... حيث سنحصل على تكرارات معدلة جديدة تختلف عن تلك التي حصلنا عليها عندما اخترنا 5 كطول مرجعي، لكنها تحقق لنا قاعدة التناسب ويمكن الاعتماد عليها في الرسم.

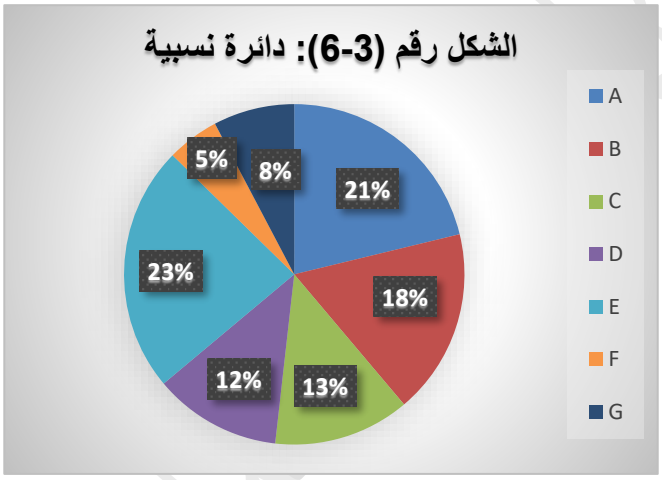
حل التمرين الثالث: عرض التوزيع التكراري لعدد العمال بيانيا في شكل:

1- أعمدة مستطيلة. أنظر الشكل رقم (3-5) أسفله.

2-دائرة نسبية. أنظر الشكل رقم (3-6) أسفله.



المصدر: الجدول رقم (2-3)



المصدر: الجدول رقم (2-3)

ملاحظة: النسب الموجودة في الدائرة النسبية ليست سوى التكرارات النسبية المئوية لهذه التخصصات، ويمكن استبدالها بالتكرارات المطلقة *ni*. ولرسم حصة كل تخصص على الدائرة النسبية لا بد من تحديد الزاوية التي تمثله، يكون هذا بالاعتماد على القاعدة الثلاثية، مثلا التخصص *A* كالآتي:

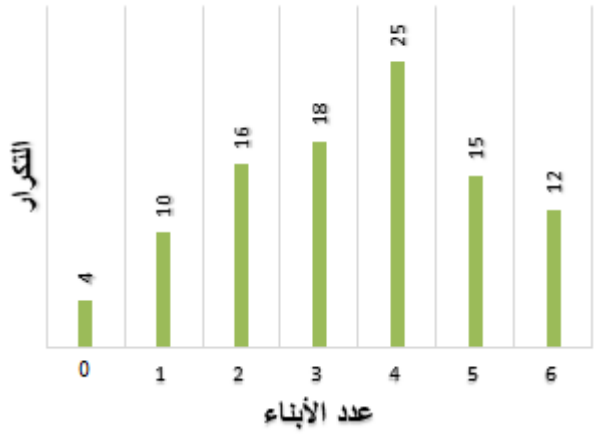
$$\begin{cases} 360^o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sum n_i = 363 \\ x^o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 77 \end{cases}$$

$$x^o = \frac{77 \times 360}{363} = 0.2121 \times 360 = 76.36^o$$

حل التمرين الرابع:

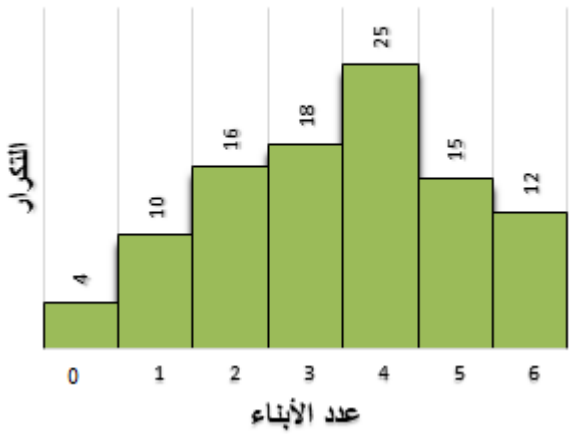
1. رسم كل من الأعمدة البسيطة (القضبان) والمدرج التكراري لهذا التوزيع التكراري.

الشكل رقم (3-7): الأعمدة البسيطة



المصدر: الجدول رقم (3-3)

الشكل رقم (3-8): المدرج التكراري



المصدر: الجدول رقم (3-3)

2. يعتبر التمثيل البياني بالأعمدة البسيطة هو الأنسب نظر لكون المتغير كمي متقطع، والاعمدة البسيطة تجسد الطبيعة المتقطعة للمتغير، عكس المدرج التكراري الذي يصلح لتمثيل المتغير المستمر.

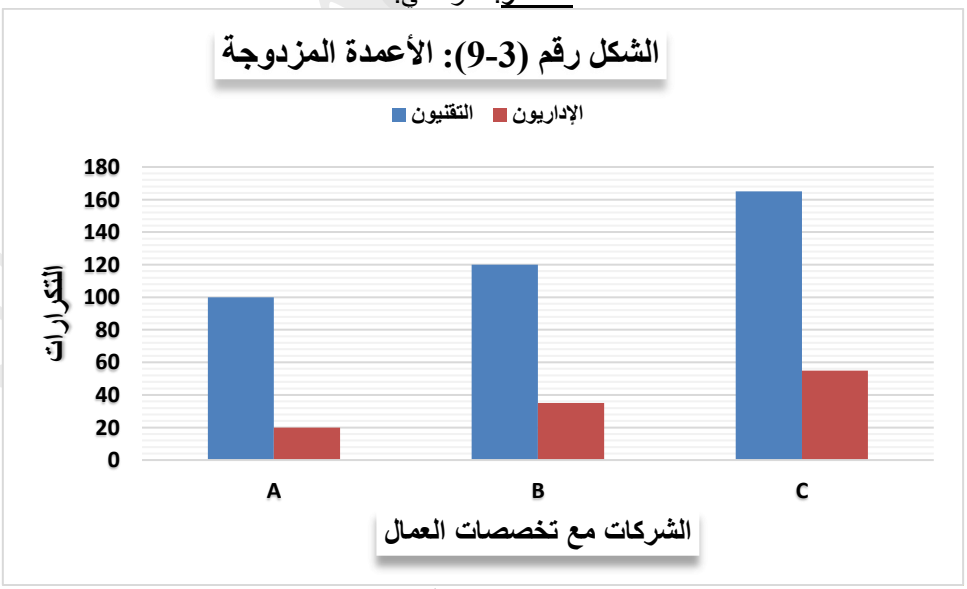
حل التمرين الخامس: استخدم الأعمدة المزدوجة لعرض معطيات التقنيين والإداريين بيانيا.

الجدول رقم (3-4) السابق

المؤسسة	A	B	C
التقنيون	100	120	165
الإداريون	20	35	55

المصدر: افتراضي.

الشكل رقم (3-9): الأعمدة المزدوجة



المصدر: الجدول رقم (3-4)

انتهى حل سلسلة التمارين رقم 03 في مقياس الإحصاء الوصفي.

أستاذ المقياس الدكتور الهاشمي عبابسة.
h.ababsa@univ-biskra.dz