الفصل الرابع

النطبيفات الخطية *Linear applications*

فهرس الفصل

1.4 التطبيقات الخطية *Linear applications*

التطبيقات الخطية تمثل مفهوما أساسيا في الرياضيات والفيزياء وعلوم الحاسوب والهندسة. تعني التطبيقات الخطية استخدام الخواص الرياضية للتطبيقات والدوال الخطية.

1.1.4 تعاريف Definitions

لقد واجهنا سابقا مفهوم التطبيق الخطي في التطبيق $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ سوف نعمم هذه الفكرة على جميع الفضاءات الشعاعية.

We have previously encountered the concept of a linear application in the application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ We will generalize this idea to all vector spaces.

1.1.4 : Definition - تعريف

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$. نقول أن التطبيق f من E نحو F هو تطبيق خطي إذا كان يحقق الشرطين التاليين:

Let E and F be two vector spaces over the field $\mathbb{K}$. We say that the mapping f from E to F is a linear application if it satisfies the following two conditions:

1) من أجل كل $u, v \in E$ لدينا

For all $u, v \in E$ we have

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

2) من أجل كل $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا

For all $u \in E$ and $\lambda \in \mathbb{K}$ we have

$$f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$$

1.1.4 : Example - مثال

التطبيق f المعرف

Application f defined as

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

هو تطبيق خطي. يمكن اثبات ذلك، لدينا $u = (x, y, z)$ و $v = (x', y', z')$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$ و λ و عدد حقيقي حيث:

It is a linear application. It can be proven that we have $u = (x, y, z)$ and $v = (x', y', z')$ two *elements of $\mathbb{R}^3$ and λ is a real numbers where:*

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ &= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

and و

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ &= \lambda\cdot(-2x, y+3z) \\ &= \lambda\cdot f(u) \end{aligned}$$

Properties خواص

1.1.4 : Proposition - قضيـة

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F فإن:

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$. If f is a linear application from E to F, then:

- $f(0_E) = 0_F$
- $\forall u \in E: \; f(-u) = -f(u)$

لدينا الخواص التالية أيضا:

We also have the following properties:

2.1.4 : Proposition - قضيـة

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F فإن:

Let E and F be two vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f the application from E to F then:

التطبيق f خطي إذا وفقط إذا كان من أجل كل u و v من E ومن أجل كل سلمي λ و μ من $\mathbb{K}$،

The application f is linear if and only if for every u and v of E and for every scalars λ and μ of $\mathbb{K}$,

$$\boxed{f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v).}$$

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$

2.1.4 : Definition - تعريف

- نقول أن التطبيق الخطي المعرف من E نحو F أنه أيضا إزومورفيزم أو أومومورفيزم للفضاء الشعاعي.
We say that the defined linear application of E to F is also an isomorphism or omomorphism of the vector space.

- مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$.
The set of linear applications of E in F is denoted by $\mathcal{L}(E,F)$.

- نسمي التطبيق الخطي المعرف من E نحو E بأندو مورفيزم (تشاكل ذاتي) مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E)$.
We call the linear application defined from E to E an endomorphism. The set of linear applications defined from E to E is denoted by the symbol $\mathcal{L}(E)$.

2.1.4 رتبة تطبيق خطي Linear application range

لتكن E و F فضائين شعاعيين منتهيا البعد n على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و f أميومورفيزم من E نحو F، فإن رتبة التطبيق الخطي f هي بعد الصورة $Im(f)$. فإذا كان $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي E، فإن $\beta=\{f(v_1),f(v_2),...,f(v_n)\}$ تولد صورة هذا التطبيق، وتكون رتبة التطبيق هي $m\leq n$ أكبر عدد للأشعة المستقلة خطيا من المجموعة β و نكتب:

Let E and F be vector spaces with finite dimension n defined on a commutative field $\mathbb{K}$ and f is an homeomorphism from E to F, then the range of the linear application f is the dimension of $Im(f)$. If $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ is a basis for the vector space E, then $\beta=\{f(v_1),f(v_2),...,f(v_n)\}$ generates the image of this application, and the range of the application is $m\leq n$ is the largest number of linearly independent rays from the set β, and we write:

$$rang\,(f) = \dim\,(Im\,(f)) = m$$

وإذا كانت رتبة التطبيق مساوية لـ n، فإن بعد نواته صفر، ومن ثم فإن التطبيق الخطي تقابلي.

If the range of the application is equal to n, then its kernel dimension is zero, and therefore the linear application is bijective.

3.1.4 الصورة والنواة Image and kernel

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F. لتكن A مجموعة جزئية من E.

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f an application from E to F. Let A be a subset of E.

جميع الصور بواسطة f لعناصر المجموعة A هي صورة مباشرة للمجموعة A نرمز لها بالرمز $f(A)$. وهي مجموعة جزئية من F. المعرفة:

All images by f of the elements of the set A are direct images of the set A which we denote by $f(A)$. It is a subset of F. defined as:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

إذا كان $f : E \to F$ تطبيق خطي فإن $f(E)$ تسمى صورة التطبيق الخطي ونرمز لها بالرمز: $Im(f)$.

If $f : E \to F$ is a linear application, then $f(E)$ is called the linear application image and we denote it with: $Im(f)$.

3.1.4 : Proposition - قضية

1) إذا كانت E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.
If E' is a vector subspace of E then $f(E')$ is a vector subspace of F.

2) بصفة خاصة $Im(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.

In particular $Im(f)$ is a sub-vector space of F.

1.1.4 : Remark - ملاحظة

لدينا من خلال تعريف الصورة المباشرة $f(E)$: يكون f غامر إذا وفقط إذا $Im(f) = F$.

We have from definition of the direct image $f(E)$: the function f is surjective if and only if $Im(f) = F$.

3.1.4 : Definition - تعريف

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F.

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f a linear application from E to F.

نرمز لنواة التطبيق f بالرمز $Ker(f)$ مجموعة العناصر من E التي صورها من 0_F :

We denote the application kernel of f by $Ker(f)$: the set of elements of E whose images are represented by 0_F:

$$\boxed{Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

بمعنى آخر ، النواة هي الصورة العكسية للشعاع الصفري لفضاء الوصول:

In other words, the kernel is the inverse image of the zero ray of the arrival space:

$$Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}.$$

4.1.4 : Proposition - قضية

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. فإن نواة التطبيق f هي فضاء شعاعي جزئي من E.

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f a linear application from E to F. Then the kernel of application f is a sub-vector space of E.

2.1.4 : Example - مثال

Let f be the linear application defined by   ليكن f التطبيق الخطي المعرف

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

- ***Calculating the kernel*** $Ker(f)$***:*** *Let*   **حساب النواة** $Ker(f)$: ليكن

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff (-2x, y+3z) = (0,0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x &=& 0 \\ y+3z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff (x,y,z) = (0,-3z,z), \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

then   ومنه

$$Ker(f) = \big\{(0,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\big\} = Vect\big\{(0,-3,1)\big\}.$$

بصيغة أخرى $Ker(f)$ تشكل مستقيم شعاع توجيهه $(0,-3,1)$.

In other words, $Ker(f)$ it forms a straight line whose direction is $(0,-3,1)$.

- ***Calculating the image of f.*** *We take* $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ **حساب صورة** f. نأخذ

$$\begin{aligned} (x',y') = f(x,y,z) &\iff (-2x, y+3z) = (x',y') \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x &=& x' \\ y+3z &=& y' \end{array} \right. \end{aligned}$$

We can take an example   نستطيع أخذ المثال

$$x = -\frac{x'}{2}, y' = y, z = 0.$$

Conclusion: الخلاصة:

$$\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f\big(-\frac{x'}{2}, y', 0\big) = (x',y')$$

ومنه $Im(f) = \mathbb{R}^2$ و هذا مايثبت أن التطبيق f غامر.

Then $Im(f) = \mathbb{R}^2$, which proves that the application f is surjective.

3.1.4 : Example - مثال

لتكن $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. وليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ المعرف كما يلي $f(X) = AX$. ومنه :

Let $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ and let the linear application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ defined as $f(X) = AX$. Then:

$$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0\}$$

وبالتالي فإن $X \in \mathbb{R}^p$ هي مجموعة الحلول للجملة الخطية المتجانسة $AX = 0$.

Thus $X \in \mathbb{R}^p$ is the set of solutions of the homogeneous linear system $AX = 0$.

سوف نرى في المحور القادم أن $Im(f)$ هي الفضاء الشعاعي المولد من أعمدة المصفوفة A.

We will see in the next chapter that $Im(f)$ is the vector space generated from the columns of the matrix A.

5.1.4 : Proposition - قضية

ليكن E و F فضاءان شعاعيان و f تطبيق خطي من E نحو F. يكون التطبيق f :

Let E and F be two vector spaces and f a linear application from E to F. The application f is:

- غامرا إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Im}(f) = F$،
- متباينا إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Surjective if and only if $\mathrm{Im}(f) = F$,

Injective if and only if $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

1.1.4 : Corollary - نتيجة

ليكن E و F فضاءان شعاعيان ذو بعد منته و f تطبيق خطي من E نحو F.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces and f be a linear application defined from E to F.

- إذا كان f غامر فإن

If f is surjective then

$$\dim(E) \geqslant \dim(F).$$

• إذا كان f متباين فإن

If f is injective then

$$\dim(E) \leqslant \dim(F).$$

• إذا كان f تقابلي فإن

If f is bijective then

$$\dim(E) = \dim(F).$$

وبالتالي فإن البعد هو شرط قوي على طبيعة التطبيقات الخطية. يمكننا أيضا رؤية هذا الشرط على النحو التالي.

Thus dimension is a strong requirement on the nature of linear applications. We can also see this condition as follows.

نظرية - Theorem : 1.1.4

ليكن E و F فضاءان شعاعيان ذو بعد منته و f تطبيق خطي من E نحو F.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces and f be a linear application of E to F.

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)\ .$$

2.4 الشكل المصفوفي *Matrix form*

ليكن E و F فضائين شعاعيين ذوات البعد المنته، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن p بعد الفضاء من E و $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساس لـ E. ليكن n بعد الفضاء F و $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ أساس لـ F. و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces on the field $\mathbb{K}$ and let p be the dimension of the space of E and $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ is a basis for E. Let n be the dimension of the space F and $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ be the basis of F. Let $f : E \to F$ be a linear application.

تسمح لنا خصائص التطبيقات الخطية بين فضائين ذات أبعاد منتهية أن نذكر ما يلي:

The properties of linear applications between two spaces of finite dimensions allow us to state the following:

- **يتم تحديد التطبيق الخطية f بشكل فريد من خلال صورة الأساس E ، ومن ثم بواسطة الأشعة** $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

The linear application f is uniquely determined by the basis image of E, and hence by the rays $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

- **من أجل كل** $j \in \{1, \dots, p\}$، $f(e_j)$ **هو شعاع من F مكتوب بشكل فريد كمزج خطي في أشعة الأساس** $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ **من F. و منه يوجد عدد n من السلميات الوحيدة** $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ **(وقد يرمز لها ايضا** $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$**) حيث:**

For each $j \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_j)$ is a vector from F uniquely written as a linear mixture in the basis rays $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ from F. Then, there are n single scalers $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ (which may also be denoted as $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$) where:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{nj}f_n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

وبالتالي، فإن التطبيق الخطي f يتم تحديده بالكامل بواسطة المعاملات $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$. **لذلك من الطبيعي إعطاء التعريف التالي:**

Thus, the linear application f is entirely determined by the coefficients $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$. So it is natural to give the following definition:

4.2.4 : Definition - تعريف

مصفوفة التطبيق الخطية f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ حيث يتكون العمود j من إحداثيات الشعاع $f(e_j)$ في الأساس $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

The matrix of the linear application f with respect to the basis $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$ is the matrix $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ where the column j consists primarily of the coordinates of the ray $f(e_j)$ in the basic $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

$$
\begin{array}{c@{}c}
 & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\
a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

بعبارات أبسط: مصفوفة تطبيق خطي هي المصفوفة التي أعمدتها هي صورة f لأشعة أساس فضاء البدء $\mathcal{B}$ ، معبرا عنها في أشعة أساس فضاء الوصول $\mathcal{B}'$. نرمز لهته المصفوفة بالرمز $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

In simpler terms: a linear application matrix is a matrix whose columns are an image f of the basis rays of the start space $\mathcal{B}$, expressed in basis rays of the arrival space $\mathcal{B}'$. We denote this matrix by $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

2.2.4 : Remark - ملاحظة

- مرتبة المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ يتعلق فقط ببعد الفضاء E وبعد الفضاء F.

The range of the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ relates only to the dimension of space E and the dimension of space F.

- من ناحية أخرى ، تعتمد معاملات المصفوفة على اختيار الأساس $\mathcal{B}$ من E وإلى الأساس $\mathcal{B}'$ من F.

On the other hand, the matrix coefficients depend on the choice of basis $\mathcal{B}$ from E and to basis $\mathcal{B}'$ from F.

4.2.4 : Example - مثال

ليكن f التطبيق الخطي مالمعرف من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ كما يلي:

Let f be the linear application of $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ defined as follows:

$$
\begin{array}{rcl}
f: \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
(x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 - x_2 - 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)
\end{array}
$$

من المستحسن تحديد أشعة الأسطر وأشعة الأعمدة، وبالتالي يمكن اعتبار f بمثابة التطبيق

It is desirable to specify line rays and column rays, and thus f can be considered as the application

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

لكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$. أي :

Let $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ be the canonical basis for $\mathbb{R}^3$ and $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ the canonical basis for $\mathbb{R}^2$. So :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$

Finding the linear application matrix f in the basis $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$

We have — A) لدينا

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2,$$

It is the first column in the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ وهو أول عمود في المصفوفة

and — B) و

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 2) = -f_1 + 2f_2,$$

the second column in the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ثاني عمود في المصفوفة

And finally — C) و أخيرا

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-2, 3) = -2f_1 + 3f_2$$

the third and last column in the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ثالث وآخر عمود في المصفوفة

therefore: — و بالتالي:

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) سنقوم الآن بتغيير أساس فضاء البدأ و أساس فضاء الوصول بأساس جديد لكل من الفضائين، حسب مايلي:

We will now change the basis of the start space and the basis of the arrival space with a new basis for each of the two spaces, according to the following:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نقوم الآن بحساب مصفوفة التطبيق الخطي الجديدة أي في الأساس $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ من $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ من $\mathbb{R}^2$

Now, we calculate the matrix of the new linear transformation with basis $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ From $\mathbb{R}^3$ and $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ from $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1) &= f(1,1,0) = (0,3) = -3\phi_2, \\ f(\epsilon_2) &= f(1,0,1) = (-1,4) = -\phi_1 - 5\phi_2, \\ f(\epsilon_3) &= f(0,1,1) = (-3,5) = -3\phi_1 + 2\phi_2, \end{aligned}$$

then و منه

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

هذا المثال يوضح حقيقة أن مصفوفة التطبيق الخطي تعتمد فعلا على اختيار الأساسات.

This example illustrates the fact that the linear application matrix actually depends on the choice of basis.

5.2.4 : Example - مثال

Let the application defined from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$: ليكن التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$:

$$f \ : (x,y) \longmapsto (x+y, \ 2x+3y, \ x-y) \ .$$

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ هو $((1,0),(0,1))$. صورة هذه الأشعة هي

The canonical basis of $\mathbb{R}^2$ is $((1,0),(0,1))$. The image of this x-ray is:

$$f((1,0)) = (1,2,1) \text{ and } f((0,1)) = (1,3,-1).$$

ومنه مصفوفة التطبيق f هي

Hence the application matrix of f is

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

لنأخذ أساس آخر للفضاء $\mathbb{R}^2$ الأشعة $((1,1),(1,-1))$ من فضاء البدء و أساس لـ $\mathbb{R}^3$ الأشعة $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ عند فضاء الوصول. ومنه صورة أشعة أساس فضاء لبدء هي

Let's consider another basis for the space $\mathbb{R}^2$: rays $((1,1),(1,-1))$ from the starting space and a basis for $\mathbb{R}^3$: rays $((1),0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ from the destination space. The image of the basis rays in the starting space is.

$$\begin{aligned} f((1,1)) &= (2,5,0) = -3(1,0,0) + 5(1,1,0) + 0(1,1,1) \\ f((1,-1)) &= (0,-1,2) = 1(1,0,0) - 3(1,1,0) + 2(1,1,1) \end{aligned}$$

ومنه المصفوفة هي:

then the matrix is:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.4 : Remark - ملاحظة

عندما يكون فضاء الوصول وفضاء البدء هي نفسها (التطبيق عبارة عن أندومورفيزم)، نختار نفس الأساس عند البدء و الوصول. تحتوي مصفوفة التشاكل الذاتي حينها على نفس عدد الأسطر و الأعمدة: وتكون المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي مربعة.

When the destination space and the starting space are the same (the transformation is an endomorphism), we choose the same basis for both the start and the destination. The resulting matrix of the self-mapping then has the same number of rows and columns, making the matrix of the linear transformation square.

3.4 تغيير الأسس *Change of basis*

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته وليكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساس لـ E. من أجل كل $x \in E$ يوجد p-مضاعفة $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ وحيدة من $\mathbb{K}$ حيث:

Let E be a finite-dimensional vector space and let $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ be the basis of E. For every $x \in E$ there exists a unique p-multiple $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ of $\mathbb{K}$ where:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p.$$

مصفوفة إحداثيات x هو شعاع عمود ، يرمز له بالرمز:

The coordinate matrix x is a column vector, denoted by:

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

في المجموعة $\mathbb{R}^p$ إذا كان $\mathcal{B}$ هو الأساس القانوني فنكتب الشعاع على هذا الشكل البسيط

In the set $\mathbb{R}^p$, if $\mathcal{B}$ is the canonical basis, then we write the vector in this simple form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

without showing the basis.

دون اظهار الأساس.

ليكن E و F فضائين شعاعيين منتهيا البعد، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي. ولتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}'$ أساس لـ F.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces, on the field $\mathbb{K}$ Let $f : E \to F$ be a linear application. Let $\mathcal{B}$ be the basis of E and $\mathcal{B}'$ be the basis of F.

6.3.4 : Proposition - قضية

- لتكن $A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Let $A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

For every $x \in E$ we set

- من أجل كل $x \in E$ نضع

$$X = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

For every $y \in F$ we set

- من أجل كل $y \in F$ نضع

$$Y = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Hence, if we have $y = f(x)$, it can be written

ومنه إذا كان لدينا $y = f(x)$ فإنه يمكن كتابة

$$\boxed{Y = AX}$$

In other words:

بصفة أخرى :

$$\boxed{\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

6.3.4 : Example - مثال

ليكن E فضاء شعاعي ذو البعد المنته 3، على الحقل $\mathbb{R}$ و $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E. وليكن التماثل الذاتي (الأندومورفيزم) f من E حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$ هي:

Let E be a vector space with finite dimension 3, on the field $\mathbb{R}$ and $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ is a basis for E. Let the endomorphism f of E, where its matrix in basis $\mathcal{B}$ is:

$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

نقترح أولا تحديد نواة وصورة f. نعلم أن كل العناصر x من E هي مزج خطي لـ (e_1, e_2, e_3)

We first propose to define a kernel and an image f. We know that all elements x of E are linear mixtures of (e_1, e_2, e_3)

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

we have . لدينا

$$x \in \boldsymbol{Ker}(f) \iff f(x) = 0_E \iff \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

After solving the system we find: بعد حل الجملة نجد:

$$\boldsymbol{Ker}(f) = \left\{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ and } x_2 + x_3 = 0\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \boldsymbol{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right)$$

لذلك فإن النواة لها البعد 1. و باستعمال نظرية النواة والصورة نجد بعد $\boldsymbol{Im}(f)$ هو 2. نأخذ أول شعاعين في المصفوفة A مستقلين خطيا لتوليد الفضاء $\boldsymbol{Im}(f)$:

Therefore the kernel has dimension 1. Using kernel and image theory, we find that the dimension of $\boldsymbol{Im}(f)$ *is 2. We take the first two vectors in the matrix A to be linearly independent to generate the space* $\boldsymbol{Im}(f)$*:*

$$\boldsymbol{Im}(f) = \boldsymbol{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right).$$

1.3.4 مصفوفة العبور Transit matrix

لنفرض أن E فضاء شعاعي ذو بعد منته n. حسب ما سبق نعلم أن جميع أساسات الفضاء E تحتوي على n عنصر.

Let E be a vector space with finite dimension n. According to the above, we know that all basis of the space E contain n elements.

5.3.4 : Definition - تعريف

لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}'$ أساس آخر لـ E.

Let $\mathcal{B}$ be the basis of E and $\mathcal{B}'$ be another basis for E.

نسمي مصفوفة عبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ المصفوفة المربعة ذات الرتبة $n \times n$ حيث العمود j مشكلا من الشعاع j للأساس $\mathcal{B}'$، بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

We call the transit matrix from the basis $\mathcal{B}$ to the basis $\mathcal{B}'$ denoted by $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ The square matrix of rank $n \times n$ where the column j formed by the vector j of the basis $\mathcal{B}'$, with respect to the basis $\mathcal{B}$.

و قد نرمز أحيانا للمصفوفة $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ بالرمز $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

We may sometimes denote the matrix $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ by $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

7.3.4 : Example - مثال

Let the real vector space $\mathbb{R}^2$ and let — لتكن الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^2$. ولتكن

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

نعتبر الأساس $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ و الأساس $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

We consider the basis $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ and the basis $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

Finding the transit matrix from basis $\mathcal{B}$ to basis $\mathcal{B}'$.

يجب أن نعبر عن ϵ_1 و ϵ_2 بدلالة (e_1, e_2). نجد:

We must express ϵ_1 and ϵ_2 in terms of (e_1, e_2). We find:

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

The transit matrix is then: مصفوفة العبور هي إذن :

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

يمكن أن نعتبر مصفوفة العبور على أنها المصفوفة المرافقة للتطبق الخطي المحايد $\mathbf{I}_E$ المعرف على E.

We can regard the transit matrix as the associate matrix of the neutral linear application $\mathbf{I}_E$ defined on E.

7.3.4 : Proposition - قضية

مصفوفة العبور $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق المحايد $\boldsymbol{I}_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ حيث E هي فضاء المبدأ المزود بالأساس $\mathcal{B}'$، و E فضاء الوصول المزود بالأساس $\mathcal{B}$:

Transit matrix $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ from basis $\mathcal{B}$ to basis $\mathcal{B}'$ is the associate matrix of a natural linear application $\boldsymbol{I}_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ where E is the starting space provided by the basis $\mathcal{B}'$, and E is the destination space provided by the basis $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\boldsymbol{I}_E)}$$

لكن لو عكسنا وضعية الأساسات سوف نجد مايلي:

8.3.4 : Proposition - قضية

1) مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ عكوسة ومقلوبها هو مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}'$ إلى الأساس $\mathcal{B}$:

Transit matrix from basis $\mathcal{B}$ to basis $\mathcal{B}'$ its invertible and its inverse is the transit matrix from the basis $\mathcal{B}'$ to the basis $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$$

2) إذ كان $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ ثلاث أساسات فإن *If $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ and $\mathcal{B}''$ are three basis, then*

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$$

8.3.4 : Example - مثال

ليكن $E=\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}$ ولنعرف

Let $E=\mathbb{R}^3$ be provided with the canonical basis $\mathcal{B}$ and we define

$$\mathcal{B}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right)\quad and \quad \mathcal{B}_2=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$.

Finding the transit matrix from basis $\mathcal{B}_1$ to basis $\mathcal{B}_2$.

We have: لدينا:

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad and \quad \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

The previous proposition is equivalent to: القضية السابقة تكافئ:

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}=\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\times\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$

then we find ومنه نجد .

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}=\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\times\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$$

After calculating the inverse of $\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ we find: بعد حساب المقلوب $\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ نجد :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}&=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

سنقوم الآن بدراسة تأثير تغيير الأسس على مُركبات الأشعة.

We will now study the effect of changing bases on ray compounds

- **ليكن** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ **و** $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ **أساسين لنفس الفضاء الشعاعي** E.

Let $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ and $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ be two basis of the same vector space E.

- **ليكن** $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ **مصفوفة العبور من الأساس** $\mathcal{B}$ **إلى الأساس** $\mathcal{B}'$.

Let $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ be the transit matrix from the basis $\mathcal{B}$ to the basis $\mathcal{B}'$.

- **من أجل** $x \in E$ **فإنه يمكن كتابته كجملة خطية من الشكل** $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **في الأساس** $\mathcal{B}$ **و نكتب:**

For $x \in E$ it can be written as a linear system of the form $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ in the base $\mathcal{B}$ and we write:

$$X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

.

- **نفس العنصر** $x \in E$ **يمكن كتابته أيضا كجملة خطية من الشكل** $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ **في الأساس** $\mathcal{B}'$ **و نكتب :**

The same element $x \in E$ can also be written as a linear system of the form $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ in the base $\mathcal{B}'$ and we write:

$$X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

.

9.3.4 : Proposition - قضيـة

$$\boxed{X = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot X'}$$

2.3.4 صيغة تغيير الأساس Base change formula

- ليكن $f : E \to E$ تطبيق خطي. $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ أساسين لـ E و $P = \textbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

Let $f : E \to E$ be a linear application. $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$ are two basis of E and $P = \textbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ the transit matrix from the basis $\mathcal{B}$ to the base $\mathcal{B}'$.

- لتكن $A = \textbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $B = \textbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}'$.

Let $A = \textbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ be the matrix of the linear application f in the basis $\mathcal{B}$ and $B = \textbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ the matrix of f in the basis $\mathcal{B}'$.

نظرية تغيير الأساس تكون كالآتي:

The basis change theory is as follows:

2.3.4 : Theorem - نظرية

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

in general for every $n \geq 1$ — و بصفة عامة من أجل كل $n \geq 1$

$$\boxed{B^n = P^{-1}A^nP}$$

9.3.4 : Example - مثال

Let given the following bases of $\mathbb{R}^3$*:* — ليكن الأساسان التاليان من $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{and} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

و ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}_1$ هي :

Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear application whose matrix in the base $\mathcal{B}_1$ is:

$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

إيجاد مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}_2$، $B = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$:

Finding a matrix of f in the basis $\mathcal{B}_2$, $B = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$:

- بحساب مصفوفة العبور سابقا من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$ فوجدنا

By previously calculating the transit matrix from the basis $\mathcal{B}_1$ to the basis $\mathcal{B}_2$, we find

$$P = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- نحسب

we calculate

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- نطبق صيغة تغيير الأساسات من النظرية السابقة نجد :

Applying the basis change formula from the previous theorem we find:

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

غالبا ما يكون من مصلحة التغييرات في الأساسات أن يتم اختزالها إلى مصفوفة أبسط (مصفوفة قطرية أو مثلثية علوية أو سفلية). على سبيل المثال هنا، من السهل حساب قوة المصفوفة B^k لإستنتاج A^k منها.

It is often in the interest of changes in foundations to be reduced to a simpler matrix (an upper or lower diagonal or triangular matrix). For example here, it is easy to calculate the power of the matrix B^k to deduce A^k from it.

4.4 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 4*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

حدد إذا كانت التطبيقات التالية عبارة عن تطبيقات خطية أم لا:

Determine whether the following applications are linear applications or not:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x+y,\ \ x-2y,0) \quad (1$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x+y,\ \ x-2y,1) \quad (2$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2-y^2 \quad (3$$

Solution : الحـــل

1) ليكن f تطبيق خطي. نأخذ $u=(x,y)$ و $v=(x',y')$ في $\mathbb{R}^2$، و $\lambda\in\mathbb{R}$. ومنه

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \big((x+x')+(y+y'),(x+x')-2(y+y'),0\big)\\ &= \big(x+y,x-2y,0\big)+(x'+y',x'-2y',0\big)\\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

كذلك،

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x+\lambda y,\lambda x-2\lambda y,0)\\ &= \lambda(x+y,x-2y,0)\\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

2) f : ليست تطبيق خطي لأن $f\big((0,0)\big)\neq(0,0,0)$

3) f ليست تطبيق خطي لأن،

$$f\big((1,0)\big)=1,\ f\big((-1,0)\big)=1 \quad \text{و} \quad f\big((0,0)\big)=0\neq f\big((1,0)\big)+f\big((-1,0)\big).$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

Let the linear application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ *be defined* :ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعرف

$$f(x,y)=(x+y,x-y,x+y).$$

أوجد نواة التطبق الخطي f، و صورته. و هل هو متباين؟ غامر؟

Find the kernel of the linear application f, and its image. And is it injective? surjective?

Solution : الحــل

1) إيجاد نواة التطبيق الخطي f .

$$Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0, 0, 0)\}.$$

هذا يكافئ:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x-y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن $Ker(f) = (0, 0)$.

2) بما أن $Ker(f) = (0, 0)$، حسب النظرية فإن f متباين.

3) إيجاد صورة التطبيق الخطي f. ليكن (u, v, w) شعاع من $\mathbb{R}^3$. نقول أن (u, v, w) من مجموعة صور التطبق الخطي f إذا وفقط إذا كان:

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (u, v, w) = f(x, y) \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \\ w &= x+y \end{cases}$$

$$\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ u+v &= 2x \\ w-u &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} &= y \\ \frac{u+v}{2} &= x \\ w-u &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن

$$Im(f) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3;\ u - w = 0\}.$$

بصفة خاصة، $(1, 1, 0)$ لا ينتمي للمجموعة $Im(f)$، ومنه f ليس غامر.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

Let the linear application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ be defined ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ المعرف:

$$f(x, y, z) = (x + z, \quad y - x, \quad z + y, \quad x + y + 2z).$$

Find a basis for $Im(f)$. 1) أوجد أساسا لـ $Im(f)$.

Find a basis for $Ker(f)$. 2) أوجد أساسا لـ $Ker(f)$.

Is f injective? Surjective? Bijective? 3) هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

Solution : الحــل

1) نستعمل تعريف التطبيق الخطي f نجد:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, -1, 0, 1) \\ f(e_2) &= (0, 1, 1, 1) \\ f(e_3) &= (1, 0, 1, 2) \end{aligned}$$

يمكن أن نلاحظ أن:

$$f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$$

أي أن الأشعة $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ مرتبطة خطيا، كما نعلم أن الأشعة $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ مولدة لـ $Im(f)$ ومنه $Im(f)$ مولدة من $\{f(e_1), f(e_2)\}$ وهي تكون أساس لها.

2) لدينا

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x + z &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \\ z &= z \end{cases}$$

نستنتج أن الشعاع $(-1,-1,1)$ يولد $Ker(f)$ نظراً لأنه غير معدوم، فهو أساس $Ker(f)$ ومنه

$$\dim(Ker(f)) = 1.$$

3) حسب نظرية النواة والصورة فإن التطبيق f ليس غامر لأن النواة ذات البعد 1 في حين بعد $Im(f)$ لا يساوي 3 لأن

$$Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2)\} \Longrightarrow \dim(Im(f)) = 2.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

حدد ما إذا كان التطبيق f_i خطيا أم لا :

Determine whether the application f_i is linear or not:

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 &\quad f_1(x,y) = (2x+y, x-y)\\
f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 &\quad f_2(x,y,z) = (xy, x, y)\\
f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 &\quad f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)\\
f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 &\quad f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)\\
f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 &\quad f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big)
\end{aligned}$$

Solution : الحــل

1) f_1 تطبيق خطي. ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ و $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big)\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big)\\
&= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big)\\
&= \big(2x+y, x-y\big) + \big(2x'+y', x'-y'\big)\\
&= f_1(x,y) + f_1(x',y')
\end{aligned}$$

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ و $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x+\lambda y, \lambda x-\lambda y\big) = \lambda\cdot\big(2x+y, x-y\big) = \lambda\cdot f_1(x,y).$$

2) f_2 ليس تطبيق خطي على سبيل المثال $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ ليست مساوية لـ $f_2(2,2,0)$.

3) f_3 **تطبيق خطي : نتحقق من أجل** (x,y,z) **و** (x',y',z') **أن**

$$f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big)=f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$$

. بعدها من أجل (x,y,z) **و** λ **لدينا** $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big)=\lambda\cdot f_3(x,y,z)$.

4) f_4 **تطبيق خطي : نتحقق من أجل** (x,y) **و** (x',y') **أن**

$$f_4\big((x,y)+(x',y')\big)=f_4(x,y)+f_4(x',y').$$

بعدها، ومن أجل (x,y) **و** λ **لدينا** $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=\lambda\cdot f_4(x,y)$.

5) f_5 **تطبيق خطي : لتكن** $P,P'\in\mathbb{R}_3[X]$ **فإن**

$$\begin{aligned}
f_5\big(P+P'\big)&=\big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big)\\
&=\big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big)\\
&=\big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big)\\
&=f_5(P)+f_5(P')
\end{aligned}$$

و إذا كان $P\in\mathbb{R}_3[X]$ **و** $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_5\big(\lambda\cdot P\big)&=\big((\lambda P)(-1),(\lambda P)(0),(\lambda P)(1)\big)\\
&=\big(\lambda\cdot P(-1),\lambda\cdot P(0),\lambda\cdot P(1)\big)\\
&=\lambda\cdot\big(P(-1),P(0),P(1)\big)\\
&=\lambda\cdot f_5(P)
\end{aligned}$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف:

Let the linear application be $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ defined as:

$$f(x,y,z)=(-3x-y+z,\ \ 8x+3y-2z,\ \ -4x-y+2z).$$

1) أوجد أساس لنواة التطبيق f وأحسب بُعدها.

Find a basis for the kernel of application f and calculate its dimension.

2) هل التطبيق f متباين؟ — Is the application f injective?

3) أوجد رتبة f. هل التطبيق f غامر؟ — Find the range of f. Is the application f surjective?

4) أوجد أساس لـ $Im(f)$. — Find a basis for $Im(f)$.

الحـــل : Solution

1) ليكن $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. لدينا $(x,y,z)\in ker(f)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 8x + 3y - 2z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z - y - 3x = 0 \\ -2z + 3y + 8x = 0 \\ 2z - y - 4x = 0 \end{cases}$$

ثم ، بإضافة (إزالة على التوالي) ضعف السطر الأول إلى الثاني (على التوالي الثالث)، نجد:

$$\begin{cases} z - y - 3x = 0 \\ \quad y + 2x = 0 \\ \quad y + 2x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z \quad -x = 0 \\ \quad y + 2x = 0 \end{cases}.$$

وبالتالي $(x,y,z)\in ker(f)$ إذاوفقط إذا كان (x,y,z) حل هذه الجملة أي:

$$(x,y,z) = (x,-2x,x) = x(1,-2,1).$$

ومنه نأخذ كأساس لنواة التطبق f الشعاع $(1,-2,1)$ أي الأساس يتكون من عنصر واحد يعني $\dim(ker(f)) = 1$.

2) النواة لا تتطابق مع الفضاء المعدوم $\{0\}$ ومنه f ليس متباين.

3) حسب نظرية الرتبة لدينا:

$$rg(f) = 3 - \dim(ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

التطبيق f ليس غامر : لأن بُعد فضاء الصورة يساوي 2 يختلف عن فضاء الوصول الذي هو $\mathbb{R}^3$ ذو البُعد 3.

4) إيجاد فضاء الصور للتطبيق f. لدينا:

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{x(-3,8,-4) + y(-1,3,-1) + z(1,-2,2) \ : \ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &= vect(u_1,u_2,u_3), \end{aligned}$$

حيث نضع $u_1 = (-3, 8, -4)$، $u_2 = (-1, 3, -1)$ و $u_3 = (1, -2, 2)$. من السؤال السابق فإن رتبة التطبيق f هي 2. من جهة أخرى الجملة (u_1, u_2) مستقلة خطيا فهي تشكل أساس لـ $Im(f)$.

تمرين رقم – Exercise N°– 6 –

ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^3$ حيث مصفوفته في الأساس القانوني (e_1, e_2, e_3) معرفة كما يلي:

Let the ondomorphism f of $\mathbb{R}^3$ whose matrix in the canonical basis (e_1, e_2, e_3) is defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

أثبت أن الأشعة

Prove that the vectors

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس.

form a basis for the space $\mathbb{R}^3$, then find the matrix f with respect to this basis.

الحل : Solution

نرمز بـ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ للأساس القديم و للأساس الجديد بـ $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$. لتكن P مصفوفة العبور التي أعمدتها هي مركبات الأشعة التي تنتج من التعبير عن مركبات أشعة الأساس الجديد $\mathcal{B}'$ بدلالة الأساس القديم $\mathcal{B}$ نجد:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نتحقق أن P عكوسة، وبحساب مقلوبها نجد أن $\mathcal{B}'$ يشكل أساس، بالإضافة إلى ذلك :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ نحسب } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B هي مصفوفة التطبيق f في الأساس $\mathcal{B}'$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^2$ حيث مصفوفته

Let the ondomorphism f of $\mathbb{R}^2$ where its matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

في الأساس القانوني، وليكن

on the canonical basis, so let

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ and } e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1) أثبت أن $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

Prove that $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ is a basis for the space $\mathbb{R}^2$ and then find the matrix $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

2) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

3) حدد مجموعة المتتاليات الحقيقية التي تحقق:

Determine the set of real sequences that satisfy:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$$

Solution : الحـــل

1) نضع P مصفوفة العبور من الأساس القانوني $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ نحو الأساس $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$.
مكونة من أشعة الأعمدة e_1 و e_2 :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det P = -4 \neq 0$ ومنه P عكوسة وبالتالي $\mathcal{B}'$ أساس.

ومنه مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$ هي :

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) من السهل جدا حساب قوة مصفوفة قطرية :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

بما أن $A = PBP^{-1}$ نستنتج بعدها A^n :

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{6}{3^n} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{15}{3^n} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$$

3) إذا وضعنا $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ومنه المعادلات التي تحقق هته المتتاليات تكتب على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$X_{n+1} = AX_n.$$

إذا وضعنا الشرط الإبتدائي $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ فإن: $X_n = A^n X_0$. ونستنتج أن:

$$\begin{cases} x_n &= \frac{1}{4}\Big((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0\Big) \\ y_n &= \frac{1}{4}\Big((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0\Big). \end{cases}$$

المصادر

[1] Allab, K. Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle O.P.U., 1986.

[2] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 1: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[3] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 2: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[4] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

[5] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Analyse. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1993.

[6] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Algèbre. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1990.

[7] Bayart, F. Bibmath.net, https://www.bibmath.net/

[8] Chambadal, L. Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[9] Exo7 Cours et exercices de mathématiques, http://exo7.emath.fr/un.html

[10] Godement, R. Cours d'algèbre. Hermann, 1966.

[11] Grifone, J. Algèbre linéaire. Cépaduès Éditions, Toulouse, 2011. 4e édition.

[12] Hitta, A. Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

[13] Liret, F., Martinais, D. Algèbre 1re année. Dunod, 2003. 2e édition.

[14] Mortad, M. H. Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair" (Alger-Algérie), 2012.

[15] Pierre, G. Matrices, géométrie, algèbre linéaire. Nouvelle bibliothèque mathématique.

Cassini, 2001. Traduction de Gabrielle Arnaudiès.

[16] Queysanne, M. Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.

[17] محمد حازي 2017 بوابة التحليل التفاضلي، الدوال ذات عدة متغيرات دروس مبسطة وتمارين منوعة. منشورات المجلس الأعلى للغة العربية، ديدوش مراد الجزائر.

[18] سعود محمد و بن عيسى لخضر، 2009 التحليل الرياضي جزء 1 ، ديوان المطبوعات الجامعية.

[19] قادة علاب 2010 عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول. ديوان المطبوعات الجامعية.

Brahim Brahimi. Full professor in Mathematical Statistics affiliated to the laboratory of Applied Mathematics. Have a Ph.D. in Mathematical Statistics (2011), University Mohamed Khider, Biskra, Algeria. Technical Editor in Chief of Afrika Statistika Journal. Have a master and advanced Studies Diploma in Probability, Statistics and Optimizations (2003), University Badji Mokhtar, Annaba, Algeria. His research interests are in non-parametric statistics, statistical inference for incomplete data, rare events and applications to finance and insurance, extreme value theory and actuarial risk measures, copula modeling and multivariate statistics. He has published research articles in different international reputed journals of mathematics.