***Chapitre 5 :* *Analyse des systèmes asservis à temps continu et Stabilité de Nyquist***

**7.1. INTRODUCTION**

L’analyse de Nyquist, méthode ayant trait (portée) à la réponse fréquentielle consiste essentiellement en un procédé graphique de détermination de la stabilité absolue et relative des systèmes de commande en boucle fermée.

Il y a plusieurs raisons pour choisir la méthode de Nyquist pour accueillir des renseignements sur la stabilité d’un système.

* La méthode de Routh et Hurwitz, ne conviennent souvent pas parce que, à quelques exceptions près, on ne peut les employer que pour établir la stabilité
* On ne peut les appliquer qu’a des systèmes dont l’équation caractéristique est un polynôme fini en P (exemple : signal est retardé de T) en cherche l’approximation. La méthode de Nyquist s’applique à des systèmes de retards de parcours sans qu’on ait besoin de faire des approximations, et par conséquent donne des résultats exacts sur la stabilité….

**7.2. CRIT`ERE DE NYQUIST**

Le critère de Nyquist est un critère fondamental à la base de diverses variantes pour l’analyse de stabilité. Son application est basée sur le tracé dans le diagramme de Nyquist du lieu de la réponse harmonique en boucle ouverte. Pour déterminer le lieu il faut tout d’abord définir le contour de Nyquist CN. Il s’agit d’une courbe du plan complexe comprenant l’axe des imaginaires et dont les extrémités sont reliées à l’infini par un demi-cercle centré à l’origine et situé dans le demi-plan droit (voir figure 7.1). Le contour est orienté selon le sens anti-trigonométrique, c’est-`a-dire selon les ω croissants sur l’axe imaginaire. Si la FTBO possède des pôles sur l’axe imaginaire, le contour doit ˆêtre modifié´e de façon à les exclure. La figure 7.1 donne une illustration de ce que peut ˆêtre le contour de Nyquist dans le cas général et dans le cas ou le système possède une paire de pôles complexes conjugués en $\pm jω\_{1}$. Quand un point d’affixe $p=σ+jω\_{1}$ parcourt le contour de Nyquist, la FTBO du système parcourt le lieu de Nyquist complet N. Ce lieu est symétrique par rapport à l’axe réel et l’on peut se contenter de calculer d’abord la partie correspondant aux points du contour de Nyquist à partie imaginaire positive. On rend ensuite symétrique le lieu par rapport à l’axe réel.

Le tracé du lieu de Nyquist permet de déterminer la stabilité du système en boucle fermée en examinant la façon dont le lieu de Nyquist entoure le point critique, d’affixe -1.

**7.2.1. Théorème : Critère de Nyquist***.*

L’intérêt du critère de Nyquist, c’est de déterminer le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle fermée, sans avoir à les calculer, car ce n’est pas toujours possible. En effet, alors qu’il est souvent assez simple d’identifier la fonction de transfert en boucle ouverte, il est plus délicat de connaître la fonction de transfert en boucle fermée.

**7.2.2. Courbes en polaires**

On peut représenter une fonction de transfert F(p) dans le domaine des fréquences sous la forme d’une fonction de transfert sinusoïdale, en remplaçant p par (j ω) dans l’expression de F(p). la forme qui en résulte F(j ω) est une fonction complexe de la seule variable ω. Ainsi on peut en faire le graphique à deux dimensions en prenant ω comme paramètre et l’écrire sous l’une des deux formes équivalentes suivantes :

Forme polaire :

 F$\left(jω\right)=\left|F\left(jω\right)\right| ф(ω)$

Forme d’Euler :

$ F\left(jω\right)=\left|F\left(jω\right)\right|(cosф\left(ω\right)+jsinф\left(ω\right))$

$\left|F(jω)\right|$Est le module de la fonction complexe F(j$ω) et $)$ ф(ω)$ est son angle de phase, ArgF(jω)

$\left|F\left(jω\right)\right|cosф(ω)$ est la partie réelle et $\left|F\left(jω\right)\right|sinф(ω)$ est la partie imaginaires de F(j$ω)$

**7.3. LE CONTOUR D’EXCLUSION DE NYQUIST**

**Le contour d’exclusion de Nyquist** est un contour fermé du plan de p qui enferme complètement le demi plan droit du plan de p (DPD)

Le diagramme de Nyquist est l'image par H(p) du contour fermé appelé contour d'exclusion de Nyquist. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de H(p) à partie réelle strictement positive.

SiH(p) a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon ε→0.

On représente le contour d’exclusion de Nyquist généralisé par le contour du plan des p.



**Figure 7.1 – Contour de Nyquist**

On voit que tous les pôles et les zéros de H(p) situés dans le DPD sont enfermés par le contour d’exclusion de Nyquist quand on l’applique dans le plan de H(p).

On peut décrire analytiquement les différentes portions du contour d’exclusion de Nyquist de la manière suivante :

Chemin ab : p=jω 0$<$ω$<ω\_{0}$

Chemin bc : $p=\lim\_{ρ\to 0}(jω\_{0}+ρe^{jθ}$) -90° $\leq θ \leq +90°$

Chemin cd : p=jω $ω\_{0}<$ω$<\infty $

Chemin def :$p=\lim\_{R\to \infty }(Re^{jθ})$ +90° $\leq $θ$ \leq -90°$

Chemin fg : p=jω $-\infty <$ω$<-ω\_{0}$

Chemin gh : $p=\lim\_{ρ\to 0}(-jω\_{0}+ρe^{jθ}$) -90° $\leq θ \leq +90°$

Chemin hi : p=jω $-ω\_{0}<$ω$<0$

Chemin ija : $p=\lim\_{ρ\to 0}(ρe^{jθ}$) -90° $\leq θ \leq +90°$

**7.4. DIAGRAMME DE STABILITE DE NYQUIST**

Le diagramme de stabilité de Nyquist est une application du contour d’exclusion de Nyquist en entier dans le plan de H(p). On le construit en utilisant les propriétés des équations précédentes.

La relation :

 **Z = P – N**

donne le nombre Z de zéros instables de l'équation caractéristique1 + FTBO(p) = 0 et donc de pôles instables de la FTBF(p), avec :

* P : Nombre de pôles instables de la FTBO(p),
* N : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist ( ω variant de –$\infty $ à +$\infty $ ) autour du point critique (–1,0) dans le sens trigonométrique ( sens anti-horaire ).

**En particulier, le système asservi est stable, à condition que : Z = 0** $\rightarrow $ **P = N** On notera P et Z les nombres respectifs de pôles et de zéros.

Ainsi, le système est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist complet fait P tours autour du point critique.

En pratique, on retiendra les étapes suivantes pour appliquer le critère de Nyquist :

* Etudier la stabilité de la FTBO $\rightarrow $ P: nombre de pôles instables de la FTBO.
* Tracer le lieu de Nyquist complet de la FTBO (ω variant de –$\infty $ à +$\infty $).
* Calculer le nombre de tours (comptes algébriquement dans le sens trigonométrique), soit N, que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de –$\infty $ à +$\infty $), autour du point critique (-1,0).
* En déduire Z = P – N = nombre de poles instables de la FTBF.

 

1 Système stable

2 Système en limite de stabilité

3 Système instable

**Exemple :**

Soit un système asservi a retour unitaire dont la FTBO est : G(p) =$G\left(p\right)=\frac{K}{1-T\*p} (T>0)$

Discutons sa stabilité suivant les valeurs de K.

|  |  |
| --- | --- |
| ***K > 0*** * La FTBO(p) a un pole instable p = +1/T.

 $\rightarrow $P= 1* Le nombre de tours autour du point (-1,0) est :

 $\rightarrow $N = 0 Z = P – N = 1 $\ne $ 0 1 pole instable de la FTBF$\rightarrow $Systeme instable en boucle fermee.$\rightarrow $ Ce système est instable en boucle ouverte etinstable en boucle fermée |  |
| ***K < – 1*** * P = 1
* N = + 1
* Z = P – N = 0
* Pas de pole instable de la FTBF

$\rightarrow $ Système stable en boucle fermée.* Ce système est instable en boucle ouverte et stable en boucle fermée
 |  |
| ***–1 < K < 0*** * P = 1
* N = 0
* Z = P – N = 1
* 1 pole instable de la FTBF

$\rightarrow $Systeme instable en boucle fermée.* Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.
 |  |

On est souvent intéressé à une réponse plus nuancée que stable ou instable. Les notions de marge de gain ΔG ou de phase $Δφ$ permettent d'apporter cette nuance.

**7.5. STABILITE RELATIVE POUR UN SYSTEME ASSERVI**

Pour un système asservi, le critère de Routh ne fournit pas une indication précise sur la sensibilité de la stabilité par rapport aux variations des coefficients comme l’amortissement. La marge de phase et la marge de gain sont des mesures quantitatives qui permettent de juger du degré de stabilité d’un système asservi. Il y’a donc utile de représenter graphiquement la marge de phase et la marge de gain sur les diagrammes de Bode et de Nyquist pour pouvoir juger du degré de stabilité du système asservi. Ces marges de stabilité sont définies comme une distance à respecter entre le point critique (-1,0) et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

La fréquence d’inversion de la phase ω-180 est la fréquence pour laquelle la phase de GH(j ω) vaut -180°, c’est à dire la fréquence pour laquelle la courbe en polaires coupe l’axe réel négatif.

**7.5.1. Marge de phase et gain**

**7.5.1.1. Marge de Gain**: elle mesure la distance entre le point critique (-1,0) et l’intersection du lieu de Nyquist avec l’axe des réels.

Si on note par $∆G$ la marge de gain, ou à la relation :

$∆G dB=\left|GH(jω\_{-180})\right|dB$ou bien

$$∆G=\frac{1}{\left|GH(jω\_{-180})\right|}$$

Ou ω-180 est la pulsation qui correspond à GH(j ω)=180°

La fréquence de coupure ω1est la fréquence pour laquelle $\left|GH(jω)\right|=1$

**7.5.1.2. Marge de Phase** : Elle mesure l’angle entre l’axe réel (-180°) et le point d’intersection du cercle unité avec le lieu de Nyquist, de pulsation ω1*,* Vérifie la relation : φ1=arg(GH(*j*ω1))

La marge de phase est alors :

$$∆φ=180+φ\_{1}$$

La marge de phase et la marge de gain peuvent se mesurer sur le diagramme de Nyquist et le diagramme de Bode



**Figure 7.2 : Illustration des marges de gain et Figure 7.3 : Illustration des marges de**

 **de phase sur le lieu de Nyquist gain et de phase sur le lieu de Nyquist**

**(cas d’un système stable) (cas d’un système instable)**