Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique

Année : 3ème Année Licence
« Asservissement Linéaire »
Semestre 1

TP N°4: Analyse temporelle des systèmes
Premier et second ordres et d'ordre supérieur et notion de pôles dominants sous Matlab/Simulink.
(Système du premier ordre- Système du Deuxièmes ordre)

L'objectif du TP :

- Écrire des programmes sous Matlab et utiliser Simulink afin d'analyser les réponses des systèmes à des entrées différentes.
- Etudier l'influence de certains paramètres sur le comportement d'un système

I.2. ANALYSE DES SYSTEMES DANS LE DOMAINE TEMPOREL :

Il y a plusieurs types de signaux applicables à un système. On distingue certains appelés entrés de référence (signaux tests). MATLAB dispose de plusieurs commandes qui permettent d'injecter un certain signal à un système. **Object et de fournir la réponse temporelle à ce signal**.

Parmi ces commandes, on distingue :

step: réponse indicielle d'un système.

impulse : réponse impulsionnelle d'un système.

lsim : réponse temporelle d'un système à une entrée arbitraire définie par l'utilisateur.

I.3. SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

I.3.1 Mise en équation

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré.

Leur fonction de transfert possède un pôle. L'équation la plus couramment rencontrée est:

$$\tau\frac{ds}{dt} + s(t) = k\,e(t)$$

Les deux constantes τ et k sont des nombres réels positifs, en général.

τ: est appelée constante de temps du système.

k : est appelée gain statique.

Ces systèmes sont quelques fois appelés systèmes à une seule constante de temps.

Prenant les conditions initiales nulles, la fonction de transfert du système se calcule à partir de l'équation différentielle en utilisant la transformation de Laplace:

$$\tau\, pS(p) + S(p) = k\,E(p)$$
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p}$$

I.3.2. Réponse à une impulsion de Dirac

Soit une entrée e(t) = δ(t). On a donc : E(p) = 1

d'où :

$$S(p) = \frac{k}{1+\tau p}$$

On calcule facilement s(t) à partir de la table des transformées de Laplace

$$s(t) = \frac{k}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

La constante de temps du système, τ peut être mise en évidence sur la courbe (figure 1).

Dans la fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici l'axe des abscisses) au point d'abscisse τ.

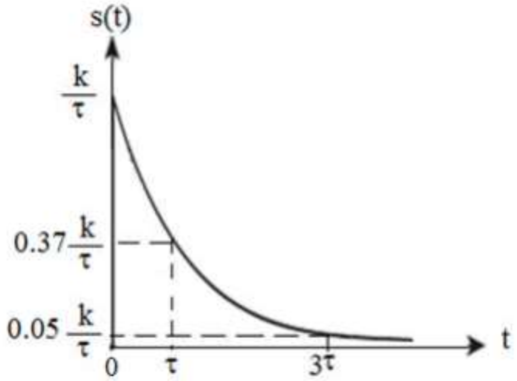


Figure 1 : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

I.3.3. Réponse indicielle

L'entrée consiste en un échelon e(t) = u(t) . On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

D'ou

$$S(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)} \frac{1}{p}$$

On calcule facilement s(t) à partir de la table des transformées de Laplace : $s(t) = k\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

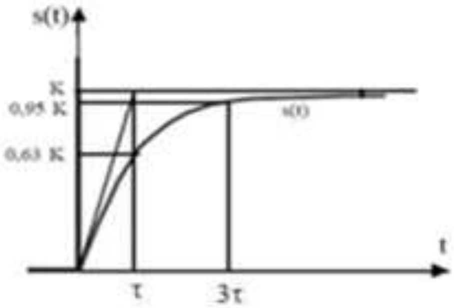


Figure 2 : Réponses indicielles d'un système du premier ordre.

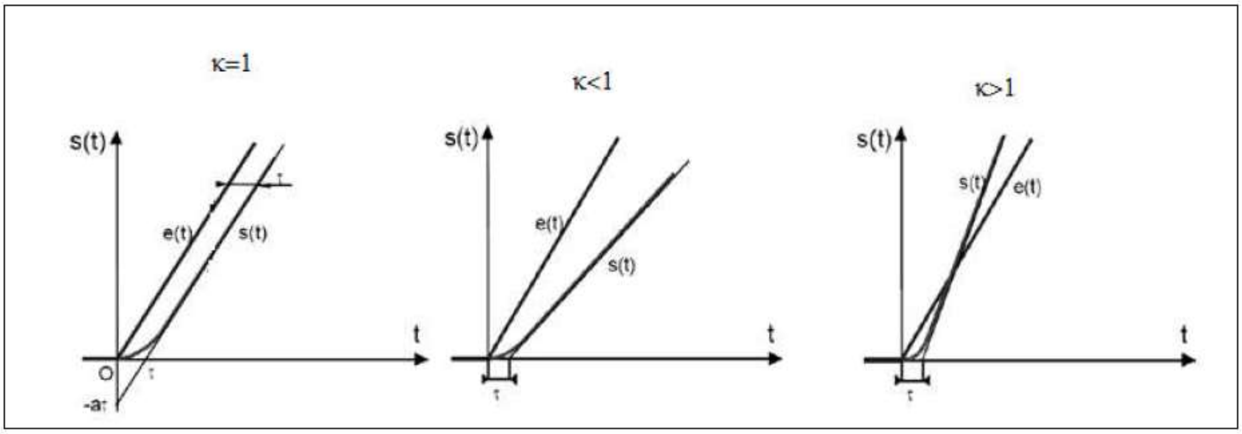
I.3.4. Réponse temporelle d'un système à une entrée arbitraire définie par l'utilisateur (la rampe)

$$e(t) = a.t.u(t)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$S(p) = \frac{ak}{p^2(1 + \tau p)} = k\left(\frac{a}{p^2} - \frac{a\tau}{p} + \frac{a\tau^2}{1 + \tau p}\right)$$

$$s(t) = ak\left(1 - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad t \geq 0$$



I.4. Caractéristiques temporelles d'un système du premier ordre :

On définit le temps du premier maximum T_m comme étant l'instant caractérisant le premier maximum.

a) Temps de montée (rise time) :

Il est noté t_m. C'est le temps nécessaire à la réponse pour évoluer de 10 à 90%, de 5 à 95%, ou de 0 à 100% de sa valeur finale.

Temps de montée

Soit t_1 le temps pour lequel $s(t_1)=10\%$ sfin , de même on note t_2 le moment ou $s(t_2)=90\%\ s_{fin}$

$s_{fin} = s\,(t\to \infty) = k \leftrightarrow \lim_{t\to\infty} s(t) = k$

Le temps de montée est le temps que met la réponse indicielle pour passer de 10 à 90%

$$s(t_1) = k\left(1 - e^{\frac{-t_1}{\tau}}\right) = 0.1k \qquad \Rightarrow\ t_1 = -\tau \ln(0.9)$$

$$s(t_2) = k\left(1 - e^{\frac{-t_2}{\tau}}\right) = 0.9k \qquad \Rightarrow\ t_2 = -\tau \ln(0.1)$$

$$t_m = t_2 - t_1 = \tau \ln(9) = 2.2\,\tau$$

b) Temps de réponse (t_r) :

Le temps de réponse à 10% :

s(tr)=90% sfin

$$s(t_r) = k\left(1 - e^{\frac{-t_r}{\tau}}\right) = 0.9k \qquad \Rightarrow\ t_{r10\%} = -\tau \ln(0.1)$$

$$t_{r10\%} = 2.3\,\tau$$

Le temps de réponse à 5% :

s(tr)=95% sfin

$$s(t_r) = k\left(1 - e^{\frac{-t_r}{\tau}}\right) = 0.95k \qquad \Rightarrow\ t_{r5\%} = -\tau \ln(0.05)$$

$$t_{r5\%} = 3\,\tau$$

Remarque :

La réponse indicielle d'un système du premier ordre ne présente pas de dépassement.

II.1. ÉTUDE DES SYSTÈMES DU SECOND ORDRES

3.3.1 Mise en équation

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré.

Leur fonction de transfert possède donc deux pôles. L'équation la plus couramment rencontrée s'écrit :

$$\frac{1}{w_n{}^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2\xi}{w_n}\frac{ds}{dt}+s(t)=ke(t)$$

Les trois constantes ω_n , ξ et k sont des nombres réels, en général, positifs.

- ω_n : la pulsation propre du système ;
- ξ : est appelée coefficient ou facteur d'amortissement.
- k: est le gain statique du système.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace, aux deux membres :

$$\frac{1}{w_n{}^2}S(p)+\frac{2\xi p}{w_n}S(p)+S(p)=kE(p)$$

soit :

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{k}{\frac{p^2}{w_n{}^2}+\frac{2\xi p}{w_n}+1}$$

II.2. Réponse indicielle

L'entrée consiste en un échelon e(t) = u(t) . On a donc :

$$E(p)=\frac{1}{p}$$

D'où :

$$S(p)=\frac{G(p)}{p}=\frac{k}{p(\frac{p^2}{w_n{}^2}+\frac{2\xi p}{w_n}+1)}$$

Trois cas sont à considérer selon le signe du discriminant du polynôme du dénominateur.

On a : $\Delta=\frac{4\xi^2}{w_n{}^2}-\frac{4}{w_n{}^2}=\frac{4}{w_n{}^2}(\xi^2-1)$

La réponse du système est formée de la différence de deux signaux : le signal k u(t), et un signal sinusoïdal encadré par une enveloppe en exponentielle décroissante, qui tend donc vers 0, en oscillant. Le graphe de s(t) possède donc une asymptote vers la constante k lorsque ttend vers l'infini. Le signal tend vers cette asymptote en présentant un régime dit oscillatoire amorti.

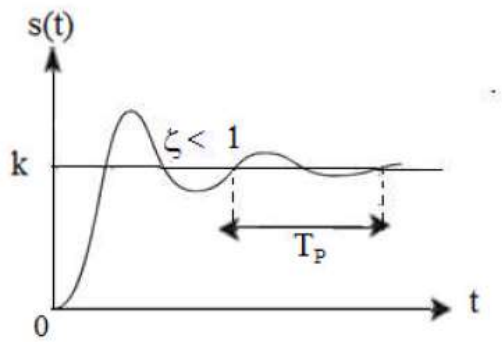


Figure 1 : Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement Inférieur à 1

II.3. Caractéristiques temporelles :

Les caractéristiques transitoires d'un système ne dépendent pas de l'amplitude de l'échelon appliqué mais des deux facteurs : ξ coefficient d'amortissement) et ω_n (pulsation propre) de ce système.

Système	$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\frac{p^2}{{w_n}^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1}$	
	ξ<1	$\xi \geq 1$
Dépassement D%	$100\ e^{-(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})}\ \%$	**0**
Temps du premier maximum T_m	$\frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$	**N.D**
Temps de réponse à 10% $t_{r\ 10\%}$	$-\frac{1}{\xi w_n} ln(0.1\sqrt{1-\xi^2})$	$\frac{2.3}{w_n(\xi-\sqrt{1-\xi^2})}$
Temps de réponse à 5% $t_{r\ 5\%}$	$-\frac{1}{\xi w_n} ln(0.05\sqrt{1-\xi^2})$	$\frac{3}{w_n(\xi-\sqrt{1-\xi^2})}$

TRAVAIL DEMANDE :

Exercice 1:

Soit un système de premier ordre avec un gain statique k=1.

a) Ecrire un programme sous MATLAB pour tracer, sur la même figure, la réponse indicielle à un échelon unitaire pour différentes valeurs de la constante du temps τ = 0.5, 1.5, 3

b) faire une conclusion

Exercice 2:

Ecrire un programme en script sous Matlab pour tracer la réponse indicielle d'un système du 2éme ordre qui a les caractéristiques suivantes :

- ω_n= 10rd/s   la pulsation propre du système ;
- ξ = 0.375   coefficient ou facteur d'amortissement.
- k=2 gain statique du système.

Déterminer :

1) la valeur max sur la courbe,
2) le temps du premier maximum.Tp ,
3) la valeur finale ,
4) En déduire le premier dépassement,
5) En déduire le temps de réponse à 5%

Exercice 3:

1- Soit un système du second ordre de la forme suivante :

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

En prenant les valeurs suivantes : K=1, wn=10rd/s,

a- Tracer, sur la même figure, les réponses indicielles à un échelon unitaire pour chaque valeur de ξ avec ξ = 0.1, 0.7, 1, 1.2.

b- Retrouver pour chaque valeur de ξ:

- Le temps de réponse à 5% (Tr).
- Le temps du pic (Tpic).
- Le dépassement D en %.
- Que peut-on en conclure ?

Exercice 4: Réaliser le montage sous Simulink