المحاضرة الثالثة

الدرس الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Central Tendency

محتوي المحاضرة

- **المقدمة**

1- الوسط الحسابي ArithmeticMean

1-1- حساب الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

1-2- حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

2- الوسيط Median

2-1 الوسيط للبيانات غير المبوبة

2-2 الوسيط للبيانات المبوبة

– مقدمة.

يتناول هذا الدرس عرض بعض المقاييس الإحصائية التي يمكن من خلالها التعرف على خصائص الظاهرة محل الدراسة، بلاضافة الي إمكانية مقارنة ظاهرتين أو أكثر، ومن اجل التعرف على مدى تجانس القيم التي يأخذها المتغير، وأيضا ما إذا كان هناك قيم شاذة أم لا، في كثير من النواحي التطبيقية يكون الباحث في حاجة إلى حساب ببعض المؤشرات التي يمكن الاعتماد عليها في وصف الظاهرة من حيث القيمة التي تتوسط القيم أو تترع إليها القيم، ومن هنا تبرز اهمية المقاييس النزعة المركزية ومن حيث والاعتماد على العرض البياني وحده لا يكفي، ، ومن أهم هذه المقاييس مقاييس النزعة المركزية والتشتت. ان مقاييس النزعة المركزية تسمى ايضا بمقاييس الموضع أو المتوسطات، وهي القيم التي تتركز القيم حولها ومن هذه المقاييس: الوسط الحسابي، والمنوال، والوسيط، والوسط الهندسي والوسط التوافقي، والرباعيات والمثبتات، وفيما يلي عرض لأهم هذه المقاييس.

1– الوسط الحسابي ArithmeticMean

يعتبر الوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية، وأكثرها استخداما في النواح التطبيقية المختلفة والعديدة، هذا المقياس يمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة، وللوسط الحسابي مزايا وعيوب وهي كالتالي

مزايا الوسط الحسابي:

- **أنه سهل الحساب.**
- **يأخذ في الاعتبار كل القيم.**
- **أنه أكثر المقاييس استخداما وفهما.**

عيوب الوسط الحسابي:

- **أنه يتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة.**
- **يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية.**
- **يصعب حسابه ي حالة الجداول التكرارية المفتوحة**

1–1– أولا:حساب الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

ويمكن تعريف الوسط الحسابي بشكل عام على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها، حيث انه إذا كان لدينا n من القيم ويرمز لها بالرمز $x_1 , x_2, \ldots ; x_n$.

فإن الوسط الحسابي لهذه القيم يرمز له بالرمز $\overline{x}$ يحسب بالمعادلة التالية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

حيث يدل الرمز $\sum$ على المجموع.

مثال

فيما يلي درجات 8 طلاب في مادة الإحصاء

34	32	42	37	35	40	36	40

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لدرجة التلاميذ في الامتحان.

الحــل

لإيجاد الوسط الحسابي للدرجات تطبق المعادلة السابقة كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$= \frac{34+32+42+37+35+40+36+40}{8} = \frac{296}{8} = 37$$

أي أن الوسط الحسابي لدرجة التلاميذ في اختبار مادة الإحصاء يساوي 37 درجة.

1-2- حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

فإن الوسط الحسابي يحسب بالمعادلة التالية:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

فإن كانت k هي عدد الفئات وكانت $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ هي مراكز ذه الفئات، $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k$ هي التكرارت، و من المعلوم أن القيم الأصلية لا يمكن معرفتها من جدول التوزيع التكراري، ولذا يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة بمركز هذه الفئة، ومن ثم يؤخذ في الاعتبار أن مركز الفئة هو القيمة التقديرية لكل مفردة تقع في هذه الفئة.

مثال

الجدول التالي يعرض توزيع 40 تلاميذ حسب أوزانهم.

فئات الوزن	32-34	34-36	36-38	38-40	40-4	42-44
عدد التلاميذ	4	7	13	10	5	1

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي.

الحــل

من اجل حساب الوسط الحسابي نقوم باستخدام المعادلة السابقة و إتباع الخطوات التالية:

1. **إيجاد مجموع التكرارات $\sum f$**
2. **حساب مراكز الفئات x.**
3. **ضرب مركز الفئة في التكرار المناظر له (xf)، وحساب المجموع $\sum$**
4. **حساب الوسط الحسابي بتطبيق المعادلة السابقة**

فئات الوزن (C)	التكرارات f	مراكز الفئات x	xf
32-34	4	33=2 ÷ (34+32)	132 = 33 × 4
34-36	7	35	245 = 35 × 7
36-38	13	37	481= 37 × 13
38-40	10	39	390= 39 × 10
40-42	5	41	205= 41 × 5
42-44	1	43	43 = 43 × 1
المجموع	**40**		**1496**

إذا الوسط الحسابي لوزن التلاميذ هو:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{1496}{40} = 37.4 \ k.g$$

أي أن متوسط وزن التلاميذ يساوي 37.4 k.g

2- الوسيط Median

آن مقياس الوسيط يعتبر أحد أهم مقاييس النزعة المركزية، هذا المقياس يأخذ في الاعتبار رتب القيم ويعرف الوسيط بأنه القيمة التي يقل عنها نصف عدد القيم (n/2)، ويزيد عنها النصف الآخر (n/2)، أي أن 50% من القيم أعلى منه، كذلك للمقياس الوسيط مزايا وعيوب نذكر منها

- **مزايا الوسيط**

1) لا يتأثر بالقيم الشاذة آو المتطرفة.
2) كما أنه سهل في الحساب.

3) مجموع قيم الاِنحرافات المطلقة عن الوسيط أقل من مجموع الاِنحرافات المطلقة عن أي قيم أخرى، أي أن:

$$\sum |x - Med| \leq \sum |x - a| \ , \ a \neq Med$$

– **عيوب الوسيط**

1) أنه لا يأخذ عند حسابه كل القيم في الاِعتبار، فهو يعتمد على قيمة أو قيمتين فقط.

يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية المقاسة بمعيار اِسمي nominal.

و يمكننا ان نستعرض فيما يلي كيفية حساب الوسيط في حالة البيانات غير المبوبة والبيانات المبوبة.

2–1– أولا: الوسيط للبيانات غير المبوبة

في هذا الإطار و لحساب الوسيط للبيانات غير المبوبة نقوم باتباع الخطوات التالية:

- ترتب القيم تصاعديا.
- تحديد رتبة الوسيط، وهي رتبة الوسيط = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$
- إذا كان عدد القيم (n) فردي فإن الوسيط هو:

$$\boxed{\text{الوسيط} = \text{القيمة رقم} \left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

- إذا كان عدد القيم (n) زوجي فإن الوسيط يقع بين القيمة رقم (n/2) والقيمة رقم (1+(n/2))، ومن ثم يحسب الوسيط بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\text{الوسيط} = \frac{\text{القيمة رقم} \left(\frac{n}{2}\right) + \text{القيمة رقم} \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2}}$$

2–2– ثانيا: الوسيط للبيانات المبوبة

لحساب الوسيط من بيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري يتم إتباع الخطوات التالية:

- **تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد.**
- **تحديد رتبة الوسيط:** $\frac{\sum f}{2} = \frac{n}{2}$
- **تحديد فئة الوسيط كما في الشكل التالي:**

تكرار متجمع صاعد سابق f_1 الحد الأدنى لفئة الوسيط (**A**)

رتبة الوسيط (**n/2**) ⟵ الوسيط **Med**

تكرار متجمع صاعد لاحق f_2 الحد الأعلى لفئة الوسيط

- **ويحسب الوسيط بتطبيق المعادلة:**

$$\boxed{Med = A + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L}$$

حيث أن:

L هي طول فئة الوسيط، وتحسب بالمعادلة التالية:

$$\text{طول الفئة} = \text{الحد الأعلى} - \text{الحد الأدنى}$$

$$L = Upper - Lower$$

مثال

فيما يلي توزيع 50 عجل متوسط الحجم، حسب احتياجاته اليومية من الغذاء الجاف بالكيلوجرام

فئات الاحتياجات اليومية	1.5 –	4.5 –	7.5 –	10.5 –	13.5 – 16.5
عدد العجول f	4	12	19	10	5

والمطلوب:

حساب الوسيط:

أ. **حسابيا.**

ب. **بيانيا.**

الحــل

أولا: حساب الوسيط حسابيا

- رتبة الوسيط $\frac{n}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{50}{2} = 25$

- **الجدول التكراري المتجمع الصاعد:**

أقل من	تكرار متجمع صاعد
1.5	0
4.5	4
A 7.5	f_1 16
Med (الوسيط)	25
10.5	f_2 35
13.5	45
16.5	50

رتبة الوسيط

- **تحديد فئة الوسيط: وهي الفئة التي تشكل قيمة الوسيط، وهي قيمة أقل منها (n/2) من القيم، ويمكن معرفتها بتحديد التكرارين المتجمعين الصاعدين الذين يقع بينهما رتبة الوسيط (n/2)، وفي الجدول أعلاه نجد أن رتبة الوسيط (25) تقع بين التكرارين المتجمعين (35–16)، ويكون الحد الأدنى لفئة الوسيط هو المناظر للتكرار المتجمع الصاعد السابق 7.5، والحد الأعلى لفئة الوسيط هو المناظر للتكرار المتجمع الصاعد اللاحق 10.5، أي أن فئة الوسيط هي (10.5–7.5).**
- **وبتطبيق معادلة الوسيط على هذا المثال نجد أن:**

$$\mathbf{A= 7.5,\ f_1= 16,\ f_2= 35,\ L= 10.5 - 7.5 = 3}$$

إذا الوسيط قيمته هي:

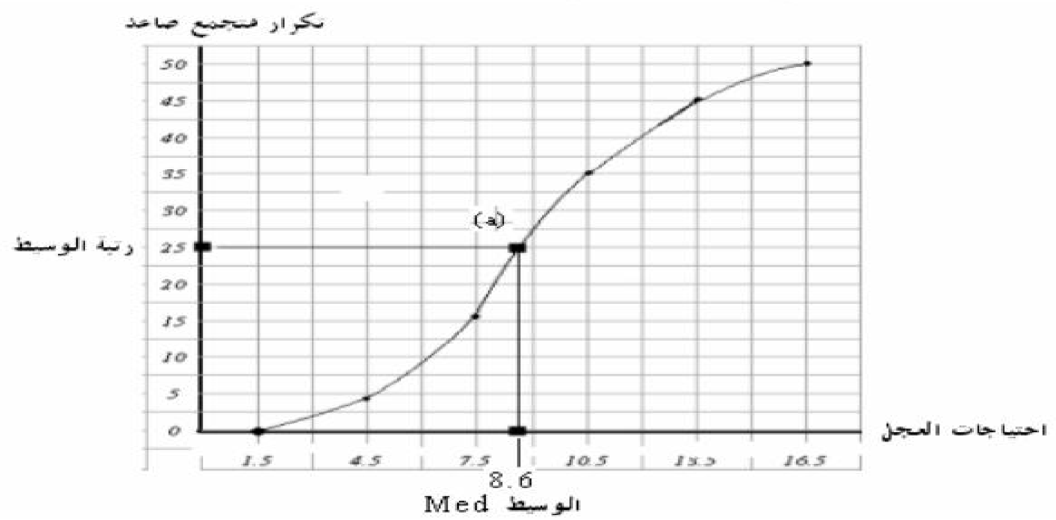
$$Med = A+\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2-f_1}\times L = 7.5+\frac{25-16}{35-16}\times 3$$

$$= 7.5+\frac{9}{19}\times 3 = 7.5+\frac{27}{19} = 7.5+1.421 = 8.921\ k.g$$

ثانيا: حساب الوسيط بيانيا

- تمثيل جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد بيانيا

(شكل)



- تحديد رتبة الوسيط (25) على المنحنى التكراري المتجمع الصاعد، ثم رسم خط مستقيم أفقي حتى يلقى المنحنى في النقطة (a).
- إسقاط عمود رأسي من النقطة (a) على المحور الأفقي.
- نقطة تقاطع الخط الرأسي مع المحور الأفقي تعطى قيمة الوسيط.
- الوسيط كما هو مبين في الشكل Med= 8.6.

المحاضرة الرابعة

الدرس الثالث

مقاييس النزعة المركزية

<u>محتوي المحاضرة</u>

3 المنوال Mode

3-1 حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة

3-2 حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة (طريقة الفروق)

4 تحديد شكل توزيع البيانات بواسطة اِستخدام مقاييس النزعة المركزية

3.2.3.المنوال Mode

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا، ويكثر استخدامه في حالة البيانات الوصفي، لمعرفة النمط (المستوى) الشائع، ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة كما يلي:

أولا: حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة

المنوال (Mod) = القيمة (المستوى) الأكثر تكرارا

ثانيا: حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة (طريقة الفروق)

$$\boxed{Mod = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times L}$$

حيث أن:

A: الحد الأدنى لفئة المنوال (الفئة المناظرة لأكبر تكرار)

d_1: الفرق الأول = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق)

d_2: الفرق الثاني = (تكرار فئة المنوال – تكرار لاحق)

L: طول فئة المنوال.

فئـــــة المنوال = الفئة المناظرة لأكبر تكرار

d_1 = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق) — **تكرار سابق**

تكرار فئة المنوال

d_2 = (اكرار فئة المنوال – تكرار لاحق) — **تكرار لاحق**

مثال

اختبرت عينات عشوائية من طلاب بعض أقسام كلية علوم الأغذية والزراعة، وتم رصد درجات هؤلاء الطلاب في مادة الإحصاء التطبيقي، وكانت النتائج كالتالي:

80	77	75	77	77	77	65	70	58	67	**قسم وقاية النباتات**
88	68	60	75	93	65	77	85	95	90	**قسم علوم الأغذية**
80	65	69	80	65	88	76	65	86	80	**قسم الاقتصاد**
85	73	69	85	73	69	69	73	72	85	**قسم الإنتاج الحيواني**

والمطلوب حساب منوال الدرجات لكل قسم من الأقسام.

الحــل

هذه البيانات غير مبوبة، لذا فإن:

المنوال = القيمة الأكثر تكرارا

والجدول التالي يبين منوال الدرجة لكل قسم من الأقسام:

القيمة المنوالية	القيمة الأكثر تكرار	القسم
المنوال = 77 درجة	الدرجة 77 تكررت 4 مرات	قسم وقاية النباتات
لا يوجد منوال	جميع القيم ليس لها تكرار	قسم علوم الأغذية
يوجد منوالان هما: المنوال الأول = 65 المنوال الثاني = 80	الدرجة 65 تكررت 3 مرات الدرجة 80 تكررت 3 مرات	قسم الاقتصاد
يوجد ثلاث منوال هي: المنوال الأول = 69 المنوال الثاني = 73 المنوال الثالث = 85	الدرجة 69 تكررت 3 مرات الدرجة 73 تكررت 3 مرات الدرجة 85 تكررت 3 مرات	قسم الإنتاج الحيواني

مثال

فيما يلي توزيع 30 أسرة حسب الإنفاق الاستهلاكي الشهري لها بالألف دينار.

17 – 14	– 11	8–	– 5	– 2	فئات الإنفاق
4	5	10	7	4	عدد الأسر f

والمطلوب حساب منوال الإنفاق الشهري للأسرة، باستخدام طريقة الفروق.

الحــل

لحساب المنوال لهذه البيانات يتم اِستخدام المعادلة السابقة، ويتم إتباع الآتي:

- **تحديد الفئة المنوالية**

الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار

الفئات	التكرارات
2 -	4
5 -	7
8 -	10
11 -	5
14 - 17	4

$d_1=10-7=3$

أكبر تكرار

$d_2=10-5=5$

فئة المنوال

A= 8

- **حساب الفروق d، حيث أن:**

$$d_1=(10-7)=3 \qquad d_2=(10-5)=5$$

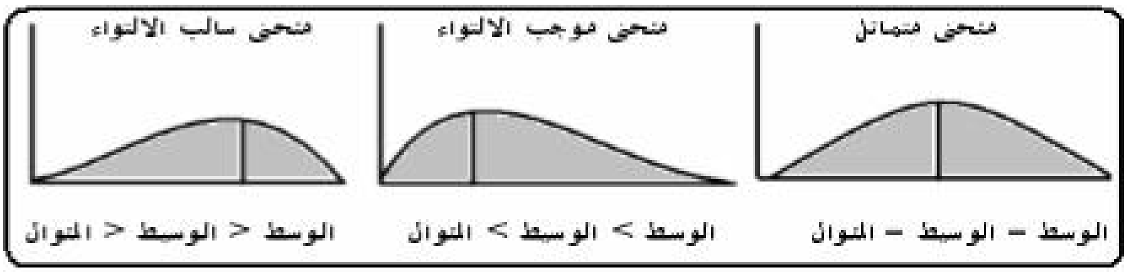
- **تحديد الفئة الأدنى للفئة المنوالية (A=8)، وطذلك طول الفئة (L=3).**
- **وبتطبيق المعادلة الخاصة بحساب المنوال في حالة البيانات المبوبة نجد أن**

$$\begin{aligned} Mod &= A+\frac{d_1}{d_1+d_2}\times L \\ &= 8+\frac{3}{3+5}\times 3 = 8+1.125 = 9.125 \end{aligned}$$

3.3. تحديد شكل توزيع البيانات بواسطة اِستخدام مقاييس النزعة المركزية

حيث يمكن اِستخدام الوسط الحسـابي والوسيـط والمنـوال في وصـف المنحنى التكـراري، والذي يعبر عن شكل توزيع البيانات كما يلي:

شكل



- **يكون المنحنى متماثل إذا كان: الوسط = الوسيط = المنوال**

- يكون المنحنى موجب الاِلتواء (ملتوي جهة اليمين) إذا كان: الوسط > الوسيط > المنوال
- يكون المنحنى سالب الاِلتواء (ملتوي جهة اليسار) إذا كان: الوسط < الوسيط < المنوال

مثال

قام مدير مراقبة الإنتاج بسحب عينة من 10 عبوات من المياه المعبأة للشرب، ذات الحجم 5 لتر، والمنتجة بواسطة إحدى شركات تعبئة المياه لفحص كمية الأملاح الذائبة، وكانت كالتالي:

121	123	121	123	119	124	123	119	123	115

والمطلوب: حساب الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال، ثم حدد شكل الاِلتواء لهذه البيانات.

الحــل

- حساب الوسط الحسابي:

- حساب الوسيط:

رتبة الوسيط: $(n+1)/2 = (10+1)/2 = 5.5$

ترتيب القيم تصاعديا

قيمة الوسيط

الطاقة	115	119	119	121	121	122	123	123	123	123	124
الرتبة	1	2	3	4	5	5.5	6	7	8	9	10

رتبة الوسيط

عدد القيم = 10 وهو عدد زوجي، الوسيط = الوسط الحسابي للقيمتين (5، 6)

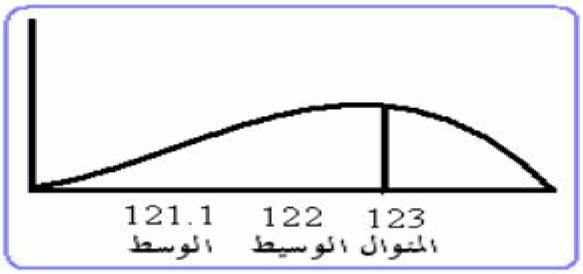
$$\text{Med} = \frac{121+123}{2} = \frac{244}{2} = 122$$

- حساب المنوال:

المنوال يساوي القيمة الأكثر تكرارا: القيمة 123 تكررت أكثر من غيرها إذا:

$$\text{Mod} = 123$$

وبمقارنة الوسط والوسيط والمنوال نجد أن:



(شكل)

نجد أن: الوسط < الوسيط < المنوال، إذا توزيع بيانات كمية الأملاح سالبة الِالتواء.

مثال ذو بيانات مبوبة

الجدول التكراري التالي يعرض توزيع 100 عامل في مزرعة حسب الأجر اليومي بالدينار.

الأجر	50 –	70 –	90 –	110 –	130 –	150 –	170 – 190
عدد العمال	8	15	28	20	15	8	6

والمطلوب:

- **حساب الوسط والوسيط والمنوال.**
- **بيان شكل توزيع الأجور في هذه المزرعة.**

الحـل

- **حساب الوسط والوسيط والمنوال**

أولا: حساب الوسط الحسابي$\overline{x}$

فئات الأجر	التكرارات (f)	مراكز الفئات (x)	F x
50 – 70	8	60	480
70 – 90	15	80	1200
90 – 110	28	100	2800
110 – 130	20	120	2400
130 – 150	15	140	2100
150 – 170	8	160	1280
170 – 190	6	180	1080
المجموع	**100**		**11340**

ثانيا: حساب الوسيطMed

رتبة الوسيط (n/2=100/2= 50)

تكوين التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

أقل من	تكرار متجمع صاعد
أقل من 50	0
أقل من 70	8
أقل من 90	$23 \longleftarrow f_1$
أقل من 110	$51 \longleftarrow f_2$
أقل من 130	71
أقل من 150	86
أقل من 170	94
أقل من 190	100

رتبة الوسيط (50)

من الجدول أعلاه نجد أن:

$$\frac{n}{2} = \mathbf{50},\ f_1 = 23,\ f_2 = 51,\ A = 90,\ L = 110-90 = 20$$

إذا الوسيط قيمته هي:

(معادلة)

$$Med = A + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L = 90 + \frac{50-23}{51-23} \times 20$$

$$= 90 + \frac{27}{28} \times 20 = 90 + \frac{540}{28} = 90 + 19.286 = 109.3 \quad R.S$$

ثالثا: المنوالMod

الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار

أكبر تكرار = 28، وهو يناظر الفئة التقريبية (90–110)

حساب الفروق: $d_1 = 28 - 20 = 8, \quad d_2 = 28 - 15 = 13$

الحد الأدنى للفئة: **A = 90** طول الفئة: **L = 110 − 90 = 20**

إذا المنوال بحسب تطبيق المعادلة التالية:

(معادلة)

$$Mod = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times L = 90 + \frac{13}{13+8} \times 20 = 90 + \frac{260}{21} = 1024 \ \ R.S$$

- **بيان شكل التوزيع**

من النتائج السابقة نجد أن:

الوسط الحسابي: $\bar{x} = 113.4$ الوسيط: Med = 109.3 المنوال: Mod = 1024

أي أن: الوسط > الوسيط > المنوال إذا توزيع بيانات الأجور موجب الالتواء كما هو مبين في الشكل التالي:

(شكل)