الانحدار والارتباط

ثانيا - تحليل الارتباط.

يهتم تحليل الارتباط بقوة العلاقة بين متغيرين أو أكثر، مثل قوة العلاقة بين مهارة العاملين والأنتاجية، أو بين سعر السلعة والكمية المطلوبة منها... حيث يجيبنا تحليل الارتباط عن سؤال رئيس هو: **ما شدة (قوة) العلاقة بين المتغيرين X و Y؟**

تقاس قوة العلاقة هذه بمؤشر إحصائي يدعى معامل الارتباط، يرمز له عادة بالرمز r، حيث يمكن أن نجد عدة أنواع من معاملات الارتباط، تختلف باختلاف عدد المتغيرات المدروسة وطبيعتها، أهم هذه المعاملات:

- ✓ معامل بيرسون للارتباط الخطي البسيط r_p.
- ✓ معامل ارتباط الرتب (معامل سبيرمان) r_s.
- ✓ معامل الاقتران r_a.
- ✓ معامل التوافق r_c.

أ. معامل بيرسون للارتباط الخطي البسيط r_p:

1. **تعريفه**: هو عبارة عن مؤشر يحدد قوة العلاقة الخطية واتجاهها بين متغيرين اثنين، وهو مستقل عن وحدة القياس التي تقاس بها الظاهرة Y أو المتغير X. يمكن إيجاده عن طريق حساب الوسط الهندسي للميلين a و a' لمعادلتي الانحدار السابقتين. أي أن:

$$r_p = \sqrt{a \times a'}$$

يمكن حساب هذا المعامل بقوانين أخرى أهمها:

$$r_p = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{\sqrt{\left[n\sum {X_i}^2 - (\sum X_i)^2\right] \times \left[n\sum {Y_i}^2 - (\sum Y_i)^2\right]}}$$

وهو الأسهل تطبيقا على الآلة الحاسبة

$$= \frac{\sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\left[\sum {X_i}^2 - n(\bar{X})^2\right]\left[\sum {Y_i}^2 - n(\bar{Y})^2\right]}}$$

2. **خصائصه**: يختص معامل بيرسون للارتباط الخطي بما يلي:
- ✓ قيمته محضورة في المجال المغلق من (-1) إلى (+1).
- ✓ كلما اقتربت قيمته من طرفي المجال ازداد الارتباط قوة، وكلما اقتربت قيمته من الصفر ضعف الارتباط.
- ✓ تدل قيمته الموجبة على أن الارتباط طردي، وتدل قيمته السالبة على أن الارتباط عكسي.
- ✓ تدل قيمته المعدومة على عدم وجود ارتباط بين المتغيرين.

✓ يكون الارتباط تماما (والعلاقة وظيفية) إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي (-1) أو (+1)، وهذا لا يكون في الظواهر الإحصائية (الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والتربوية ...)

3. **مثال توضيحي**: تمثل البيانات التالية عدد أيام الغياب X لخمسة طلبة مقابل نقاطهم في أحد اختبارات الرياضيات Y . **المطلوب**: بافتراض أن العلاقة بين المتغيرين خطية: أحسب معامل بيرسون للارتباط.

Y^2	X^2	XY	النقطة Y	أيام الغياب X
729	0	0	27	0
441	16	84	21	4
324	16	72	18	4
100	100	100	10	10
256	36	96	16	6
1850	**168**	**352**	**92**	**24**

$$r_p = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{\sqrt{\left[n\sum {X_i}^2 - (\sum X_i)^2\right] \times \left[n\sum {Y_i}^2 - (\sum Y_i)^2\right]}}$$

$$= \frac{5(352) - (24)(92)}{\sqrt{[5(168) - (24)^2] \times [5(1850) - (92)^2]}}$$

$$= (-0.98) = \ -98\%$$

ومعنى هذا أن هناك ارتباطا عكسيا قويا جدا بين عدد أيام الغياب والنقطة في امتحان الرياضيات، حيث كلما زاد عدد أيان الغياب نقصت النقطة.

4. **تحديد درجة الثقة**: يمكن تحديد درجة الثقة في تقديرات معادلة الانحدار من خلال حساب ما يسمى بمعامل التحديد، والذي يرمز له بالرمز R^2، وهو معامل تترواح قيمته بين 0 و 1 ، حيث يمكن ان يعبر عنه في شكل نسبة مئوية، وهو عبارة عن مربع معامل ارتباط بيرسون. أي أن:

$$R^2 = \left(r_p\right)^2$$

يمكن أيضا حساب معامل التحديد باستخدام ما يسمى "**مجموع الانحرافات المربعة**"، التي يمكن تصنيفها إلى ثلاثة أنواع من الانحرافات:

✓ **الانحرافات المفسَّرة**: وهي الانحرافات بين القيم التقديرية $\hat{Y}$ (التي مصدرها معادلة الانحدار) وبين قيمة الوسط الحسابي $\bar{Y}$ (الوسط الحسابي للقيم الحقيقة Y_i). وسميت كذلك لأن هذا النوع من الانحرافات مفسَّر بالانحدار.

يرمز لمجموع مربعات هذا النوع من الانحرافات بالرمز SSR حيث:

$$SSR = \sum\left(\hat{Y} - \bar{Y}\right)^2 = a^2\left[\sum {X_i}^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}\right]$$

ملاحظة هامة: لا يستخدم القانون الثاني إلا عندما يكون الارتباط **خطيا.**

✓ **الانحرافات غير المفسَّرة**: : وهي الانحرافات بين القيم التقديرية $\hat{Y}$ (التي مصدرها معادلة الانحدار) والقيم الحقيقة Y_i المقابلة لها. وسميت كذلك لأن هذا النوع من الانحرافات لا تفسير له في معادلة الانحدار. يرمز لمجموع مربعات هذا النوع من الانحرافات بالرمز SSE حيث:

$$SSE = \sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2$$

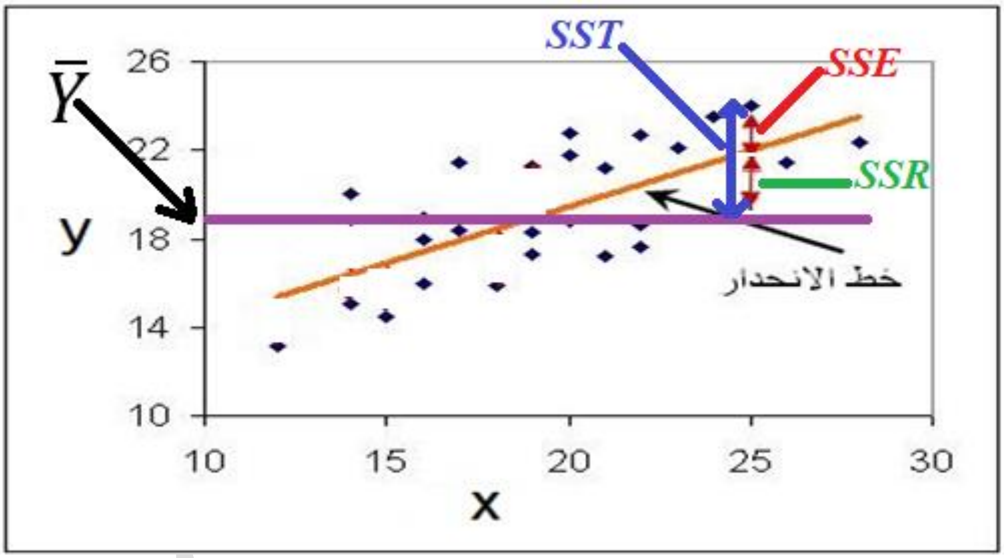
✓ **الانحرافات الكلية**: تنتج عن حاصل جمع النوعين السابقين من الانحرافات، أي أنها عبارة عن انحرافات مفسرة وأخرى غير مفسرة، وهي تجسد الفروق بين القيم الحقيقة Y_i وبين قيمة الوسط الحسابي $\bar{Y}$ (الوسط الحسابي للقيم الحقيقة Y_i). يرمز لها بالرمز SST حيث:

$$SST = SSR + SSE = \sum\left(\hat{Y} - \bar{Y}\right)^2 + \sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2 = \sum(Y - \bar{Y})^2$$

$$= \left[\sum {Y_i}^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}\right]$$

ملاحظة هامة: لا يستخدم القانون المبين في السطر الثاني إلا عندما يكون الارتباط **خطيا**.

الشكل رقم 03: الانحرافات الكلية، المفسَّرة وغير المفسَّرة.



المصدر: /https://samehar.wordpress.com/2009/11/11/120909 (بتصرف)

بناءً على ما سبق يمكن النظر لمعامل التحديد باعتباره نسبة "مجموع مربعات الانحرافات المفسَّرة" (SSR) إلى الانحرافات الكلية (SST) حيث:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

وعلى ذلك يمكن حساب معامل بيرسون للارتباط الخطي كما يلي:

$$r_p = \sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{SSR}{SST}}$$

ب. **معامل ارتباط الرتب: (معامل سبيرمان) r_s**

1. **تعريفه**: هو معامل ارتباط ثنائي، يستخدم في حالة المتغيرات الكمية وحتى المتغيرات النوعية القابلة للترتيب، لكنه يعتبر أقل دقة من معامل بيرسون، لكونه يتعامل مع رتب المشاهدات وليس مع المشاهدات نفسها. نلجأ إليه عادة عندما تكون بيانات أحد المتغيرين أو كليهما بيانات نوعية (وصفية) قابلة للترتيب.
2. **حسابه**: يمكن حساب معامل ارتباط الرتب باتباع الخطوات الآتية:
   - ✓ إعطاء رموز رقمية (رتب) لمشاهدات كلٍّ من المتغيرين X و Y.
   - ✓ استخراج الفرق d_i بين رتبتي كل قيمتين متقابلتين من X و Y ووضعه في عمود جديد.
   - ✓ تربيع قيم d_i ووضع ذلك في عمود جديد d_i^2.
   - ✓ حساب معامل "سبيرمان" بتطبيق القانون الآتي: (حيث n هو حجم العينة أو عدد الثنائيات (x_i , y_i))

$$r_S = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

ملاحظة هامة: قد نجد بعض المشاهدات متطابقة (سواء في القيمة أو في الصفة) وبالتالي نجد مشكلة في ترتيبها، في هذه الحالة نتبع الخطوات الآتية:

- ➢ نرتب المشاهدات بشكل عادي (كما لو أنها مختلفة ولا تشابه بينها).
- ➢ نحسب الوسط الحسابي لرتب المشاهدات المتشابهة.
- ➢ نستبدل الترتيب القديم لهذه المشاهدات المتشابهة بقيمة هذاالوسط الحسابي.
- ➢ نكمل بقية الخطوات إلى غاية حساب معامل ارتباط الرتب.

3. **خصائصه**: هي ذاتها تقريبا خصائص معامل بيرسون السابق.
4. **مثال توضيحي**: سحبنا عينة من خمسة طلبة، وصدنا تقديراتهم في مقياسي الرياضيات (X) والإحصاء (Y)، ورصدنا ذلك في الجدول الآتي:

الطلبة	1	2	3	4	5
التقدير في الرياضيات X	ممتاز	جيد جدا	جيد	جيد	متوسط
التقدير في الإحصاء Y	جيد جدا	ممتاز	متوسط	جيد	متوسط

المطلوب: حساب معامل ارتباط الرتب بين التقديرين.

الحل: باتباع الخطوات السابقة نحصل على الجدول الآتي:

الطلبة	X	Y	رتب X	رتب Y	d_i	d_i^2
1	ممتاز	جيد جدا	1	2	-1	1
2	جيد جدا	ممتاز	2	1	1	1
3	جيد	متوسط	3.5	4.5	-1	1
4	جيد	جيد	3.5	3	0.5	0.25
5	متوسط	متوسط	5	4.5	0.5	0.25
/	/	/	/	/	**0**	**3.5**

$$r_S = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(3.5)}{5(25-1)} = \mathbf{0.82}$$

ومعنى هذا أن هناك علاقة طردية قوية بين ترتيب الطالب في مقياس الرياضيات وترتيبه في مقياس الإحصاء، حيث كلما كان الطالب متفوقا في الأول كان متفوقا أيضا في الثاني. (وهذا منطقي).

ج. معامل الاقتران: r_a

1. **تعريفه**: هناك بعض الحالات نرغب في دراسة العلاقة بين متغيرين نوعيين وغير قابلين للترتيب، فإذا كان هذان المتغيران ثنائيا الإمكانات؛ أي لكل منهما حالتان اثنتان فقط مثل: مدخن وغير مدخن، ذكر وأنثى ... ففي مثل هذه الحالة يمكن الاستعانة بما يسمى "**معامل الاقتران**" r_a .

2. **حسابه**: ولتوضيح كيفية حساب هذا المعامل، لنفرض أن لدينا متغيرا X صفتاه هما: x_1 و x_2، ومتغيرا آخر Y صفتاه هما y_1 و y_2، على النحو الآتي: حيث: الخانات ..n تمثل التكرارات.

X \ Y	y_1	y_2
x_1	n_{11}	n_{12}
x_2	n_{21}	n_{22}

وقد وضع "يول" قانونا لحساب معامل الاقتران كما يلي:

$$r_a = \frac{(n_{11} \times n_{22}) - (n_{12} \times n_{21})}{(n_{11} \times n_{22}) + (n_{12} \times n_{21})}$$

تتراوح قيمة معامل الاقتران بين -1 و +1 .

3. **مثال توضيحي**: قام أحد الباحثين بدراسة العلاقة بين التدخين X والإصابة بأمراض الجهاز التنفسي Y، فجمع بيانات من 335 شخصا، ولخص النتائج في الجدول الآتي:

X \ Y	مصاب	غير مصاب	**المجموع**
مدخن	120	25	**145**
غير مدخن	30	160	**190**
المجموع	**150**	**185**	**335**

$$r_a = \frac{(120 \times 160) - (25 \times 30)}{(120 \times 160) + (25 \times 30)} = \mathbf{0.92}$$

واضح أن هناك اقترانا بين التدخين والغصابة بالامراض التنفسية.

د. معامل التوافق: r_c

1. **تعريفه**: انطلاقا من الحالة السابقة، إذا كان لأحد المتغيرين (أو لكليهما) أكثر من إمكانيتين، هنا نستخدم معامل التوافق، الذي يعتمد -في حسابه على قيمة الإحصاءة "كاي – مربع" χ^2.

2. **حسابه**: يمكن حساب معامل التوافق وفق القانون الآتي:

$$r_c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

حيث: n هو حجم العينة. وقيمة معامل التوافق دوما موجبة ومحصورة بين 0 و 1.

✓ **كيفية استخراج الإحصاءة كاي-مربع**: هناك استخدامات عديدة لاختبار "كاي-مربع"[1]، من بينها أنه يستخدم مقياسا لمدى التفاوت أو التوافق بين ما نتوقعه وبين ما نشاهده فعلا، أي بين التكرارات المتوقعة (النظرية) وبين التكرارات المشاهدة (الحقيقية).يمكن حساب قيمة الإحصاءة بتطبيق القانون الآتي:

[1] سنتطرق إلى هذا الاختبار في السداسي الثاني من السنة الأولى في مقياس الإحصاء 02 (الاحتمالات).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

حيث:

O_{ij} هو قيمة التكرار الحقيقي (المشاهَد) في الخانة ij.

E_{ij} هو قيمة التكرار المتوقَّع (النظري) في الخانة ij. (طريقة استخراجها مبينة أدناه).

K هو عدد الأسطر R.

L هو عدد الأعمدة C.

ولمزيد من التوضيح نفرض أن لدينا الجدول الآتي الذي يتضمن التكرارت الحقيقية O_{ij} :

Y / X	C_1	C_2	…..	C_L	المجموع
R_1	O_{11}	O_{12}	…..	O_{1L}	$\sum R_1 = \sum_{j=1}^{L} O_{1j}$
R_2	O_{21}	O_{22}	…..	O_{2L}	$\sum R_2 = \sum_{j=1}^{L} O_{2j}$
. . . .					. . . .
R_K	O_{K1}	O_{K2}	…..	O_{KL}	$\sum R_K = \sum_{j=1}^{L} O_{Kj}$
المجموع	$\sum C_1 = \sum_{I=1}^{K} O_{i1}$	$\sum C_2 = \sum_{I=1}^{K} O_{i2}$	…..	$\sum C_L = \sum_{I=1}^{K} O_{iL}$	n

الآن لنحدد التكرارت النظرية E_{ij} في كل خانة من خانات الجدول السابق، يتم ذلك بتطبيق القانون التالي في كل خانة على حدة:

$$E_{ij} = \frac{\sum R_i \times \sum C_j}{n}$$

مثلا بالنسة للخانة الأولى:

$$E_{11} = \frac{\sum R_1 \times \sum C_1}{n}$$

3. **مثال توضيحي**: يبين الجدول الآتي العدد الفعلي للطلبة الذين نجحوا والذين رسبوا (X) في ثلاث مواد دراسية (Y) في قسم علوم التسيير:

Y / X	اقتصاد	تسيير	إحصاء	المجموع
ناجح	56	47	50	**153**
راسب	8	14	5	**27**
المجموع	**64**	**61**	**55**	**180**

المطلوب: حدد مقدار التوافق بين النجاح وبين المقاييس الدراسية.

أولا نقوم بحساب قيمة الإحصاءة كاي-مربع، والتي تعتمد على استخراج التكرارات النظرية E_{ij}، التي ندرجها في جدول مستقل (أو في الجدول نفسه).

مثلا الخانة الأولى:

$$E_{11}=\frac{\sum R_1\times\sum C_1}{n}=\frac{153\times 64}{180}=54.40$$

وهكذا مع بقية الخانات، فنحصل على الجدول المقابل:

Y / X	اقتصاد	تسيير	إحصاء	المجموع
ناجح	54.40	51.85	46.75	**153**
راسب	9.60	9.15	8.25	**27**
المجموع	**64**	**61**	**55**	**180**

نحسب الآن قيمة الإحصاءة كاي-مربع:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L}\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}=\frac{(50-54.4)^2}{54.4}+\frac{(47-51.85)^2}{51.85}+\cdots+\frac{(5-8.25)^2}{8.25}$$

$$=\mathbf{4.85}$$

والآن يمكننا حساب معامل التوافق r_c كما يلي:

$$r_c=\sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2+n}}=\sqrt{\frac{4.85}{4.85+180}}=\mathbf{0.16}$$

ملاحظة هامة:

1. هناك طريقة أخرى لاستخراج قيمة الإحصاءة كاي-مربع دونما حاجة لحساب التكرارات النظرية E_{ij}، وذلك بتطبيق القانون الآتي:

$$\chi^2=n\left[\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L}\frac{\left(O_{ij}\right)^2}{\sum R_i\times\sum C_j}\right]-n$$

$$=180\left[\frac{56^2}{153\times 64}+\frac{47^2}{153\times 61}+\cdots+\frac{5^2}{27\times 55}\right]-180=\mathbf{4.85}$$

ثم نواصل حساب معامل التوافق كما أوضحنا أعلاه.

2. من المهم الإشارة على أن كلا من معاملي الاقتران والتوافق يعتمدان على ما يسمى "**باختبار الفروض**" أو "**اختبار الفرضيات**"، وذلك للوصول إلى الحكم النهائي حول مدى الاقتران أو التوافق بين الظاهرتين المدروستين، وهو موضوع غير مبرمج في السنة الأولى، لكن سيتم تناوله في برنامج مقياس الإحصاء 03 أو الإحصاء التطبيقي في السنة الثانية. لذلك فإن ما تم تناوله أعلاه بشأن هذين المعاملين يبقى منقوصا إلى حين تناول موضوع "اختبار الفرضيات" لتكتمل الصورة.