Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2024/2025

Solution de l'exercices 6 de la Série N°**2**

Remarque. Tout d'abord, je demande aux étudiants de considérer la taille de l'échantillon $n = 15$ au lieu de $n = 40$. Le cas $n = 40$ sera traité par la suite avec l'avancement du cours.

Exercice 6.

Dans une production il y a une proportion p d'articles défectueux. On prélève 15 articles pour réaliser le test

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{cases},$$

au niveau de signification 0.01. Déterminer le test optimal puis tracer le graphe de sa fonction puissance.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Solution. Ici, la variable aléatoire X prend une valeur 1 (qui correspond à un article défectueux) avec une probabilité p et elle prend la valeur 0 (qui correspond à un article non défectueux). Donc il s'agit d'une v.a qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. La fonction masse de cette v.a discrète X et définie comme suit:

$$\mathbf{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Celle-ci peut être reformuler comme suit:

$$\mathbf{P}(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \ x = 0, 1.$$

Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance monotone*. Soit $p_1 > p_2$ et écrivons

$$\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}} = \frac{\prod_{i=1}^{15} p_1^{x_i} (1 - p_1)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{15} p_2^{x_i} (1 - p_2)^{1-x_i}} = \frac{p_1^t (1 - p_1)^{15-t}}{p_2^t (1 - p_2)^{15-t}}, \text{ avec } t := \sum_{i=1}^{15} x_i.$$

Celle peut être réécrite comme suit:

$$\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}} = \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_2}\right)^{15} \left(\frac{p_1 (1 - p_2)}{p_2 (1 - p_1)}\right)^t.$$

On pose $b := \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_2}\right)^{15} > 0$, et $a := \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)} > 1$ (car $p_1 > p_2$), ainsi $t \to \frac{L_{p_1}}{L_{p_2}}(t) = ba^t$ est une fonction croissante en t (car $a > 1$). Nous allons alors appliquer la proposition 3, pour avoir le test upp :

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i > c \\ \gamma & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i = c \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i < c \end{cases}$$

où c et $0 < \gamma < 1$ sont telles que

$$\mathbf{P}_{p=0.1}\left(\sum_{i=1}^{15} X_i > c\right) + \gamma \mathbf{P}_{p=0.1}\left(\sum_{i=1}^{15} X_i = c\right) = \alpha = 0.01.$$

En d'autres termes
$$1-\mathbf{P}_{p=0.1}\left(\sum_{i=1}^{15}X_i\leq c\right)+\gamma\mathbf{P}_{p=0.1}\left(\sum_{i=1}^{15}X_i=c\right)=0.01,$$
ce qui implique que
$$\mathbf{P}_{p=0.1}\left(\sum_{i=1}^{15}X_i\leq c\right)=\gamma\mathbf{P}_{p=0.1}\left(\sum_{i=1}^{15}X_i=c\right)+0.99>0.99.$$
On note que $T:=\sum_{i=1}^{15}X_i \rightsquigarrow$Binomial$(15,0.1)$ (la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0.1$). De la table statistique, de la loi binomiale, la plus petite c telle que $\mathbf{P}\left(T\leq c\right)>0.99$ est $c=5$, pour la quelle $\mathbf{P}\left(T\leq 5\right)=0.998$. Par conséquent
$$\begin{aligned}\gamma&=\frac{\mathbf{P}\left(T\leq 5\right)-0.99}{\mathbf{P}\left(T=5\right)}\\&=\frac{0.998-0.99}{\mathbf{P}\left(T\leq 5\right)-\mathbf{P}\left(T\leq 4\right)}\\&=\frac{0.998-0.99}{0.998-\mathbf{P}\left(T\leq 4\right)}.\end{aligned}$$
De la table statistique, de la loi binomiale on trouve $\mathbf{P}\left(T\leq 4\right)=0.987$, donc
$$\gamma=\frac{0.998-0.99}{0.998-0.987}=0.72.$$
Ainsi le test optimal upp est
$$\delta=\delta\left(X_1,...,X_{15}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } \sum_{i=1}^{15}x_i>5\\ 0.72 & \text{si } \sum_{i=1}^{15}x_i=5\\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{15}x_i<5\end{cases}$$
La fonction puissance du test est
$$\begin{aligned}\pi\left(p\right)&=\mathbf{E}_p\left[\delta\right],\ 0<p<1\\&=1\times\mathbf{P}\left(\delta=1\right)+0.72\times\mathbf{P}\left(\delta=0.72\right)+0\times\mathbf{P}\left(\delta=0\right).\end{aligned}$$
En d'autres termes
$$\pi\left(p\right)=\mathbf{P}\left(T>5\right)+0.72\mathbf{P}\left(T=5\right),$$
où $T:=\sum_{i=1}^{15}X_i$ est une v.a binomiale de parametrer $\left(15,p\right)$, avec $0<p<1$. Il est claire que
$$\begin{aligned}\pi\left(p\right)&=1-\mathbf{P}\left(T\leq 5\right)+0.72\left(\mathbf{P}\left(T\leq 5\right)-\mathbf{P}\left(T\leq 4\right)\right)\\&=1-0.28\mathbf{P}\left(T\leq 5\right)-0.72\mathbf{P}\left(T\leq 4\right)\\&=1-0.28F_p\left(5\right)-0.72F_p\left(4\right),\end{aligned}$$
où $F_p\left(x\right)$ désigne la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètrer $\left(15,p\right)$. Explicitement la fonction puissance est
$$\pi\left(p\right)=1-0.28\sum_{k=0}^{5}C_{15}^{k}p^k\left(1-p\right)^{15-k}-0.72\sum_{k=0}^{4}C_{15}^{k}p^k\left(1-p\right)^{15-k},$$
pour $0<p<1$. Le graphe de fonction puissance est donné par la figure Fig.1.

Fig.1

Le code R de cette figure est:

```r
f<-function(x){1-0.28*pbinom(5,15,x)-0.72*pbinom(4,15,x)}
x<-seq(0,1,length=100)
plot(x,f(x),type="l",col="red",ylim=c(0,1.5),xlab=expression(p),ylab=expression(pi~(p)))
abline(h=1,col="blue")
abline(v=0.1)
points(0.1,0.01,col="green2")
text(0.16,0.1,expression(alpha==0.01),col="green2")
text(0.6,0.3,expression(1-beta(p)))
text(0.02,0.3,expression(alpha(p)))
text(0.02,0.5,expression(p<=0.1))
```
