1) ## Analyse de Bode

- L'analyse des systèmes asservis à l'aide de la méThode de Bode, utilise une representation graphique dans le domaine frequentielle jω / GH(jω)

Cependant, les courbes de Bode comprennent deux tracés :

- L'amplitude ou Gain de GH(jω).
- La phase de GH(jω).

Tous les deux en fonction de la frequence ω. On emploi en general, des echelles semi logariThmiques pour l'axe des frequences et pour |GH(jω)|.

2/ But: Les courbes de Bode permettent de représenter très clairement la stabilité relative d'un système. En fait souvent les marges de gain et de phase à partir des courbes de Bode. On effectue ces mesures de la stabilité relative pour un système particulier avec moins de calcul si on utilise les courbes de Bode, surtout dans le cas où les données dont on dispose sur la réponse frequentielle sont de nature experimentale

3/ - Echelles logariThmiques

on utilise une echelle logariThmique pour l'axe ω (abscisse) parcequ'on peut tracer l'amplitude et la phase sur un plus grand intervalle de frequence qu'avec des axes de frequence lineaire, où toutes les frequences comptant pareil, d'autant plus que ces courbes donnent souvent des lignes droites

- On represente l'amplitude de Gain |G(jω)| de n'importe quelle fonction G(jω) pour toute valeur de ω sur une èchelle logariThmique graduée en décibels (dB), où

$$M(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|. \quad (db)$$

- On représente la phase φ(ω) de G(jω) est dessinée sur une echelle lineaire habituelle en degrés tel que:

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

Les frequence en abscisse sont comptées sur une echelle semi-logariThmique. L'avantage de cette echelle est de mettre en evidence tant les basses que les hautes frequences

4. Construction des courbes de Bode.

- Il est commode de se servir de la forme particulière de la fonction de réponse fréquentielle appelée forme de Bode pour tracer les courbes de Bode.

$$G(p) = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(p+z_i)}{p^{\ell}\prod_{i=1}^{n}(p+p_i)} \quad ; \quad p = j\omega$$

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)\ldots\ldots(j\omega+z_m)}{(j\omega)^{\ell}(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)\ldots\ldots(j\omega+p_n)}$$

En mettant tous les z_i et les p_i en facteurs et en les regroupant.

$$G(j\omega) = K \frac{z_1 z_2 z_3\left(\frac{j\omega}{z_1}+1\right)\left(\frac{j\omega}{z_2}+1\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{j\omega}{z_m}\right)}{(j\omega)^{\ell} p_1 p_2 p_3\left(1+\frac{j\omega}{p_1}\right)\left(1+\frac{j\omega}{p_2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{j\omega}{p_n}\right)}$$

$$G(j\omega) = K\left(\prod_{i=1}^{m} z_i \Big/ \prod_{i=1}^{n} p_i\right) \times \frac{\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{j\omega}{z_m}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{p_1}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{j\omega}{p_n}\right)}$$

Le Gain de Bode K_B est par définition le coefficient du numérateur

$$K_B = K \frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{i=1}^{n} p_i}$$

- On sait que la fonction de transfert d'un système quelconque est constitué de produits et de divisions de fonctions de transfert d'éléments de Base constituant ce système. Ceci revient dans le domaine semi logarithmique à les ajouter et les à soustraire.

Calculer l'amplitude ou la phase d'une fonction de transfert $G(j\omega)$ revient à calculer la somme algébrique des amplitudes ou des phases des différents éléments de base entrant dans cette fonction de transfert.

• Amplitude $M(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)|$

$$M(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|K_B| + 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{Z_1}\right| + 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{Z_2}\right| + \dots$$

$$\dots + 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{Z_m}\right| + 20\log\left|\frac{1}{|j\omega|^{\ell}}\right| + 20\log_{10}\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{P_1}\right|} + \dots + 20\log\left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{P_n}}\right|.$$

• Arguments: $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arg K_B + \arg\left(1+j\frac{\omega}{Z_1}\right) + \dots + \arg\left(1+j\frac{\omega}{Z_m}\right) + \arg\left(\frac{1}{(j\omega)^{\ell}}\right)$$

$$+\arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{P_1}}\right) + \dots + \arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{P_n}}\right)$$

5) Diagramme de Bode :

5-1. Constante K_B : (Pour un element proportionnel)

La constante K_B a pour amplitude $|K_B|$ et pour phase $0°$ si K_B est positif, $-180°$ si K_B est négatif. Ainsi les courbes de Bode de K_B sont simplement des droites horizontales comme l'indique la figure 1

$G(j\omega) = K_B \qquad K_B > 0$

$|G(j\omega)| = |K_B| = K_B$

$\arg(G(j\omega)) = \operatorname{arctg}\frac{0}{K_B} = \operatorname{arctg}(0) = 0°$

$M(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|K_B| = 20\log_{10}(K_B)$ db

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(0°) = 0$

5-2 : Diagramme d'un elément intégral

La fonction de transfert de cet element est : $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{\ell}}$

$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{(j\omega)^{\ell}}\right| = \frac{1}{\omega^{\ell}}$

$M(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega^{\ell}}\right) = -20\log_{10}(\omega)^{\ell} \Rightarrow$

$= (-20\ell)\log_{10}(\omega).$

$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{(j\omega)^{\ell}}\right) = \cancel{\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega^{\ell}}{0}\right) = -\ell\operatorname{arctg}\omega}$

$= -\arg(j\omega)^{\ell} = -\ell\arg(j\omega)$

$\varphi(\omega) = -l\,arg(j\omega) = -n \times 90 \Rightarrow \varphi(\omega) = -n90$

les courbes comme le montre la figure 2.

5.3 : Diagramme de Bode d'un élément différentiel

$$G(j\omega) = (j\omega)^l$$

dont l'amplitude et l'argument sont : $|G(j\omega)| = |\omega|^l = (\omega)^l$

$$\varphi(\omega) = arg(j\omega)^l = l\,arg(j\omega)$$

$$\varphi(\omega) = l\,arctg\,\frac{\omega}{0} = l \times 90$$

$$|G(j\omega)| = \omega^l \;;\; \varphi(\omega) = 90l$$

$$M(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}(\omega)^l = (20 \times l)\log_{10}(\omega).$$

$$M(\omega) = 20l\log_{10}(\omega)$$

Les ~~comme~~ courbes comme l'indique la figure 3.

5.4 : Diagramme de Bode d'un système du 1er ordre :

Considérons la fonction de transfert suivante :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{p}} \qquad p > 0.$$

L'amplitude et l'argument de cette fonction de transfert sont :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{p})^2}} \;;\; arg(G(j\omega)) = -arctg\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

$$M(\omega) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{p})^2}}\right) = -20\log_{10}\sqrt{1+(\frac{\omega}{p})^2}$$

Le tracé du diagramme de Bode n'est pas chose facile, du fait du volume de calcul qu'il nécessite. L'outil informatique est indispensable pour le tracé exact d'un tel diagramme. Une autre technique nécessitant moins de calcul est aussi disponible, et donne le diagramme de Bode asymptotique. Une technique consiste à ne considérer que les faibles et les hautes fréquences pour le tracé du diagramme de Bode.

En effet, vers les basses fréquences, c'est à dire pour toutes les fréquences ω vérifiant la condition suivante : $\frac{\omega}{p} \ll 1$

la fonction de transfert $G(p)$ de cet élément s'approche de 1

L'amplitude et l'argument correspondant sont alors donnés par :

$$M(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\frac{\omega}{p}} \right| \simeq 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ db}.$$

$$\arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{p}}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{p}\right)\Big|_{\omega \ll p} \simeq 0^\circ$$

L'amplitude et la phase sont alors représentées par des droites constantes de valeurs nulles

Pour les hautes fréquences c'est à dire que $\frac{\omega}{p} \gg 1$ ou $\omega \gg p$.

La fonction de transfert $G(p)$ de cet élément s'approche de $\frac{1}{j\frac{\omega}{p}}$

dont le amplitude et l'argument correspondant à :

$$M(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\frac{\omega}{p}} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\frac{\omega}{p}} \right| = -20 \log_{10} (\omega/p)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{p}}\right) = \arg\left(\frac{1}{j\frac{\omega}{p}}\right) = -\operatorname{arctg}(\infty) \simeq -90^\circ$$

Donc l'amplitude est représentée dans ce cas par une droite de pente négative et la phase est aussi une droite parallèle à l'axe ω et de valeur égale à -90°.

Le diagramme de Bode asymptotique est alors obtenu en utilisant les courbes des basses et de hautes fréquences (figure 4).

Les deux droites se joignent à la fréquence ω_c dont la valeur est obtenue en résolvant l'équation suivante

$$0 = 20 \log_{10}\left(\frac{\omega_c}{p}\right) \Rightarrow \log_{10}\frac{\omega_c}{p} = 0 = \log 1 \Rightarrow \frac{\omega_c}{p} = 1$$

$\omega_c = p$

$$M_A(\omega) = \cancel{20\log_{10}(\omega/p)} - 20 \log \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{p}\right)^2} = -20\log\sqrt{2} = -3 \text{ db}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(1) = -45^\circ$$

5.5 Diagramme de Bode d'un element du 1er ordre de la forme

$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{z}$$

considerons maintenant la fonction de transfert suivante

$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{z}.$$

L'amplitude et la phase correspondantes sont :

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{z}\right)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{z}\right).$$

Pour le diagramme de Bode, nous traçons

$$M(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{z}\right)^2} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{z}\right).$$

Pour ce système, et ceux qui vont suivre, nous procédons de manière asymptot
En effet, lorsque $\frac{\omega}{z} \ll 1 \Rightarrow \omega \ll z$ la fonction de transfert $G(p)$ s'approche de 1 dont l'amplitude et la phase sont parfaitement donne par :

$$M(\omega) = 0\ db.$$

$$\varphi(\omega) = 0^\circ.$$

Tandis que lorsque $\frac{\omega}{z} \gg 1 \Rightarrow (\omega \gg z)$ la $G(p)$ s'approche de $\frac{p}{z}\left(\frac{\omega}{z}\right)$ dont l'amplitude et la phase sont cette fois

$$M(\omega) = 20\log\left(\frac{\omega}{z}\right).$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

5.6 Diagramme de Bode d'un element du second ordre :

considerons la fonction suivante :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

on sait que pour un taux d'amortissement $\xi > 1$, $G(j\omega)$ s'écrit sous la forme de produit de deux éléments du 1er ordre avec pôles réels.
si $0 < \xi < 1$, alors $G(j\omega)$ s'écrit sous la forme de produit de deux elements du premier ordre avec des pôles complexes conjugués.

Pour tracer le diagramme de Bode de cet élément, on a besoin des grandeurs suivantes.

- Amplitude $M(\omega)$.

$$M(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Pour les basses fréquences, c'est-à-dire $(\omega \ll \omega_n)$, le terme $\frac{\omega}{\omega_n}$ tend vers 0. et l'amplitude en db alors $M(\omega) = 0$ db.

- Pour les hautes fréquences, c'est-à-dire $(\omega \gg \omega_n)$; le terme $\left(\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right)^2$ est prépondérant, l'amplitude est alors donnée par:

$$M(\omega) = -20 \log_{10} \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \text{ db}.$$

- Phase

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Pour les basses fréquences $(\omega \ll \omega_n) \Rightarrow \varphi(\omega) = 0°$
- " " hautes fréquences $(\omega \gg \omega_n) \Rightarrow \varphi(\omega) = -180°$.

- La courbe d'amplitude possède un maximum M_p pour des taux d'amortissement ξ satisfaisant la relation suivante.

$$0 < \xi < 0{,}707$$

Ce maximum se produit à la fréquence ω_p dont la valeur

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

cette valeur est obtenue en cherchant le maximum de la fonction $M(\omega)$ c'est-à-dire en résolvant $\frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0$; la valeur de pic correspondante est donnée par

$$M_p = M(\omega_p) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

5-7 : Considérons la fonction de transfert suivante :

$$G(j\omega) = 1 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$

L'expression d'amplitude et de la phase

$$M(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Pour les basses fréquences, $\omega \ll \omega_n$, la fonction de transfert $G(p)$ s'approche de 1 :

$$M(\omega) = 0\ db$$
$$\varphi(\omega) = 0.$$

- Pour les hautes fréquences $\omega \gg \omega_n$.

$$M(\omega) = 40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_n}\ db$$

$$\varphi(\omega) = 180°$$

5-8 : Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

Considérons le système représenté par la fonction de transfert suivante

$$G(p) = k\frac{(\tau_1 p + 1)}{(\tau_2 p + 1)(\tau_3 p + 1)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau_2} < \frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_3} \qquad k > 1$$

À partir des tracés des diagrammes des fonctions de base précédentes, le tracé du diagramme de Bode de chacune des fonctions $G_i(p)$ $i = 1, \ldots$ ne pose aucune difficulté. Notons que le tracé de $G(p)$ est obtenu en additionnant les diagrammes des amplitudes en db et les diagramme de phases en degré.