

Solution de l'exercice 7 de la série N°2

**Exercice 7.** On pèleve un échantillon de taille 64 d'une population normale d'espérance inconnue  $\mu$  et de variance 1. Déterminer le test unifomément le plus puissant, au niveau de signification 0.10, pour les hypophèses

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases} .$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.

\*\*\*\*\*

**Solution.** Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance croissant (monotone)*. Soit  $\mu_1 > \mu_2$  et écrivons

$$\begin{aligned} \frac{L_{\mu_1}}{L_{\mu_2}} &= \frac{\prod_{i=1}^{64} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_i - \mu_1)^2 \right\}}{\prod_{i=1}^{64} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_i - \mu_2)^2 \right\}} \\ &= \exp \left( 32 (\mu_2^2 - \mu_1^2) \right) \times \exp \left\{ (\mu_1 - \mu_2) \sum_{i=1}^{64} x_i \right\} . \end{aligned}$$

On pose  $t := \sum_{i=1}^{64} x_i$ ,  $b := \mu_1 - \mu_2$  et  $d := \exp \left( 32 (\mu_2^2 - \mu_1^2) \right) > 0$ , ainsi on a une fonction  $t \rightarrow \frac{L_{\mu_1}}{L_{\mu_2}}(t) = d \exp bt$ , croissante en  $t$ , car  $\mu_1 > \mu_2$  implique  $b > 0$ . Alors la loi de  $X$  possède un rapport de vraisemblance croissant en  $t = \sum_{i=1}^{64} x_i$ . Donc en appliquant la proposition 3 (voir le cours), on obtient le test upp:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i \leq c \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i > c \end{cases}$$

avec  $\mathbf{P}_{\mu=0} \left( \sum_{i=1}^{64} X_i \leq c \right) = \alpha = 0.1$ . Celle-ci peut être réécrite comme suit:

$$\mathbf{P}_{\mu=0} \left( \frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64 \times 0}{\sqrt{64}} \leq \frac{c - 64 \times 0}{\sqrt{64}} \right) = \alpha = 0.1.$$

En d'autres terms  $\mathbf{P}(Z \leq c/8) = 0.1$ , ce qui est equivalent à  $c = 8\Phi^{-1}(0.1) = -8\Phi^{-1}(0.9)$ . De la table statistique des quantiles de la loi gauss on a  $\Phi^{-1}(0.9) = 1.28$ , donc  $c = -10.24$ . La forme explicite du test upp est

$$\delta(x_1, \dots, x_{64}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i \leq -10.24 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i > -10.24 \end{cases}$$

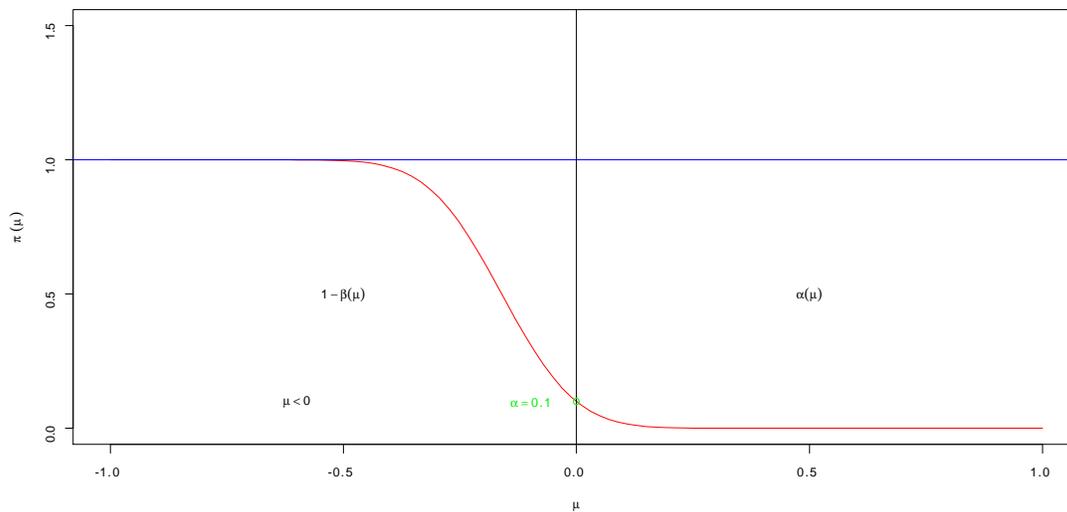
La fonction puissance du test est

$$\pi(\mu) = \mathbf{P}_\mu \left( \sum_{i=1}^{64} X_i \leq -10.24 \right), \mu \in \mathbb{R}.$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &= \mathbf{P}_\mu \left( \frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64\mu}{8} \leq \frac{-10.24 - 64\mu}{8} \right) \\ &= \mathbf{P}_\mu \left( Z \leq \frac{-10.24 - 64\mu}{8} \right) = 1 - \Phi(8\mu + 1.28), \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le graphe de la fonction puissance est donné par la figure suivante:



Voici le programme en langage R qui réalise ce graphe:

```
f<-function(x){1-pnorm(8*x+1.28)}
x<-seq(-1,1,length=100)
plot(x,f(x),type="l",col="red",ylim=c(0,1.5),
xlab=expression(mu),ylab=expression(pi~(mu)))
abline(h=1,col="blue")
abline(v=0)
points(0,0.1,col="green")
text(-0.1,0.1,expression(alpha==0.1),col="green2")
text(-0.5,0.5,expression(1-beta(mu)))
text(0.5,0.5,expression(alpha(mu)))
text(-0.6,0.1,expression(mu<0))
text(0.5,0.1,expression(mu>=0))
```