الجمــهورية الجـزائرية الديمــوقراطية الشعبيــة
وزارة التعليــم العالــي و البحــث العلمــي
جامعـــة محمـــد خيضـــر- بسكـــرة -
كليـــة العلـــوم الإقتصـــادية و التجـــارية و علـــوم التسييـــر

قســـم العلـــوم التجـــارية

رياضيات-1
دروس في التحليل الرياضي

موجهـــة لطلبـــة السنـــة الأولـى
السداسي الأول

من إعداد الأساتذة :
د. سلطـــان لويزة

السنـــة الجامعيـــة
2021-2020

الفهرس العام

مقدمة

التحليل الرياضي هو فرع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الدوال الرياضية وتحولاتها باستخدام أدوات ترتبط بمفاهيم النهاية، حيث تدرس خواص مثل الإتصال و الإشتقاق و التكامل و التفاضل، التقعر والانعطاف في منحنيات التوابع والدوال، وغالباً ما تدرس هذه المفاهيم على أعداد حيقية أو أعداد عقدية.

تتضمن هذه المطبوعة على ستة فصول يحوي كل فصل على تعاريف، نتائج، نظريات و أمثلة لتوضيح مع تمارين مقترحة. خصص الفصل الأول لمبادئ نظرية المجموعات، الفصل الثاني يتناول مفاهيم عامة حول المتتاليات. الفصل الثالث يتناول التوابع الحقيقية بمتغير حقيقي حيث يدرس التطبيقات المستمرة و الإشتقاق. الفصل الرابع يهتم بدراسة الدوال الأسية اللوغارتمية في حين يغطي الفصل الخامس الدوال الأصلية وحساب التكامل. أما الفصل الأخير يختص بدراسة الدوال ذات عدة متغيرات حيث اهتممنا بحالة متغيرين من أجل تسهيل التصور.

الفصل الأول: مبـــــادئ نظـــرية المجموعـــات

مدخل حـول المجمـــوعات

إن فكرة المجموعة هي الأساس لكل الرياضيات، و جميع الموضوعات و التراكيب الرياضية تستخدم نظرية المجموعات. و نظرا للأهمية الأساسية لنظرية المجموعات، سنقدم هنا مجملا قصيرا للرموز و المصطلحات الخاصة بنظرية المجموعات و التي سنستعملها كثيرا.

1. المجموعة

هي تجمع لأشياء تشترك بخاصة أو صفة معينة على الأقل، و يسمى كل شيء يدخل في تكوين مجموعة ما عنصرا من هذه المجموعة.

مثال: طلاب السنة الأولى يشكلون مجموعة يدخل في تكوين هذه المجموعة الطلاب و كل عنصر منها هو "طالب" و الصفة المشتركة بين عناصرها هي صفة "طالب" على الأقل.

ترميز:

- نرمز لمجموعة ما بأحد الحروف الكبيرة مثل: $A,\ B,\ C,\ X,\ Y,...$
- نرمز لكل عنصر من عناصر مجموعة ما بأحد الحروف الصغيرة مثل: $a,\ b,\ c,\ x,\ y,...$
- إذا كان العنصر x هو عنصر من مجموعة A رمزنا لذلك بـ $x \in A$ و نقرأ الرمز $\in$ بـ "الإنتماء الى" أو "عنصرا من"
- إذا كان x لا ينتمي إلى A نرمز لذلك اختصارا بـ $x \notin A$.
- إذا كان $x \in A$ ،$y \in A$ نرمز لذلك اختصارا بـ $x, y \in A$
- تحدد كل مجموعة A إما بعناصرها صراحة أو بالصفة المميزة لعناصرها.

مثال: لتكن المجموعة A حيث:

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\} = \left\{ n \in \mathbb{N}^*,\ \text{6 لـ قاسم}\ \ n \right\}$$

2. المجموعات العددية

- مجموعة الأعداد الطبيعية و نرمز لها بـ $\mathbb{N}$ حيث:

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,...\}$$

- مجموعة الاعداد الصحيحة و نرمز لها بـ $\mathbb{Z}$ حيث:

$$\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ ...\}$$

- مجموعة الاعداد الناطقة و نرمز لها بـ $\mathbb{Q}$ حيث:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بـ $\mathbb{R}$ و هي:

$$\mathbb{R} = \left\{..., -\ 1, -\frac{1}{2},\ 0, -\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{7}{2},...\right\}$$

هي المجموعة $\mathbb{Q}$ بالإضافة للأعداد من الشكل ... $\pi,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},$

و لدينا دوما: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3. الاحتواء

تعريف: إذا كانت A و B مجموعتين،

نقول أن A محتواة في B أو أن A جزء من B، و نرمز لها بالرمز $A \subseteq B$، إذا كان كل عنصر x من A هو حتما عنصر من B.

$$\forall\ x: (\ x\ \in\ A \Rightarrow x\ \in\ B).$$

ملاحظة: الكتابة $B \subseteq A$ لا تنفي المساواة بين A و B أي أن

$$A\ \subseteq\ B \Leftrightarrow \{ \begin{matrix} A=B \\ A\subset B \end{matrix} \text{ أو}$$

فالكتابتان $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ صحيحتان

4. عدم الاحتواء

تعريف: إذا كانت A و B مجموعتين،

نقول ان A غير محتواة في B أو أن A ليست جزء من B، و نرمز لها بالرمز $A\not\subseteq B$، إذا كان

$$\exists x:\ (x\ \in\ A \text{ و } x\ \notin\ B).$$

أي أن:

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x:\ (x\ \in\ A \text{ و } x\ \notin\ B)$$

مثال: لتكن المجموعتين A و B حيث:

$$A\ = \{1,\ 2,\ 3,\}\ , \qquad B\ = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

5. الاحتواء التام

تعريف: لتكن A و B مجموعتين

نقول ان A محتواة تماما في B و نرمز لذلك بـ $A \subset B$: يعني ان كل عنصر من A هو موجود في B و هناك عنصر على الأقل من B غير موجود في A.

$$A\ \subset\ B \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall x:\ (x\ \in\ A \Rightarrow x\ \in\ B) \\ \text{و} \\ \exists x_0\ \in\ B \text{ و } x_0\ \notin\ A \end{matrix}$$

6. تساوي مجموعتين

تعريف: لتكن A و B مجموعتين
نقول عن المجموعتين A و B انهما متساويتان، و نكتب $A = B$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ أي أن:

$$A \subseteq B \text{ و} B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

مثال: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ فإن $A \neq B$ لأن
$B \subseteq A$ محقق بينما $A \subseteq B$ غير محقق أي $B \not\subseteq A$

7. المجموعة الخالية

تعريف: المجموعة الخالية هي مجموعة تخلو من العناصر، و لذا سميت بهذا الإسم، أي لا تحوي على أي عنصر و نرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\ \}$.

مثال: $\emptyset = \{x \in \mathbb{N},\ x = -4\}$, $\emptyset = \{x \in \mathbb{R},\ x = x\}$

نظرية[1]:
- المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة A.
- المجموعة الخالية $\emptyset$ وحيدة.

8. مجموعة أجزاء مجموعة

تعريف: لتكن E مجموعة كيفية
نسمي مجموعة أجزاء E، و نرمز لها بـ $\mathcal{P}(E)$، و هي مجموعة كل المجموعات التي يمكن إستخراجها من E أي:

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$$

مثال: لتكن المجموعة $E = \{1, 2\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ E\}.$$

ملاحظة:
1. $E \in \mathcal{P}(E),\ \emptyset \in \mathcal{P}(E)$
2. إذا كان عدد عناصر E هو n فإن عدد عناصر $\mathcal{P}(E)$ هو 2^2

مثال: عدد عناصر المجموعة E في المثال السابق هو 2 إذن عدد عناصر $\mathcal{P}(E)$ هو 4.

[1] يمكن الاطلاع على برهان الفرضية في كتاب سعود و بن محمود.

9. الاتحاد و التقاطع

تعريف اتحاد مجموعتين: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E.
اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين A أو B، نرمز بـ $A \cup B$ إلى هذا الإتحاد و نكتب:

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

بمعنى:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ أو } x \in B$$

مثال: لتكن المجموعتين $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 3, 4\}$
إذن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

تعريف تقاطع مجموعتين: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E.
تقاطع مجموعتين A و B هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B و نرمز لها بـ $A \cap B$. نكتب:

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

بمعنى:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B$$

مثال: لتكن المجموعتين $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 3, 4\}$
إذن: $A \cap B = \{1\}$

خواص: لتكن A، B و C ثلاثة مجموعات جزئية من E

- $A \cup B = B \cup A$ **(الإتحاد تبديلي)**
- $A \cap B = B \cap A$ **(التقاطع تبديلي)**
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ **(العنصر الماص بالنسبة لتقاطع)**
- $A \cup \emptyset = A$ **(العنصر الحيادي بالنسبة للإتحاد)**
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ **(عملية التقاطع تجميعية)**
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **(عملية الإتحاد تجميعية)**
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(التقاطع توزيعي على الإتحاد)**
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **(الإتحاد توزيعي على التقاطع)**

نتيجة:

- $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ أو } x \notin B$
- $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin B$

10. الفرق بين مجموعتين

تعريف: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E.
نسمي فرقا بين A و B و نرمز له الرمز $A - B$ أو $A\backslash B$ و هو عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في A و ليست موجودة في B . أي أن :

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin B$$

و نكتب:

$$A - B = \{x \in E : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

مثال: لتكن المجموعتين $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ فإن:
$A - B = \emptyset$، $B - A = \{3\}$ و عليه فإن $A - B \neq B - A$

11. الفرق التناظري بين مجموعتين

تعريف:
الفرق التناظري بين مجموعتين A و B و نرمز له الرمز $A\Delta B$ هو اتحاد العناصر الموجودة في A و ليست موجودة في B مع العناصر الموجودة في B و ليست موجودة في A أي :

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = B\Delta A$$

12. المتممة

تعريف: لتكن E مجموعة ما و A مجموعة جزئية من E اي $A \subseteq E$
متممة المجموعة A في E هي مجموعة عناصر E التي لا تنتمي الى A
و نرمز لها بـ C_E^A, $\overline{A}$ أو A^c. نكتب:

$$C_E^A = \{x \in E : x \notin A\} = E - A$$

بمعنى

$$x \in C_E^A \Leftrightarrow x \notin A$$

مثال: لدينا $A = \{1, 2\}$ و $E = \{1, 2, 3, 5\}$ فإن:

$$C_E^A = \{3, 5\}$$

خواص: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E، فإنه لدينا مايلي:

- $C_E^E = \emptyset$ و $C_E^{\emptyset} = E$
- $A \cup C_E^A = E$ و $A \cap C_E^A = \emptyset$
- $C_E^{C_E^A} = A$

- قانون مورغان : - $C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

- $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

- تناقص المتممة: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

تعريف: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E.
الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B و نرمز له بالرمز $A \times B$ هو المجموعة التالية:

$$A \times B = \{(x,y) \in A \times B : x \in A \text{ و } y \in B\}$$

تسمى (x,y) ثنائية، x فاصلة و y ترتية

مثال: لتكن المجموعتين $B = \{a,b,c\}$; $A = \{1,2\}$
الجداء الديكارتي يعطى بالعلاقة:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c)\},(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

ملاحظة:
1. تتمتع الثنائيات بالخاصية التالية :

$$(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow x = \alpha \text{ و } y = \beta$$

2. لابد من التمييز دائما بين : المجموعة $\{x,y\}$ ذات العنصرين x و y و الثنائية (x,y)
لان : $\{x,y\} = \{y,x\}$، لكن $(x,y) \neq (y,x)$ الترتيب مهم.

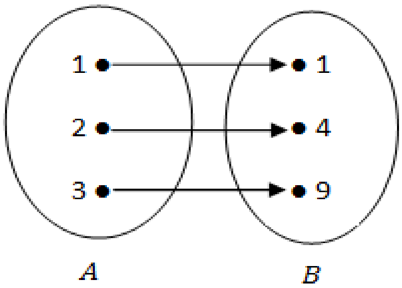
خواص: يتمتع الجداء الديكارتي بالخواص التالية :
1. $(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow (y,x) \in B \times A$
2. $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ أو $B = \emptyset$
3. $C \subseteq A$ و $D \subseteq B \Rightarrow C \times D \subseteq A \times B$

العلاقـــات

1. العلاقـــــة

تعريف: لتكن A و B مجموعتين، نسمي كل رابطة أو صلة بين عناصر من A و عناصر من B، علاقة بين عناصر من A و عناصر من B. أو علاقة بين A و B.
1. $(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow (y,x) \in B \times A$

مثال: $B = \{1,4,9\}$; $A = \{1,2,3\}$ فإن الجملة "هو مربع لـ" تشكل علاقة بين عناصر A و عناصر B، أي إذا كان $x \in A$ و $y \in B$ فيمكن الربط بينهما الكتابة :
" y مربع لــ x".



ملاحظة:

لإختصار الكتابة فإنه يرمز لعلاقة ما بين مجموعتين برمز ما مثل:

$\mathfrak{R},\ \mathfrak{I},\ \ *,\ \ldots$

مثال: لاحظ في المثال السابق لدينا " y مربع لـ x" و نكتب $x\mathfrak{R}y$ أي : $1\mathfrak{R}1,\ \ 2\mathfrak{R}4$

2. بيــــان علاقة

تعريف: لتكن $\mathfrak{R}$ علاقة ما بين مجموعتين A و B،تسمى مجموعة الثنائيات (x,y) من $A\times B$ التي ترتبط بالعلاقة $\mathfrak{R}$ أي $x\mathfrak{R}y$، بيان العلاقة $\mathfrak{R}$ و يرمز لبيان $\mathfrak{R}$ بالرمز G فنكتب:

$$G=\{(x,y)\in A\times B: x\mathfrak{R}y\}\subseteq A\times B$$

تسمى A مجموعة دء أو منطلق العلاقة $\mathfrak{R}$، و تسمى B مجموعة وصول أو مستقر العلاقة $\mathfrak{R}$.

مثال:

$$G=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}\subseteq A\times B$$

لان:

$$A\times B=\{(1,1),(1,4),(1,9),(2,1),(2,4),(2,9),(3,1),(3,4),(3,9)\}$$

3. العلاقة العكسية

تعريف:

إذا كانت $\mathfrak{R}=(G,A,B)$ علاقة بين A و B بيانها G، فإن العلاقة العكسية هي علاقة بين عناصر B و عناصر A. أي تربط عنصرا من B بعنصر من A و نرمز لها بالرمز $\mathfrak{R}^{-1}$.

$$\mathfrak{R}^{-1}=\left(G^{-1},B,A\right)$$

أي أن:

$$x\mathfrak{R}y\Leftrightarrow y\mathfrak{R}^{-1}x$$

أي أن:

$$G^{-1}=\left\{(y,x)\in B\times A: y\mathfrak{R}^{-1}x\right\}$$

مثال: في المثال السابق يكون $\Re^{-1}$ تعني "هوجذر لـ" أي

$$G^{-1} = \{(1,1),(4,2),(9,3)\}$$

التطبيقــات (التوابع)

1. تعريف تطبيق

تعريف:

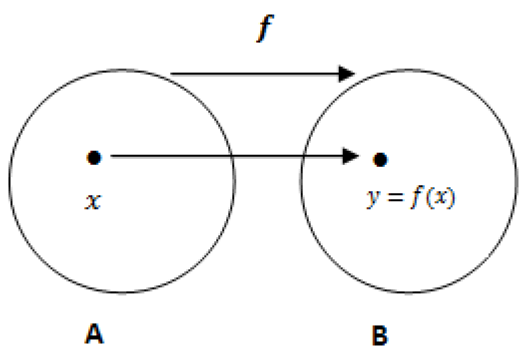
نقول عن علاقة f بين عناصر A و عناصر B بيانها G، أي $f = (G,A,B)$ (ليس بالضرورة أن يكون A و B مختلفين)، أنها تطبيق أو تابع معرف على A و يأخذ قيمه في B أو تطبيقا لـ A في B إذاا قابل كل عنصر $x \in A$ عنصر وحيد $y \in B$ وفق العلاقة f، و نرمز في هذه الحالة لرمز الارتباط xfy (بين عنصرين x, y بالعلاقة f) بالرمز $y = f(x)$ ، أي:

$$\forall x,y \in A, x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow \text{تطبيق } f$$

و نكتب

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

و يسمى منطلق التطبيق f في هذه الحالة بمجموعة تعريف f.



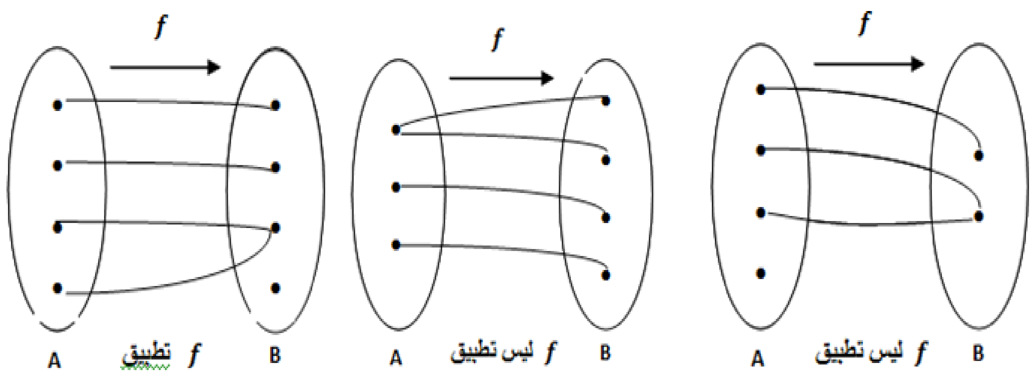
ترميز:

- x تسمى سابقة، y تسمى صورة.

- A تدعى مجموعة البدء (السوابق).

- B تدعى مجموعة الوصول (الصور)

مثال:



مثال: ليكن f معرف بـ:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

f تطبيق لان أي عنصر $x \in \mathbb{R}$ يقابله عنصر وحيد y بحيث $y = x^2 \in \mathbb{R}_+$

2. تطابق تطبيقين

تعريف: ليكن $f: A \to B$ و $g: C \to D$ تطبيقين بحيث:
$H \subseteq C$ و $H \subseteq A$ أي $(H \subseteq A \cap C)$
نقول أن f و g منطابقان في H إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
$$\forall x \in H: f(x) = g(x)$$

نتيجة: إذا كان لدينا $f: D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقين، فنعرف التطبيقات التالية على المجموعة $D_1 \cap D_2$ أي:
$$\forall x \in D_1 \cap D_2: (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$: (f.g)(x) = f(x).g(x)$$
و
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$ عندما $g(x) \neq 0.$

مثال:

$g(x) = \sqrt{1-x}$ ، $f(x) = \sqrt{x}$
$D_g =]-\infty, 1[$ ، $D_f = [0, +\infty[$

حيث تشير D_f مثلا إلى مجموعة تعريف f، و يكون: $f + g$ و $f.g$ معرفين على مجموعة $D_f \cap D_g = [0, 1]$

3. تساوي تطبيقين

تعريف:
إذا كان $f, g : A \to B$ تطبيقين، نقول أن f و g متساويتين و نكتب $f = g$ إذا إذا تحقق الشرط : $\forall x \in A:\ f(x) = g(x)$.

مثال:

$f(x) = x$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$D_f = \mathbb{R}$ ، $D_g = \mathbb{R}^*$ و $D_f \cap D_g = D_{f.g} = \mathbb{R}^*$

فإنه رغم أن : $\forall x \in D_{f.g}:\ f(x).g(x) = 1$.

فإن $f(x).g(x)$ لا يساوي التابع $h(x) = 1$ حيث $D_h = \mathbb{R}$ لأن :

$D_h = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^* = D_{f.g}$

4. التطبيق الثابت

تعريف:
إذا كان $\forall x \in A:\ f(x) = k$ حيث k مقدار ثابت، فنقول أن f ثابت على A.

5. التطبيق المطابق

تعريف:
التطبيق الحيادي (أو المطابق) هو التطبيق الذي يحقق:

$\forall x \in A:\ f(x) = x$

و نرمز له بالرمز Id_A. أي أن: $\forall x \in A:\ Id_A(x) = x$

6. خواص تطبيق (التطبيق المتباين-الغامر-المتقابل):

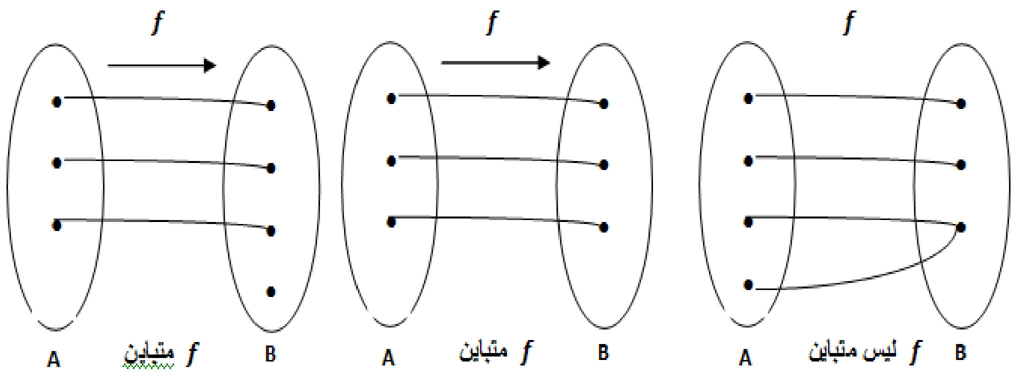
تعريف التطبيقات المتباينة (تباين تطبيق): ليكن $f: A \to B$ تطبيقا نقول أن :
نقول أن f متباين أو تباين إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من B سابقة على الأكثر من A. أي أن:

f متباين $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A:\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

أو

f متباين $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

مثال 1:



مثال 2: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

نلاحظ أن العدد $\sqrt{2}$ يقبل سابقتين و هما (-1) و 1 أي $f(-1) = f(1)$ لكن العدد $1 \neq -1$ و منه f غير متباين.

مثال 3: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{2}{3x}$$

f متباين $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}^* : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$???

لدينا

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{3x_1} = \frac{2}{3x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3x_1}\frac{2}{3} = \frac{2}{3x_2}\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$

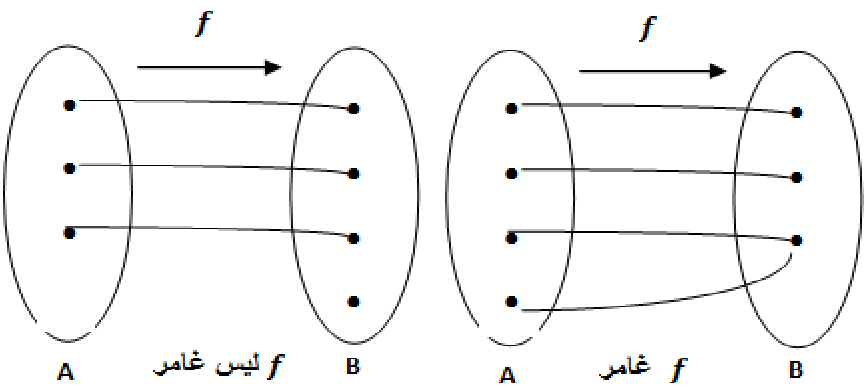
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

إذن f متباين.

تعريف التطبيقات الغامرة (الغمر): ليكن $f: A \to B$ تطبيقا
نقول أن f غامر أو غمر إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من B سابقة على الأقل من A.
أي أن:

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists\, x \in A:\ y = f(x)$$

مثال 1:



مثال 2: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{x-1}$$

لندرس الغمر

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists\, x \in \mathbb{R} - \{1\}:\ y = f(x)\ ?$$

لدينا

$$y = f(x)$$
$$y = \frac{x}{x-1}$$
$$x = \frac{y}{y-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$$

نلاحظ أن x دائما موجود و منه f غامر.

مثال 3: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R} - \{2\}:\ y = f(x)\ ?$$

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x-1}{x+2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-1-2y}{y-1}$$

إذن $y = 1$ ليست لها سابقة في $\mathbb{R} - \{2\}$

تعريف التطبيق التقابلي: ليكن $f: A \to B$ تطبيقا

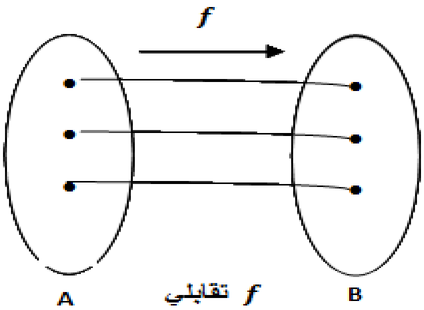
نقول أن f تطبيق تقابل (او تقابلي) إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من B سابقة وحيدة من A. نكتب:

$$f \text{ تقابلي } \Leftrightarrow \forall\, y \in B, \exists!\, x \in A:\ y = f(x)$$

ملاحظة:

f تطبيق تقابلي إذا كان متباينا و غامرا.

مثال 1:



مثال 2: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

التطبيق f تطبيق تقابلي لأن المعادلة $y = \sqrt{x^2 + 1}$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}_+$ هو

$$x = \sqrt{y^2 - 1}$$

مثال 3: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

f تطبيق ليس متباين و ليس غامر. لكن التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

هو تطبيق غامر و ليس متباين. و التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

هو تطبيق متباين و ليس غامر. و منه التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

هو تطبيق تقابلي.

7. التطبيق العكسي

تعريف التطبيق العكسي: إذا كان $f: A \to B$ تطبيقا تقابليا

$$x \to y = f(x)$$

فإن لـ f تطبيقا عكسيا، نرمز له بـ f^{-1} و هو تقابل أيضا، معرف كما يلي:

$$f^{-1}: A \to B$$

$$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$$

و نقول عن التطبيقين f و f^{-1} أنهما متعاكسان لان

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ و } f^{-1}(f(y)) = x$$

مثال: التطبيق f المعرف بـ

$$f: \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

تطبيق تقابلي و يقبل تطبيق عكسي هو:

$$f^{-1}: [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$$

$$y \mapsto f^{-1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

8. الصورة المباشرة و الصورة العكسية وفق تطبيق

تعريف : ليكن $f: A \to B$ و $D \subseteq A$، نسمي الصورة المباشرة للمموعة D وفق f ونرمز لها بالرمز $f(D)$ المجموعة التالية:

$$f(D) = \{y = f(x) \in B : x \in D\}$$

ونعرف الصورة العكسية للمجموعة C $(C \subseteq B)$ بواسطة f ونرمز لها بالرمز $f^{-1}(D)$ للمجموعة :

$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$$

9. تركيب تطبيقين

إذا كان f و g تطبيـقين حيث : $f: D_f \to R_f$ و $g: D_g \to R_g$

إذا كان $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ في هذه الحالة يمكن أن نعرف ناتج تركيب g بـ f بأنه التطبيق:

$$g \circ f: D_{g \circ f} \to R_{g \circ f}$$

$$x \to g \circ f(x) = g[f(x)]$$

حيث:

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ مجموعة تعريف لـ $g\circ f$

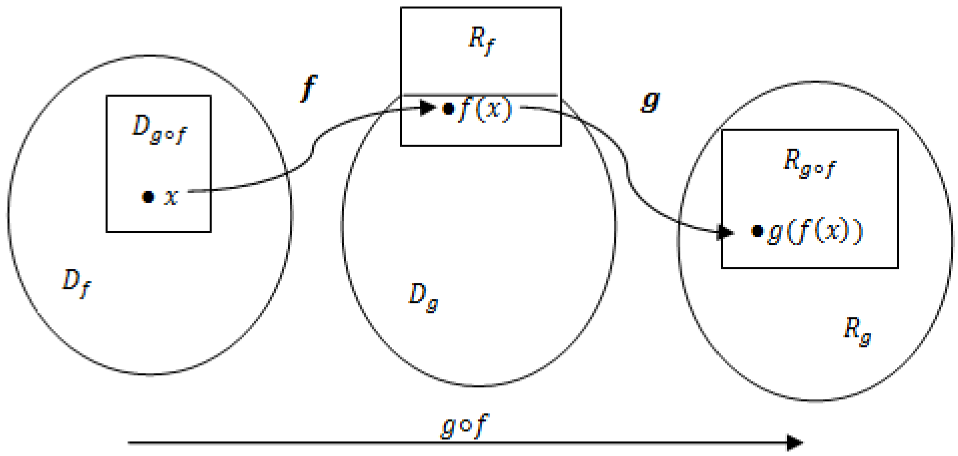
$R_{g\circ f} = \{g(f(x)) : x \in D_{g\circ f}\}$ مجموعة وصول لـ $g\circ f$

ملاحظة:

- تكون $g\circ f$ معرفة على D_f بكاملها عندما تكون $R_f \subseteq D_g$. و لدينا

- مجموعة تعريف $g\circ f$ هي مجموعة جزئية من مجموعة تعريف f أي $D_{g\circ f} \subseteq D_f$

- مجموعة وصول $g\circ f$ هي مجموعة جزئية من مجموعة وصول g أي $R_{g\circ f} \subseteq R_g$



مثال: ليكن f و g تطبيقين حيث:

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-$

$x \to f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad\qquad$ $x \to f(x) = -(x^2+1)$

مجموعة تعريف $g\circ f$ هي:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+$$

- مجموعة تعريف $f\circ g$ هي:

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -(x^2+1) \in \mathbb{R}_+\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -(x^2+1) \geq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : (x^2+1) \leq 0\} = \emptyset$$

أي أن $f\circ g$ ليس معرفا عند أي نقطـة و السبب أن $R_g \cap D_f = \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$

ملاحظة هامــة :

عمليـة تركيب التطبيقــات عموما ليسـت تبديلية أي $f\circ g \neq g\circ f$.

10. التطبيقات الرتيبة

إذا كان $(A, \leq)$ **و** $(B, \leq)$ **مجموعتين مرتبتين و كان** $f: E \to F$ **تطبيقا**

- **نقول** f **متزايد إذا تحقق الشرط:**

$$\forall x, y \in A: x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- **نقول** f **متزايد تماما إذا وفقط إذا كان:**

$$\forall x, y \in A: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- **نقول** f **متناقص إذا وفقط إذا كان:**

$$\forall x, y \in A: x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- **نقول** f **متناقص تماما إذا وفقط إذا كان:**

$$\forall x, y \in A: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

نقول أن f **رتيبة إذا كانت متزايدة او متناقصة**

نقول أن f **رتيبة تماما إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما.**

11. العناصر الحادة، العنصر الأكبر، العنصر الأصغر، الحد الاعلى و الادنى

لتكن $(E, \leq)$ **مجموعة مرتبة و لتكن** A **مجموعة غير خالية** $\emptyset \neq A \subseteq E$

- **نقول أن** X **من** E **حــاد أعـلـى للمجموعة** A **إذا وفقط إذا:**
  $(\forall a \in A, a \leq X)$ **هنا نقول أن** A **محدودة من الأعلى.**
- **نقول أن** x **من** E **حــاد الأسفل (الأدنى) للمجموعة** A **إذا وفقط إذا:**
  $(\forall a \in A, a \geq x)$ **هنا نقول أن** A **محدودة من الأسفل.**
- **إذا كانت** A **محدودة من الأعلى والأسفل في آن واحد، نقول أن** A **مجموعة محدودة أي:**

$$A \text{ محدودة } \Leftrightarrow (\exists x, X \in E, \forall a \in A, x \leq a \leq X)$$

- **نقول أن** M **من** E **أكبر عنصر من** A **إذا:**
  $M \in A$ **و** $(\forall a \in A, a \leq M)$**. نرمز إلى هذا العنصر إن وجد بالرمز** $max(A)$**.**

- **نقول أن** m **من** E **أصغر عنصر من** A **إذا:**
  $m \in A$ **و** $(\forall a \in A, m \leq a)$**. نرمز إلى هذا العنصر إن وجد بالرمز** $min(A)$**.**

- **نقول أن** s **من** E **الحد الأعلى للمجموعة الجزئية** A **إذا وفقط إذا كان** s **أصغر الحـواد العليا و نرمز إلى هذا إن وجد بالرمز** $sup(A)$**.**

- **نقول أن** I **من** E **الحد الأدنى للمجموعة الجزئية** A **إذا وفقط إذا كان** I **أكبر الحواد الدنيا عن** A **، و نرمز إلى هذا العنصر إن وجد بالرمز** $Inf(A)$

مثال1:

لدينا $E = \mathbb{R}$; $A =]1,3]$

- $[3, +\infty[$ مجموعة الحواد العليا $\Leftarrow sup(A) = 3$
- $]-\infty, 1]$ مجموعة الحواد السلفى $\Leftarrow inf(A) = 1$
- $max(A) = 3$ لان $3 \in A$
- $min(A)$ غير موجود لان $(1 \notin A)$
- المجموعة A محدودة لأنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل

مثال2:

لدينا $E = \mathbb{R}$; $A =]5, +\infty[$

- A لا تقبل مجموعة حواد عليا
- $]-\infty, 5]$ مجموعة الحواد السفلى $\Leftarrow inf(A) = 5$
- $max(A)$ غير موجود
- $min(A)$ غير موجود
- A ليست محدودة لأنها محدودة من الأسفل فقط

مثال2:

$A = \{1,2,3\}$ محدودة في $(\mathbb{N}, \leq)$، $\forall x \in A:\ 0 \leq x \leq 5$

مجموعة الحواد العليا لـ A في $\mathbb{N}$ هي $\{3,4,5\}$ و أصغرها هو 3 إذن:

$sup(A) = 3$.

مجموعة الحواد الدنيا لـ A في $\mathbb{N}$ هي $\{0,1\}$ و أكبرها هو 1 إذن: $inf(A) = 1$.

نتيجة[2] 1: إذا كان $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ فإن:

$$min(A) \Rightarrow inf(A)$$
$$max(A) \Rightarrow sup(A)$$
$$inf(A \cup B) = max(inf(A), inf(B))$$
$$sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$$

نتيجة 2: إذا كان $A \cap B \subseteq \mathbb{R}$ $\neq \emptyset$ فإن:

$$sup(A \cap B) \leq inf(sup(A), sup(B))$$
$$inf(A \cap B) \geq sup(inf(A), inf(B))$$

مثال1:

لتكن $A = \{0,2,3,5\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$

لدينا $A \cap B = \{2,3\}$

$$sup(A \cap B) = 3$$
$$min(sup(A), sup(B)) = min(5,4) = 4$$
$$3 = sup(A \cap B) < min(sup(A), sup(B)) = 4$$
$$2 = inf(A \cap B) > max(inf(A), inf(B)) = max(0, 1) = 1$$

[2] يمكنكم الاطلاع على برهان النتيجة في كتاب عناصر من التحليل الرياضي ' التوابع لمتغير حقيقي واحد' لقادة علاب

مثال2:

لتكن $C = [-1, 3] \cup [5, 10[$

إذن

$sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B)) = max(3, 10) = 10$

$inf(A \cup B) = max(inf(A), inf(B)) = max(-1, 5) = 5$

12. المجالات

ليكن $a, b \in \mathbb{R} / E = \mathbb{R}$

1. **نسمي مجالا مفتوحا طرفاه a أو b كل جزء من $\mathbb{R}$ حيث يأخذ أحد الأشكال :**

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

و نسمي أيضا مجالا مفتوحا المجموعة التالية: $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

2. **نسمي مجالا مغلق طرفاه a و b الجزء التالي :**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

3. **نسمي مجالا نصف مفتوح (أو نصف مغلق) طرفاه a و b كل جزء من $\mathbb{R}$ حيث يأخذ أحد الأشكال التالية:**

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

مثال:

$$[0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\} = \mathbb{R}_+$$
$$]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} : 0 \geq x\} = \mathbb{R}_-$$
$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

ملاحظة:

- يسمى العدد $b - a$ بطول المجال الذي طرفاه a و b
- نسمي العدد $\frac{a+b}{2}$ مركز المجال الذي طرفاه a و b
- $[a, a] = \{a\}$
- $]a, a] = [a, a[=]a, a[= \emptyset$

13. القيمة المطلقة

تعريف:

القيمة المطلقة هي تطبيق يرمز له بـ |.| معرف كما يلي:

$$|.|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & si \ x \geq 0 \\ -x & si \ x \leq 0 \end{cases}$$

خواص:

- $|x| > 0, \ (x \neq 0)$
- $|0| = 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x| = max(-x, x)$ يكون عليه و $|x| \geq x, \ |x| \geq -x$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ (y \neq 0)$
- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \ (x \in [-a, a]$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ أو $x \leq -a$

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

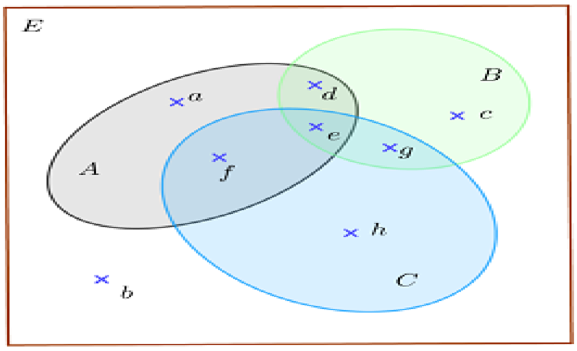
قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

رياضيات 1

السلسلة رقم 01

<u>التمرين 01 :</u>

1- ليكن لدينا مخطط Venne التالي حيث A, B, C **ثلاث أجزاء من المجموعة** E **و** a, b, c, d, e, f, g, h **عناصر من** E



2- هل العلاقات التالية صحيحة أم خاطئة و لماذا :

1. $g \in A \cap \bar{B}$;
2. $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$;
3. $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$;
4. $f \in C \setminus A$;
5. $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
6. $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
7. $\{a, f\} \subset A \cup C$.

<u>التمرين 02 :</u>

1- أكتب المجموعات التالية على شكل مجالات أو إتحاد مجالات

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x + |x|| \geq 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 4 \text{ و } x^2 \neq 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x + 1} < 1\}$$

2- باستعمال القيمة المطلقة, فسر علاقة انتماء x **للمجموعات التالية على شكل شروط على** x.

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\;,\; x \in]3, 7] \;,\; x \in [-1, 3] - \{1\} \;,\; x \in [-3, 5]$$

التمرين 03 :

التطبيق f المعرف من $\mathbb{R} - \{2\}$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف ب : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ هل هو متباين؟ غامر؟
ماهي الشروط التي نفرضها على مجموعة الوصول حتى تكون f تقابل ؟ في هذه الحالة أوجد التطبيق العكسي.

التمرين 4 :

أوجد الحد الأعلى و الأدنى و العنصر الأكبر و الأصغر للمجموعات التالية إن وجد :

$A =]3, 7]$

$B =] -\infty, -2]$,

$C = [2, +\infty[$,

$D = [-1, 3] \cup \{7\}$,

$E =] -3, 5[$,

$F = \left\{x = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

$G = \left\{x = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

الفصــل الثــاني: مفاهيم عامة حول المتتــاليات

المتتاليات العددية:

1. تعاريف و ترميز

تعريف و ترميز:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق من $\mathbb{N}$ (أو جزء غير منته من $\mathbb{N}$) نحو $\mathbb{R}$ (أو$\mathbb{C}$)

أي:

$$u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \ (\text{أو } \mathbb{C})$$

$$n \rightarrow u(n) = u_n$$

و تسمى إحدى المجموعات التالية:

$$u(\mathbb{N}) = \{u(n): n \in \mathbb{N}\} = \left\{u_n: n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \{u(0), u(1),...\} = \{u_0, u_1,...\} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

مجموعة حدود المتتالية العددية، و تسمى القيم :

$$u(0) = u_0, u(1) = u_1, u(n) = u_n,...$$

بحدود المتتالية، و يسمى u_0 الحد الأول و u_1 احد الثاني ... و u_n بالحد النوني أو الحد العام، و نكتب حدود المتتالية حسب تزايد الأدلة بغض النظر عن ايها أكبر، أي نكتب : $u_0, u_1, u_2, u_3,...,$ حسب تزايد الأدلة $0, 1, 2,...$.

و بمعرفة الحد العام يمكن معرفة بقية الحدود و بالعكس، و ذلك إعطاء n قيما متتالية من $\mathbb{N}$. و كلمة متتالية جاءت من أن الحدود تتالى، أي يأتي الواحد تلو الأخرى.

إن دراسة متتالية ما تعني دراسة حدها العام u_n، و سنأخذ دائما الرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_n$ للدلالة على المتتالية ذات الحد العام u_n.

2. المتتالية التدريجية (التراجعية)

تعريف:

هي التي يعطى فيها الحد العام (النوني) بدلالة الحدود التي تسبقه. و منها الشكل التالي:

$$\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f هي العلاقة بين u_n و u_{n+1}

مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 4 + u_{n-1} \end{cases}$$

فإن $u_1 = 4 + u_0 = 5$، $u_2 = 4 + u_1 = 9$ أي عوضنا $n = 0$ ثم $n = 1$... الخ في العلاقة المعطاة

3. المتتالية المحدودة

تعريف:

1- نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$ إذاا كانت مجموعة قيمها $\{u_0, u_1, ...\}$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$.

أي أن $(u_n)_n$ محدودة من الأعلى إذاا تحقق الشرط:

M حاد أعلى $\quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq M$

2- نقول أن $(u_n)_n$ محدود من الأدنى إذاا تحقق الشرط:

m حاد أدنى $\quad \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq M$

3- نقول أن $(u_n)_n$ محدودة إذاا كانت محدودة من الأعلى و من الأدنى أي أن:

$(u_n)_n$ محدودة $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: m \leq u_n \leq M$

أو

$(u_n)_n$ محدودة $\Leftrightarrow \exists \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq k$

إن الشرطين المذكورين في **(3)** متكافئين، أي تحقق أي منهما يؤدي إلي تحقق الثاني و بالعكس

مثال: المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ:

$$u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \to u_n = \frac{1}{n}$$

محدودة لأنه $\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

بينما $u_n = n^2$

4. نهاية متتالـــية:

تعريف:

نقول أن للمتتالية $(u_n)_n$ نهاية $l \in \mathbb{R}$ أو أن المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو العدد l و نرمز لذلك بالرمز : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ أو $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

و إذا لم يتحقق ذلك فنقول أن المتتالية ليست متقاربة أو أنها متباعدة (أي نهايتها ليست عددا حقيقيا أو لا تقبل نهاية).

نظرية[3] (وحدانية النهاية)

إذا تقاربت متتالية عددية ما $(u_n)_n$ نحو عدد l فإن النهاية l تكون وحيدة أي أن:

$$(u_n)_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_n = l \\ \text{و} \\ l \text{ وحـــــيد} \end{cases}$$

مثال: المتتالية $u_n = (-1)^n$ فإن:

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ عندما n عددا زوجيا

$\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$ عندما n عددا فرديا

فعلى الرغم من وجود النهاية l في الحالتين إلا أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة لأن l ليست وحيدة $l = 1$ و $l = -1$.

نظرية:

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية، عندئذ إذا كانت $(u_n)_n$ متقاربة فإن $(u_n)_n$ محدودة. و العكس ليس صحيحا في الحالة العامة.

مثال: $u_n = (-1)^n$ نرى أن $|u_n| \le 1$ محدودة. و

$$u_n = \begin{cases} 1; & \text{n زوجي} \\ -1; & n \text{ فردي} \end{cases}$$

و $(u_n)_n$ ليست متقاربة لان لها نهايتين 1 و -1.

---

[3] يمكنكم الاطلاع على برهان نظريات هذا الفصل في كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر أو كتاب عناصر من التحليل الرياضي 'التوابع لمتغير حقيقي واحد' لقادة علاب.

نظريات:

1- إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية متقاربة نحو عدد l فإن:

- إذا كان $l > a$ عندئذ $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1: u_n > a$

- إذا كان $l < a$ عندئذ $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2: u_n < a$

2- إذا كانت $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين متقاربتين، و كانت:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n > v_n$$

عندئذ تكون : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

3- إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين، عندئذ يكون لدينا:

- المتتاليات $(u_n \pm v_n)_n$ ، $(u_n . v_n)_n$ و $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$، حيث $(v_n \neq 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \neq 0$) كلها متقاربة.

- لدين:

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n \pm \lim_{n \to +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n . v_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n . \lim_{n \to +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n}$$

مثال: **لتكن $u_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ فإن:**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(3+\frac{2}{n})} = \frac{2}{3}$$

لأن المتتاليتين $(2 + \frac{1}{n})$ و $\left(3 + \frac{2}{ى}\right)$ متقاربين.

نظريات:

عند دراسة متتالية $(w_n)_n$ معقدة نوعا ما، فنحاول عندئذ كتابة (w_n) على شكل مجموعتين (أو أكثر) أبسط منها أو على شكل جداء متتاليتين أو على شكل قسمة متتاليتين و العكس ليس صحيحا عموما

مثال: $w_n = u_n + v_n$ أو $w_n = u_n . v_n$ أو $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

ندرس المتتالتين البسيطتين u_n و v_n، فأن كانت متقاربة فإن w_n متقاربة.

لكن لاحظ :

$u_n = n$، $v_n = n^2$ متباعدتين في حين أن : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n}$ متقاربة.

و $u_n =- n + \frac{1}{n}$ ، $v_n = n$ متباعدتين في حين أن : $u_n + v_n = \frac{1}{n}$ متقاربة.

نظريات:

1- إذا كانت $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين إحداهما محدودة و لأخرى متقاربة نحو الصفر $(l = 0)$، عندئذ تكون المتتالية الجداء $(u_n . v_n)_n$ متقاربة نحو الصفر أيضا.

2- إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية متقاربة نحو l و ذات حدود موجة $\left(u_n \geq 0\right)$، فإن المتتالية $k \in \mathbb{N}^*$، $\left(\sqrt[k]{u_n}\right)_n$ متقاربة أيضا و لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \to +\infty} u_n} = \sqrt[k]{l}$$

3- إذا كانت $(v_n)_n$ متتالية ذات حدود موجة تماما $\left(\forall n: v_n > 0\right)$، و كانت $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = l$ عندئذ تكون المتتالية $\left(\sqrt[n]{v_n}\right)_n$ متقاربة أيضا و لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{v_n} = l$$

مثال:

1- لتكن المتتالية المعرفة حدها العام $u_n = \frac{sinn}{n}$ ، إن $u_n = \frac{1}{n}. sinn$ حيث $v_n = sinn$ محدودة لأن $\left|v_n\right| \leq 1$ و $w_n = \frac{1}{n} \to 0$ لما $n \to + \infty$ فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ (حسب الجزء الأول من النظرية).

2- أحسب $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[5]{\frac{n}{3n+2}}$

بوضع $u_n = \frac{n}{3n+2}$ نرى أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n(3+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to+\infty} 1}{\lim_{n\to+\infty} (3+\frac{2}{n})} = \frac{1}{3}$$

و حسب الجزء الثاني من النظرية فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{\frac{n}{3n+2}} = \sqrt[5]{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n+2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

3- أحسب $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+4}}$

لدينا $v_n = \frac{n+1}{n+4} > 0$ **و** $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ **. إذن**

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+4}} = 1$ **(حسب الجزء الثالث من النظرية)**

نظرية (الحصر):

إذا كانت $(u_n)_n$ **،** $(v_n)_n$ **و** $(w_n)_n$ **متتاليات عددية تحقق الشرط:**

$u_n \leq w_n \leq v_n$ **إنطلاقا من رتبة معينة** $n \geq N$ **و كانت:**

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$ **فإن** $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$

5. المتتاليات الرتيبة

تعريف:

لتكن $(u_n)_n$ **متتالية عددية، نقول أن** $(u_n)_n$ **متزايدة (متزايدة تماما)إذا تحقق ما يلي:**

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_{n+1} \ (u_n < u_{n+1})$$

أو:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n \geq 0 \ (u_{n+1} - u_n > 0)$$

و نقول أن $(u_n)_n$ **متناقصة (متناقصة تماما) إذا تحقق مايلي:**

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq u_{n+1} \ (u_n > u_{n+1})$$

أو:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n \leq 0 \; (u_{n+1} - u_n < 0)$$

فالمتتالية تعني أن : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ...$، أي أن قيمها تزداد أو تكبر.

و متتالية متناقصة تعني أن $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq ...$ أي أن قيمها تنقص أو تصغر.

و نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ رتية إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

و نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ رتية تماما إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما.

مثال:

$u_n = \frac{1}{n}$ متناقصة لأن: $u_1 = 1 \geq u_1 = \frac{1}{2} \geq u_3 = \frac{1}{3} \geq ...$

و $v_n = n$ متزايدة لأن: $v_1 = 0 \leq v_1 = 1 \leq v_3 = 2 \leq ...$

ملاحظة:

نتبين رتابة متتالية متتالية بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ عندما تكون المتتالية $(u_n)_n$ موجبة يمكننا أيضا مقارنة 1 و الكسر $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

نظرية

1- كل متتالية $(u_n)_n$ متزايدة (متزايدة تماما) و محدودة من الأعلى تكون متقاربة نحو حدها الأعلى.

2- كل متتالية $(v_n)_n$ متناقصة (متناقصة تماما) و محدودة من الأدنى تكون متقاربة نحو حدها الأدنى.

3- كل متتالية رتيبة (رتيبة تماما) و محدودة تكون متقاربة.

6. المتتاليات المتجاورة

تعريف:

نقول عن متتاليتين، إحداهما $(u_n)_n$ متزايدة و الأخرى $(v_n)_n$ متناقصة إنهما متجاورتات إذا قبل الفرق $u_n - v_n$ نهاية معدومة.

نظرية:

إن كل متتاليتين متجاورتين متقاربتان و لهما نفس النهاية.

مثال: هل المتتاليتين متجاورتان :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, & n \in \mathbb{N} \\ v_n \end{cases}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!}$$

و منه $(u_n)_n$ متزايدة. و من جهة أخرى لدينا:

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \left(u_{n+1} - u_n\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

و منه $(v_n)_n$ متناقصة. و لدينا من عبارة $(v_n)_n$:

$$v_n = \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) \Rightarrow \left(v_n - u_n\right) = \frac{1}{n!}\Big)$$

و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ و بالتالي $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متجاورتان.

7. المتتالية الحسابية

تعريف:
المتتالية الحسابية أو المتتابعة الحسابية هي متتالية من الأعداد حيث يكون الفرق بين أي حدين متتالين ثابتا. و نكتب

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n + r$$

مثال:
3، 5، 7، 9، 11، 13، ... هي متتالية حسابية لها أساس يساوي 2. أي أنّ 3، 5، 7 هي حدود من هذه المتتالية والأساس هو 2 هو العدد المضاف بين كل حدّين متتاليين.

إذا كان الحد الأول من المتتالية الحسابية هو u_1 و الفرق بين حدين متتاليين هو r عندها يعبر عن الحد ذي الترتيب n من متتالية حسابية بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

أو بشكل عام

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

مثال:

$8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$ هي حدود متتالية حسابية حدها الأول هو 0 أساسها هو $r\ =\ 2$.

تغيرات متتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = r$

- إذا كان $0 < r$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان $0 > r$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

قانون الوسط الحسابية

إذا كانت $a,\ b,\ c$ حدودا متعاقبة من متتالية حسابية، فإن: $a + c = 2b$

مجموع حدود متتالية حسابية

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$$

أي المجموع= (عدد الحدود)*((الحد الأول+الحد الأخير)/2)

عدد الحدود= (رتبة الحد الأخير-رتبة الحد الأول+1)

و بشكل عام

$$S = (n - p + 1) \times \frac{u_n+u_p}{2}$$

8. المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتالية الهندسية هي متتالية عددية كل حد (جملة) من حدودها بعد الأول يُحصل عليه بضرب الحد الذي قبله في عدد ثابت غير منعدم يدعى قدر النسبة (ويعرف كذلك بالأساس والنسبة المشتركة). هكذا، يكون شكل متتالية هندسية ما على الشكل التالي:

$$v_1, v_1q, v_1q^2, v_1q^3, v_1q^4, ...$$

لايجاد الحد النوني لمتتالية هندسية، نستعمل المعادلة التالية:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

حيث v_1 هو الحد الأول و q هي الفرق العام (يُغير الرمز هنا لتمييز المتتالية الهندسية عن الحسابية), و n هي عدد الحدود.

و بشكل عام

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

مثال:

3، 6، 12، 24 هي متتالية هندسية لها أساس يساوي 2 و حدها الاول هو 3 لأن قسمة حد ما على الحد الذي سبقه تعطي دائما 2 (6 مقسومة على 3 تعطي 2، و 12 مقسومة على 6 تعطي 2 و 24 مقسومة على 12 تعطي 2، وهكذا).

تغيرات متتالية هندسية

(v_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول v_0 و أساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}/v_n = q$

- **إذا كان $0 < q < 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان $0 < q < 1$ و $v_0 < 0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان $q < 1$ و $v_0 < 0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان $q > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.**

قانون الوسط الهندسي

إذا كانت a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية، فإن: $a.c = b^2$

مجموع حدود متتالية هندسية

إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = \text{الحد الأول} \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

عدد الحدود= (رتبة الحد الأخير-رتبة الحد الأول+1)

إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = (n+1)v_0$

نهاية متتالية هندسية

- **إذا كان $q > 1$ و $v_0 > 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ اذن المتتالية (v_n) متباعدة**

- **إذا كان $q < 1$ و $v_0 < 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ اذن المتتالية (v_n) متباعدة**
- **$q \in]-1;1[$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة**
- **$q \leq -1$ فإن المتتالية (v_n) متباعدة (نهاية غير موجودة)**

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك **السنة الأولى**

رياضيات 1

السلسلة رقم 02

التمرين 01 :

1- من أجل كل متتالية من المتتاليات ذات الحد العام (u_n)، أوجد رتة الحد الذي إنطلاقا منه تكون المتتالة معرفة، و أحس مجموع الحدود اثالثة الأولى.

$$u_n = \sqrt{n^2 + 4n} \quad ، \quad u_n = (-1)^n\sqrt{n} \quad ، \quad u_n = \frac{n+1}{n^2-1}$$

2- أدرس رتابة المتتاليات التالية:

$$u_n = 2^n - n \quad ، \quad u_n = 2n^3 + n \quad ، \quad u_n = -\frac{1}{2+\sqrt{n}}$$

التمرين 02:

أدرس طبيعة المتتاليات التالية:

$$u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}} \quad ، \quad u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}-17} \quad ، \quad u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n} \quad ، \quad u_n = \frac{2n+1}{n+325}$$

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n \quad ، \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

التمرين 03:

لتكن (u_n) المتتالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- **أثبت أنه من أجل كل n، $u_n \leq 4$.**
- **برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة.**
- **إستنتج أن (u_n) متقاربة**

التمرين 04:

لتكن (u_n) المتتالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- **أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة.**
- **أثبت أنه من أجل كل n، $0 < u_n \leq 3$.**
- **إستنتج أن (u_n) متقاربة نحو نـهاية l.**
- **عين l.**

الفصـــل الثـــالث: التـــوابع الحقيقيـــة بمتغيـــر حقيقـــي

عموميات على الدوال

1. مجموعة تعريف

تعريف و ترميز:

الدالة f بمتغير حقيقي، هي كل تطبيق f معرف على $\mathbb{R}$ و يأخذ قيمة في $\mathbb{R}$ (أو معرف على جزء من $\mathbb{R}$ و يأخذ قيمة في جزء من $\mathbb{R}$)، أي:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

أو

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

- المجموعة D_f هي مجال تعريف الدالة f حيث:

$$D_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} / \text{معرفة } f\}$$

- $C_{\mathbb{R}}$ هي بيان الدالة f حيث:

$$C_{\mathbb{R}} = \left\{(x, f(x) / x \in D_f\right\}.$$

مثال:

1. دوال كثيرات الحدود ($ax^n + bx^{n-1} + \dots, sin(x), cos(x)$) معرفة على $\mathbb{R}$ أي $D_f = \mathbb{R}$.
2. الدوال الناطقة: $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$.
3. الدالة الجذرية: $f(x) = \sqrt{g(x)} \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$.
4. الدالة الناطقة و مقامها دالة جذر:
   $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}} \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$.
5. الدالة اللوغاريتمية : $f(x) = ln[g(x)] \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0\}$.

مثال:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \frac{1}{x}$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*.$$

مثال:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0\} =]1, +\infty[$$

2. شفاعية دالة (زوجية / فردية):

تعريف:

لتكن f دالة بمتغير حقيقي، نقول أن:

- f دالة زوجية يعني أن :

$$\forall x \in D_f, (-x) \in D_f: f(-x) = f(x).$$

نقول ان بيان الدالة f متناظر بالنسبة للمستقيم (oy) .

- f دالة فردية يعني أن :

$$\forall x \in D_f, (-x) \in D_f: f(-x) = -f(x).$$

نقول ان f متناظرة بالنسبة لنقطة المبدأ O.

النهايات

1. تعريف النهاية

تعريف:

ليكن $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ حيث $I \subseteq \mathbb{R}$ ولتكن $x \in I$ و x_0 نقطة داخلية في I $(a < x_0 < b)$ و f معرفة على I بإستثناء x_0 على الأكثر

1. نقول أن f يقبل نهاية على يمين x_0 اذا:

$$\lim_{x \to \underset{>}{x_0}} f(x) = l_1$$ موجودة و وحيدة

2. نقول أن f يقبل نهاية على يسار x_0 اذا:

$$\lim_{x \to \underset{<}{x_0}} f(x) = l_2$$ موجودة و وحيدة

3. نقول أن f يقبل نهاية عند x_0 اذا كانت $(l_1 = l_2)$ أي:

$$\lim_{x \to \underset{>}{x_0}} f(x) = \lim_{x \to \underset{<}{x_0}} f(x) = l$$ (l هي القيمة المشتركة لـ l_1 و l_2)

و نرمز لذلك اختصارا بالرمز $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

ملاحظة:

بعض حالات عدم التعيين المتداولة و المهمة هي :

$$\frac{0}{0}، \frac{\pm\infty}{\pm\infty}، 0 \times \infty، -\infty + \infty، 1^{\infty}، 0^{\infty}، \infty^{\infty}،...$$

يعني أن لإيجاد و حساب نهاية تدعي إزالة عدم التعيين.

2. خواص النهايات

نظرية:

إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ **و** $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ **حيث** $a, b \in \mathbb{R}$ **و** $x_0 \in \mathbb{R}$ **أو** x_0,

فإن:

1. $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda a + \mu b$ **من أجل كل** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a.b$

3. **إذا كان** $b \neq 0$ **فإن:** $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

حالات خاصة

1. **إذا كان** $\lambda = \mu = 1$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$

2. **إذا كان** $\mu =- 1$ **و** $\lambda = 1$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$

3. **إذا كان** $\mu = 0$ **و** $\lambda \in \mathbb{R}$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x)] = \lambda a$

4. **إذا وضعنا** $f(x) = g(x)$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^2 = a^2$ **و بصورة أعم يكون**

لدينا $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = a^n$

5. $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) - a] = 0$

6. **إذا كان** $f(x) \leq g(x)$ **في جوار ما لنقطة** x_0 **فإن** $a \leq b$ **و صورة خاصة : إذا**

كان $f(x) \leq k$ **في جوار ما للنقطة** x_0 **فإن** $a \leq k$.

ملاحظات: إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$

1. لما $a \neq \pm\infty$ و $0 \neq a$ و $b = \pm\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

2. لما $a \neq +\infty$ و $b = +\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = +\infty$$

3. لما $a = -\infty$ و $b = -\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = +\infty$$

4. لما $a = -\infty$ و $b = -\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

نظرية:

إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = a$ و $h(x)$ **دالة ما تحقق المتراجحة :**

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ **في جوار النقطة** x_0 **فإن :** $\lim_{x \to x_0} h(x) = a$

الاستمرارية

1. تعريف الاستمرارية

تعريف:

لتكن f دالة حقيقية معرفة على المجال I و I و $x_0 \in I$

1. نقول أن f مستمرة عند x_0 إذا وفقط اذا تحقق:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

يمكن أن نعيد كتابة التعريف كالتالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2. نقول أن f مستمرة على يمين x_0 إذا وفقط اذا تحقق:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$$

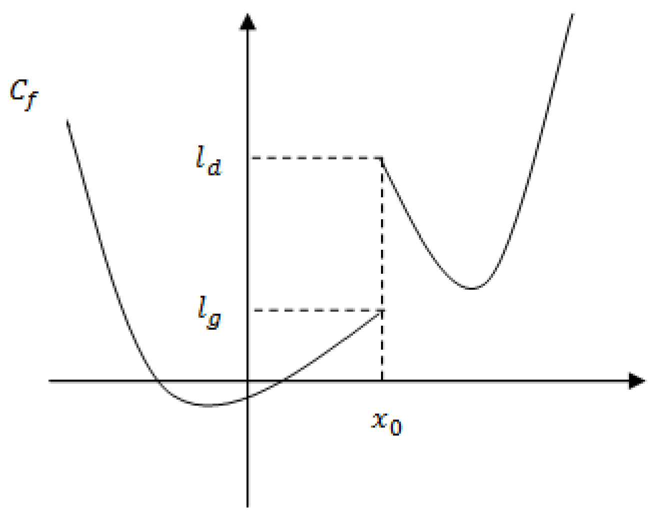
3. نقول أن f مستمرة على يسار x_0 إذا وفقط اذا تحقق:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

4. إذا كانت f مستمرة من يمين و من يسار x_0 إذن f مستمرة عند x_0.

5. نقول أن f مستمرة على مجال $[a, b]$ اذا كانت مستمرة على كل نقطة $x \in]a, b[$ و مستمرة على يمين a و مستمرة على يسار b.

مثال:



مثال:

1. الدالة $f(x) = x + 2$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ كلها لانه إذا كانت $x_0 \in\mathbb{R}$ لدينا $\lim_{x\to x_0} (x_0 + 2) = f(x_0)$

2. لتكن الدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & ,x > 1 \\ 1 & ,x = 1 \\ x + 2 & ,x < 1 \end{cases}$$

لدينا $\lim_{x\to 1^<} g(x) = \lim_{x\to 1^<} (x + 2) = 3$ ، إذن g غير مستمرة على يسار 1 لان

$$3 = \lim_{x\to 1^<} g(x) \neq g(1) = 1$$

لدينا $\lim_{x\to 1^>} g(x) = \lim_{x\to 1^>} x^2 = 1$ ، و $g(1) = 1$ إذن g مستمرة على يمين 1.

إذن الدالة g غير مستمرة عند $x_0 = 1$.

3. لتكن الدالة g معرفة كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} 2x & ,x \leq 0 \\ 2x + 1 & ,x > 0 \end{cases}$$

دراسة استمرارية الدالة g على مجال تعريفها حيث $D_g = \mathbb{R}$

- على المجال $]0, +\infty[$; $g(x) = 2x + 1$ دالة خطية إذن مستمرة.
- على المجال $]-\infty, 0[$; $g(x) = 2x$ دالة خطية إذن مستمرة.
- دراسة استمرارية الدالة عند **0**

على يمين 0: $\lim_{x\to 0^>} g(x) = \lim_{x\to 1^>} (2x + 1) = 1 \neq g(0)$

و منه g غير مستمرة على يمين **0**.

على يسار 0: $\lim_{x\to 0^>} g(x) = \lim_{x\to 1^>} (2x) = 0 = g(0)$ و منه

g مستمرة على يسار **0**.

g مستمرة على يسار **0** و غير مستمرة على يمين **0** إذن g غير مستمرة عند **0**.

إذن g مستمرة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

ملاحظة:

لكي تكون f مستمرة عند x_0 يجب ان تتوفر شروط ثاثة

1. أن تكون f معرفة عند x_0
2. أن تكون $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة و وحيدة
3. أن تكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

إذا لم تتحقق أحد الشروط الثلاثة الاسابقة فإن f غير مستمرة

نظرية:

1. إذا كان $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين مستمرتين عند النقطة $x_0 \in I$ فإن الدوال :

$f \pm g$، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ $\left(g(x_0) \neq 0\right)$ كلها مستمرة عند x_0 .

2. إذا كان $g \circ f$ معرفا و كان f مستمرا عند $g(x_0)$ فإن : $g \circ f$ يكون مستمرا أيضا عند x_0.

نظريات:

1. إذا كان $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و كان f مستمرا عند y_0 و كانت $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ و $g \circ f$ معرفا فإن :

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$$

2. إذا كان $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و كان f مستمرا عند y_0 و كانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = y_0$ فإن:

$$\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = f(y_0)$$

3. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ فإن:

مثال: لتكن $f(x) = \frac{sin(x)}{x^2+1}$ معرفة $D_f = \mathbb{R}$

- $sin(x)$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{x^2+1}$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2. التمديد بالإستمرار

تعريف:

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$. فإذا كان f غير معرف عند x_0، فهو غير مستمر عند x_0 فهو غير مستمر عند x_0. في هذه الحالة إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ، عندئذ يكون التطبيق g المعرف بـ:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq x_0 \\ l & : x \neq x_0 \end{cases}$$

مستمرا عند x_0. نسمي g التمديد بالاستمرار لـ f عند x_0

مثال:

1. $f(x) = \frac{sinx}{x}$ ليس مستمرا عند $x_0 = 0$، لكن $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ نمدد f بالاستمرار عند $x_0 = 0$ فنحصل على:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x \neq 0 \end{cases}$$

2. بينما الدالة

$$g(x) = \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{x} \end{array}$$

لا يمكن تمديده بالاستمرار نظرا لعدم وجود $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

3. التابع المحدود

تعريف:

لتكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة ما، نقول أن f محدود على الجزء I إذا تحقق الشرط

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I: |f(x)| \leq k$$

نظرية:

إذا كان $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ، مستمرا على المجال المغلق المحدود $I = [a, b]$ فإنه لدينا ما يلي:

1. f يكون محدود أعلى I
2. f يبلغ (يدرك) حديه الأعلى و الأدنى على I أي أنه :

$$\exists x_0, x_1 \in I,\ f(x_0) = inf(f(x))$$

$$f(x_1) = sup(f(x))$$

4. نظرية القيم المتوسطة

نظرية: نظرية القيم المتوسطة لها أشكال عديدة منها:

إذا كان $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرا على المجال المغلق المحدود I فإن:

$$\forall \lambda \in [inf(f(x)), sup(f(x))]$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b]$$

بحيث $f(x) = \lambda$

و من أهمها نظرية بولزانوا التي تنص على مايلي:

إذا كان $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة على مجال محدود $[a,b]$ و كان الجداء $f(a).f(b) < 0$ إذن :

$$\exists c \in [a,b]:\ f(c) = 0$$

مثال:

أثبت أن المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$ تقبل على الأقل جذر حقيقي على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

- f مستمرا على $\mathbb{R}$ إذن فهي مستمرة على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$
- لدينا $f(\frac{1}{2}).f(\frac{3}{4}) < 0$ بتطبيق نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد على الأقل جذر حقيقي $c \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

5. التوابع المتعاكسة

تعريف: ليكن $f,\ g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعين معرفين، يقال أن f و g تابعين متعاكسين إذا تحقق الشرطين:

$$g(x) = \begin{cases} y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = g(f(x)) = x \\ \text{و} \\ x = g(y) \Leftrightarrow f(x) = f(g(y)) = y \end{cases}$$

6. الدوال الرتيبة

تعريف: ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. نقول أن f متزايد (متزايد تماما) على I إذا تحقق:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y)$

2. نقول أن f متناقصا (متناقصا تماما) على I إذا تحقق:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y)$

3. نقول أن f رتيب على I إذا كان f متزايدة أو متناقصة و نقول أن f رتيب تماما إذا كان f متزايدة تماما أو متناقصة تماما.

نظرية:
إذا كان $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرة على مجال مغلق ومحدود I و كان f متزايدا تماما على I عندئذ يكون لدينا مايلي:

1. يكون $f:\ [a, b] \to [f(a), f(b)]$ تقابلا و بالتالي له تابع عكسي
2. $g: [f(a), f(b)] \to [a, b]\ = f^{-1}$ يكون مستمرا و متزايدا تماما أيضا.

الإشتقاق

1. مشتق دالة عند نقطة، مشتق دالة على مجال (الدوال المشتقة)

تعريف: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
نقول أن f قابلة للاشتقاق عند النقطة عند $x_0 \in]a, b[$ إذا كانت النهاية (المنتهية)
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x \in [a, b])$ موجودة و وحيدة.
تسمى هذه النهاية الوحيدة بمشتق f عند x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ أي أن:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

مثال:

1. إذا كان $f(x) = c$ ثابت فإن $f'(x) = 0$ لأن :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

2. إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x_0) = nx^{n-1}$ لأن :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...+x_0^{n-1}\right)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 +...+ x_0^{n-1}\right)$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} +...+ x_0^{n-1}$$

$$= nx_0^{n-1}$$

تعريف: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x \to _{>}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة و وحيدة، نقول أن f يقبل الإشتقاق على اليمين x_0 أو من اليمين و تسمى هذه النهاية المشتق من اليمين و نرمز لها بالرمز

$$f_d'(x_0) = f(x_0 + 0)$$

- بنفس الشكل نعرف المشتق على يسار x_0 و نرمز له بـ:

$$f_g'(x_0) = f(x_0 - 0) \lim_{x \to _{<}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي أن x يقترب نحو x_0 بقيم أقل أو أصغر من x_0 $(x \to _{<}x_0)$

- نقول أن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على كل نقطة $x \in]a, b[$ و f قابلة للاشتقاق على يمين a و قابلة للاشتقاق على يسار b

ملاحظة:

إذا كان f قابلة للإشتقاق من اليمين و من اليسار و إذا كان $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$ إذن نقول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0

مثال:

1. $f(x) = |x|$ و ليكن $x_0 = 0$

$$f_d'(0) = \lim_{x \to _{>}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to _{>}x_0} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x \to _{>}x_0} \frac{x}{x} = 1$$

و منه f يقبل الإشتقاق على اليمين $x_0 = 0$

$$f_g'(0) = \lim_{x \to {<}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{-x}{x} =- 1$$

و منه f تقبل الاشتقاق على اليسار $x_0 = 0$

لدينا $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ إذن f لا يقبل الإشتقاق عند **0.**

2. $f(x) = \sqrt{x}$ و ليكن $x_0 = 0$ حيث $D_f = [0, +\infty[$

f **لا يقبل الإشتقاق عند 0 لان:**

$$\lim_{x \to {>}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} =+ \infty$$

3. لتكن الدالة g معرفة كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} 2x & ,x \leq 0 \\ 2x+1 & ,x > 0 \end{cases}$$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على مجال تعريفها $\mathbb{R}$

- على المجال $]0, +\infty[$ الدالة $g(x) = 2x + 1$، g دالة تآلفية إذن g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
- على المجال $]-\infty, 0[$ الدالة $g(x) = 2x$، g دالة خطية إذن g قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$
- على يمين $x_0 = 0$:

$$g_d'(0) = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{2x+1}{x} =+ \infty$$

إذن g لا يقبل الإشتقاق على يمين **0**

- على يسار $x_0 = 0$:

$$g_g'(0) = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to {>}x_0} \frac{2x}{x} = 2$$

إذن g قابلة للاشتقاق على يسار **0**

و منه g غير قابلة للاشتقاق عند **0**

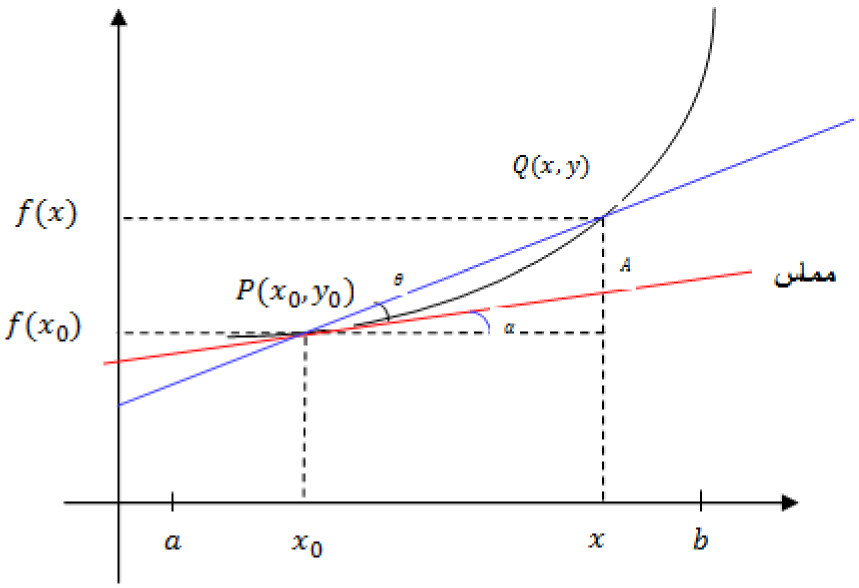
وبالتالي g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

قضية :
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 ⇐ f مستمرة x_0 عكس هذه النظرية غير صحيح على العموم

مثال:
يكفي أخذ مثال مضاد على أن العكس غير صحيح، الدالة $f(x) = |x|$ ، $x_0 = 0$ مستمرة عند $x_0 = 0$ لكن لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$.

2. التفسير الهندسي للمشتق

ليكن C_f بيان الدالة $y = f(x)$ في المستوى xoy كما في الشكل التالي:



لتكن $P(x_0, y_0)$ و $Q(x, y)$ نقطتين من هذا البيان، عندما $x \to x_0$ فإن Q تقترب من P على البيان و بالتالي فإن القطعة $[PQ]$ تؤول لتأخذ وضع المماس (PA) لبيان f عند P فإذا كان (PQ) يصنع الزاوية θ مع المحور الموجب (Ox) فإن النسبة $tan\theta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ و التالي $f'(x_0) = tan\alpha$ ، حيث α هي زاوية لمماس مع المحور الموجب (Ox) أي أن الزاوية θ التي يصنعها (PQ) مع (Ox) تؤول إلى الزاوية α التي يصنعها المماس مع (Ox) عندما $x \to x_0$. و بالتالي فإن مشتق f عند x_0 هو عبارة عن ميل المماس عند النقطة $P(x_0, y_0)$ ذات القاصلة x_0 .

إذن فالبحث عن مشتق دالة f عند x_0 يعني البحث عن مماس لبيان الدالة عند x_0.

3. المشتقات المتتابعة

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$، اذا كان f يقبل الإشتقاق عند x_0 فنرمز للمشتقة بـ $f'(x_0)$ ، و إذا قبل f' بدوره مشتقا عند x_0 أي أن $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ موجودة فنرمز لهذه النهاية بـ $f''(x_0) = f^{(2)}(x_0)$ و نسميه المشتق الثاني لـ f عند x_0، و هكذا بالتدرج نعرف المشتق من المرتبة n لـ f عند x_0 و الذي نرمز له بـ $f^{(n)}(x_0)$ و هو النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ في حالة وجودها.

- نصطلح على أن المشتق من المرتبة صفر(0) لـ f هو f نفسه أي أن
$$f^{(0)}(x_0) = f^{(0)}(x_0)$$
- نسمي المشتقات $f^{(0)}, f^{(1)},..., f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة لـ f

نظرية:

ليكن $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

فإذا كان g ،f قابلين للإشتقاق عند x_0 فإن الدوال التالية :

$f \pm g,\ f.g,\ \frac{f}{g}\left(g(x_0) \neq 0\right),\ \alpha f(\alpha \in \mathbb{R})$ كلها تقبل الإشتقاق عند x_0 ولدينا القواعد التالية:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$$
$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

4. مشتق دالة مركبة $g \circ f$

نظرية: ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$ و نعرف الدالتين f و g كما يلي

$$f: I \to \mathbb{R}$$
$$G: J \to \mathbb{R}$$

بحيث $f(I) \cap J \neq \emptyset$،عندئذ يمكن تعريف $g \circ f$ بـ

$$I \xrightarrow{f} f(I) \cap J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$\xrightarrow[f^{\circ}g]{}$$

لتكن $x_0 \in I$ بحيث $f(x_0) \in f(I) \cap J$، عندئذ إذا كان f تقبل الاشتقاق عند x_0 و كان g يقبل الإشتقاق عند $f(x_0)$ فإن $g \circ f$ يقبل الإشتقاق عند x_0 و لدينا:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

5. مشتق الدالة العكسية

نظرية:

إذا كان $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و متزايدة تماما (أو مستمرة و متناقصة تماما) فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} فإن إذا كان f يقبل الاشتقاق عند $x_0 \in I$ و $f'(x_0) \neq 0$ إذن الدالة العكسية f^{-1} تقبل الاشتقاق $y_0 = f(x_0)$ و مشتقه يكون :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال:

1. $f(x) = cos(x^2 + 1)$, f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. و لدينا
$$f'(x) = 2x(sin(x^2 + 1))$$
2. $f(x) = e^{x^2+1}$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$

القيم الحدية (العظمى و الصغرى)

1. تعريف القيم الحدية (العظمى و الصغرى)

تعريف: لتكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفا على I و لتكن $x_0 \in I$،

- نقول أن الدالة f قيمة عظمى مطلقة عند x_0 إذا تحقق الشرط:
$$\forall x \in I: \ f(x) \leq f(x_0)$$
- نقول أن الدالة f قيمة صغرى مطلقة عند x_0 إذا تحقق الشرط:
$$\forall x \in I: \ f(x) \geq f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بصورة مطلقة و دون أي قيد على $x \in I$

- نقول أن للدالة f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا تحقق الشرط:
$$\exists \delta_1 > 0, \ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0)$$

أي أنه يوجد مجال $L =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$ مركز x_0 و يتحقق عليه الشرط السابق من أجل كل $x \in L$

- نقول أن للدالة f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\exists \delta_1 > 0, \left|x - x_0\right| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

مثال: لتكن الدالة

$$f: [-2,2] \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = x^4 - x^5$$

بإستعمال جدول التغيرات نحصل على

x	-2		0		4/5		2
$f'(x)$		−	|	+	|	−	
$f(x)$	48	↘	0	↗	$\left(\frac{4}{5}\right)^5$	↘	-16

لاحظ أن : $\forall x \in [-2, 2]: f(x) \leq f(-2) = 48$

$f(-2) = 48$: هي القيمة الحدية العظمى لـ f على المجال $[-2, 2]$

و لاحظ أن لاحظ أن : $\forall x \in [-2, 2]: f(x) \geq f(2) = -16$

$f(2) = -16$: القيمة الحدية الصغرى لـ f على المجال $[-2, 2]$

ملاحظة:

- في مجال ما هناك قيمة حدية عظمى أو هناك قيمة حدية صغرى واحدة
- لكن القيم الحدية المحلية يمكن أن لا تكون أي قيم حدية محلية لا صغرى ولا كبرى في مجال ما ويمكن أن تكون لدينا عدة قيم حدية محلية في مجال ما و بالتالي هناك فرق بين القيم الحدية المحلية و القيم الحدية

يمكن التعرف على القيم الحدية بطريقة أخرى

إذا كان f معرفا على المجال المغلق و المحدود $[a, b]$ ووجد المشتق على يمين أي a $f'(a+0) = f'(a)$ ووجد المشتق على يسار b أي $f'(b-0) = f'(b)$ فإنه لدينا مايلي:

- f قيمة عظمى محلية (نسبية) عند a إذا كان : $f'(a) < 0$
- f قيمة عظمى محلية (نسبية) عند b إذا كان : $f'(b) > 0$
- f قيمة صغرى محلية (نسبية) عند a إذا كان : $f'(a) > 0$
- f قيمة صغرى محلية (نسبية) عند b إذا كان : $f'(b) < 0$

عموما لإيجاد القيم العظمى و القيم الصغرى لدالة f فإننا نعين من أجل ذلك تلك النقاط x حيث:

- ينعدم المشتق
- لا يوجد مشتق
- يكون مجال تعريف الدالة f نصف مفتوح

أي أن هذه قيم المتغير x المرشحة كي تكون لـ f قيمة حدية (عظمى أو صغرى) نسمي هذه النقاط x بالنقاط الحرجة لبلوغ f قيمة حدية و لكي نقرر أي هذه النقاط قيم حدية (عظمى أو صغرى) علينا أن نقارن قيم f في هذه النقاط مع بعضها البعض و مع حلول النقاط المجاورة

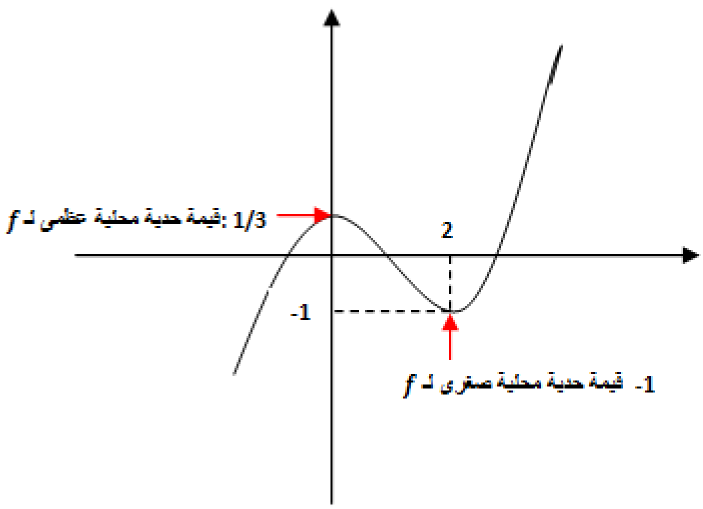
مثال: لتكن الدالة

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

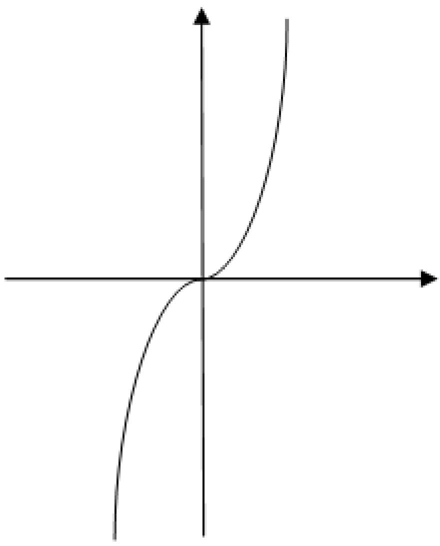
- هناك قيمة عظمى نسبية لـ f عند $x_0 = 0$ و قيمتها $f(0) = 1/3$
- هناك قيمة صغرى نسبية لـ f عند $x_0 = 2$ و قيمتها $f(2) = -1$



نظرية: ليكن $f: I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
إذا كان f يقبل الإشتقاق على $]a, b[$ و كان لـ f نهاية عظمى محلية (نسبية) (أو صغرى)
عند $]a, b[\ni x_0$ فإن $f'(x_0) = 0$ و العكس غير صحيح دوما

مثال:

الدالة x^3 ليس لها أي نقاط عظمى أو صغرى مطلقة بالرغم من أن $f'(x) = 2x^2$ ينعدم عند 0



2. نظرية رول (Roll)

نظرية: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث يكون

1. **f مستمرا على $[a, b]$**
2. **f يقبل الاشتقاق على $]a, b[$**
3. **$f(a) = f(b)$**

عندئذ توجد على الأقل نقطة $]a, b[\ni c$ تحقق $f'(c) = 0$

مثال:

طبق شروط رول على الدالة $f(x) = x^2 - 1$ على المجال $[-1, 1]$

1. **f مستمرا على $\mathbb{R}$ و منه f مستمرة على $[-1, 1]$**
2. **f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$**
3. **$f(1) = 0 = f(-1)$**

حسب رول فإنه يوجد على الأقل $]-1, 1[\ni c$ بحيث $f'(c) = 0$

ملاحظة:

1. حسب شروط رول حيث أن $f'(c) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقبل على الأقل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.
2. شروط كافية و ليست لازمة.

مثال: لتكن $f(x) = x^3$ ، المجال $[-1, 1]$

1. f مستمرا على $\mathbb{R}$ و منه f مستمرة على $[-1, 1]$
2. f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$
3. $f(1) \neq f(-1)$

لكن يوجد c حيث $c \in]-1, 1[$ من أجله $f'(c) = 0$ $(c = 0)$

3. نظرية التزايدات المنتهية

نظرية: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون

1. f مستمر على $[a, b]$
2. f يقبل الاشتقاق على $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

عندئذ توجد على الأقل نقطة $c \in]a, b[$ تحقق

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

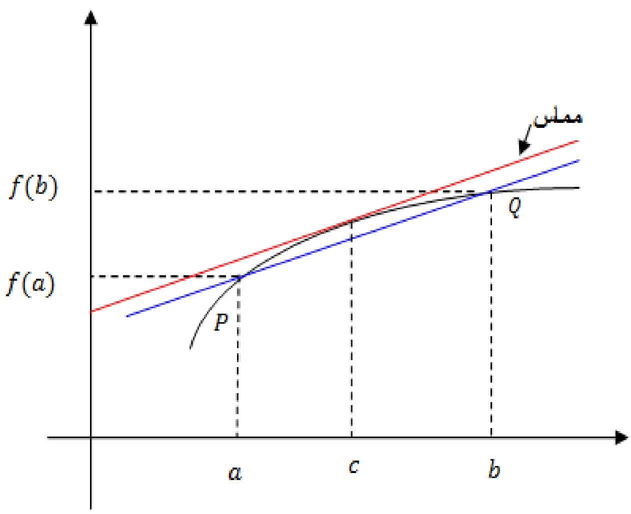
ملاحظة:

نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية التزايدات المنتهية

f دالة معرفة على مجال $[a, b]$

- f مستمرة على $[a, b]$
- f قابلة للإشتقاق على $]a, b[$ و

كان $f(a)$ و $f(b)$ كيفيين بحيث $f(a) \neq f(b)$ بالتخمين بما أن f قابلة للإشتقاق على مجال $]a, b[$ فحتما يوجد مماس يوازي المستقيم (PQ) له نفس معامل التوجيه أي



معامل توجيه المستقيم(PQ) $\leftarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \rightarrow$ معامل توجيه المماس

و عليه يكون $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

ملاحظة:

إذا كان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرا و قابلا للإشتقاق على $]a,b[$ عندئذ نقول أن:

1. f متزايدا على $]a,b[$ إذا كان $\forall x\in]a,b[:\ f'(x)>0$
2. f متناقص على $]a,b[$ إذا كان $\forall x\in]a,b[:\ f'(x)<0$

4. دراسة حالة عدم التعيين : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$

نظرية (قاعدة لوبيتال):

لتكن الدالتين $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ بحيث الشروط التالية محققة

1. $\lim_{x\to_{>}a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to_{>}a} g(x)=0$
2. f,g يقبلان الاشتقاق على $]a,b[$
3. $\forall x\in]a,b[,\ g'(x)\neq 0$
4. النهاية $\lim_{x\to_{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ موجودة حيث $k\in[-\infty,+\infty]$ عندئذ تكون :

$$\lim_{x\to_{>}a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to_{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

ملاحظة:

1. ندرس الحالة لما $x\to b$ بطريقة مشابهة أو عندما $x_0\in]a,b[$
2. اذا كانت $\lim_{x\to_{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فنطبق نظرية لوبيتال من جديد على f' و g' أي أنه يمكن تطبيق النظرية عدة مرات متتالية في حالة توفر شروطها
3. تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x\to_{>}a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$
4. تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$
5. يتم ايجاد النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ عندما تكون حالة عدم التعيين بتطبيبق قاعدة لوبيتال اذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة حسب النظرية. أما اذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة فإن هذا لا يعني اطلاقا أن النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة.

مثال: لحساب النهاية

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{sinx} = \frac{0}{0}$$

شروط لوبيتال متوفرة

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{cosx} = \frac{0}{1} = 0$$

إذن

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{sinx} = 0$$

ملاحظة:

يمكن رد الحالتين $0.\infty$ و $\infty - \infty +$ لعدم التعيين إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق النظرية.

مثال: لحساب $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tagx$

نلاحظ أن $\infty - \infty = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tagx$ لذا نكتب

$x \to \frac{\pi}{2}$ لما $\frac{1}{cosx} - tagx = \frac{1-sinx}{coxx} \to \frac{0}{0}$

أي:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-sinx)'}{(cosx)'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-cosx}{-sinx} = \frac{0}{1} = 0$$

إذن: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tagx = 0$

ملاحظة:

يمكن رد حالات عدم التعيين 0^0، 1^∞، ∞^0 إلى الحالة $0.\infty$ و بالتالي إلى $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ و ذلك بإستعمال العلاقة $y^x = e^{xlogy}$

مثال: لحساب $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x})^x$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x})^x = 1^\infty$ فنكتب

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x})^x = lim(e^{xlog(1+\frac{5}{x})}) = e^{+\infty.0}$$

نطبق النظرية على $xlog(1+\frac{5}{x})$ بحيث يمكن أن نكتب

$$xlog(1+\frac{5}{x}) = \frac{log(1+\frac{5}{x})}{\frac{1}{x}}$$

إذن $f(x) = log(1+\frac{5}{x})$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ و منه يصبح لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} xlog(1+\frac{5}{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{log(1+\frac{5}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\frac{5}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}\times x^2) = 5$$

اذن $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x})^x = e^5$

ملاحظة:

الحالات التي لا تمثل حالات عدم التعيين

اذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن $a+(+\infty)=+\infty$; $a-(+\infty)=-\infty$

$a.(+\infty)=+\infty$ عندما يكون $a>0$ و $a.(+\infty)=-\infty$ في حالة $a<0$

$a.(-\infty)=-\infty$ عندما يكون $a>0$ و $a.(+\infty)=+\infty$ في حالة $a<0$

$(+\infty)(+\infty)=+\infty, (-\infty).(-\infty)=+\infty, (+\infty)+(+\infty)=+\infty$

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك　　　　　　　　　　　　السنة الأولى

رياضيات 1

السلسلة رقم 03

التمرين 01 :

عين مجموعة تعريف الدوال التالية ثم أدرس شافعيتها.

$1°\quad \sqrt{1-|x|}$

$2°\quad x^2 - x$

$3°\quad |x-1| + |x+1|$

$4°\quad x^3 - \sqrt{x}$

$5°\quad e^x - \dfrac{1}{e^x}$

$6°\quad \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

$7°\quad \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

$8°\quad \dfrac{4|x|}{x}$

التمرين 02 :

أحسب النهايات التالية :

$1°\quad \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$2°\quad \lim_{x \to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$

$3°\quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$

$4°\quad \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt[3]{1-x^3}$

$5°\quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

$6°\quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

التمرين 03 :

أدرس الاستمرارية عند 0 للدوال التالية :

$$1°\quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$2°\quad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

التمرين 04 :

أدرس استمرارية الدوال التالية :

$$1^\circ \quad f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

$$2^\circ \quad g(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$3^\circ \quad h(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

التمرين 05 :

أثبت أن المعادلات التالية تقبل على أقل جذر حقيقي :

$$1^\circ \quad x^5 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$2^\circ \quad x^8 + 5x^3 + 2 = 0$$

$$3^\circ \quad x^2 - 3\cos x + 2 = 0$$

التمرين 06 :

أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند 0 :

$$1^\circ \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$2^\circ \quad g(x) = (x + 1)|\ln(x + 1)|$$

$$3^\circ \quad h(x) = x\sqrt{|x|}$$

التمرين 07 :

أدرس قابلية الاشتقاق ثم الاستمرارية عند 0 للدوال التالية :

$$1^\circ \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$2^\circ \quad g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

التمرين 08 :

عين مشتقات الدوال التالية :

$$1^\circ \quad f(x) = (x+2)^3(3x-1)^2$$

$$2^\circ \quad g(x) = \frac{3x-2}{x^2-1}$$

$$3^\circ \quad h(x) = \frac{1-\ln x}{1+\sqrt{x}}$$

التمرين 09 :

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن :

$$1^\circ \quad \forall x \in]0,+\infty[, \qquad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

$$2^\circ \quad \forall x \in]0,+\infty[, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

التمرين 10 :

باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-5x-4}{x+1}$

الفصـل الـرابع: الدوال اللوغاريتمية و الأسيـــة

التـــابع اللوغاريتمي

تعريف: بما أن التابع

$$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = \frac{1}{x}$$

مستمر فله تابع أصلي F، نسمي هذا التابع الأصلي بالتابع اللوغارتمي الطبيعي (أو النيبيري) و نرمز له بالرمز $F(x) = lgx$ و هو معرف بـ:

$$logx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

نظرية[4]:

ليكن التابع $log:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ و $a > 0,\ b > 0$ عندئذ الشروط التالية محققة:

-1 $log(ab) = lga + logb$

-2 $log(\frac{a}{b}) = loga - logb$

-3 $log1 = 0$

-4 $(log)' = \frac{1}{x}$

-5 $\forall r \notin \mathbb{Q}: log(a^r) = rloga$

-6 $\lim_{x\to 0^>} logx = -\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} logx = +\infty$

-7 التابع log مستمر و متزايد على $]0,+\infty[$

ملاحظة:

يمثل التكامل $logx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ من أجل $x > 1$ المساحة المحدودة من الأعلى بالمنحنى: $y = \frac{1}{t}$ و من الأسفل بالمحور ot، و من اليسار بالمستقيم $t = 1$ و من اليمين المستقيم $t = x$.

فإذا كان: $x = 1$ تطابق الحدان الأيمن و الأيسر للمساحة و أصبحت المساحة صفرا أي

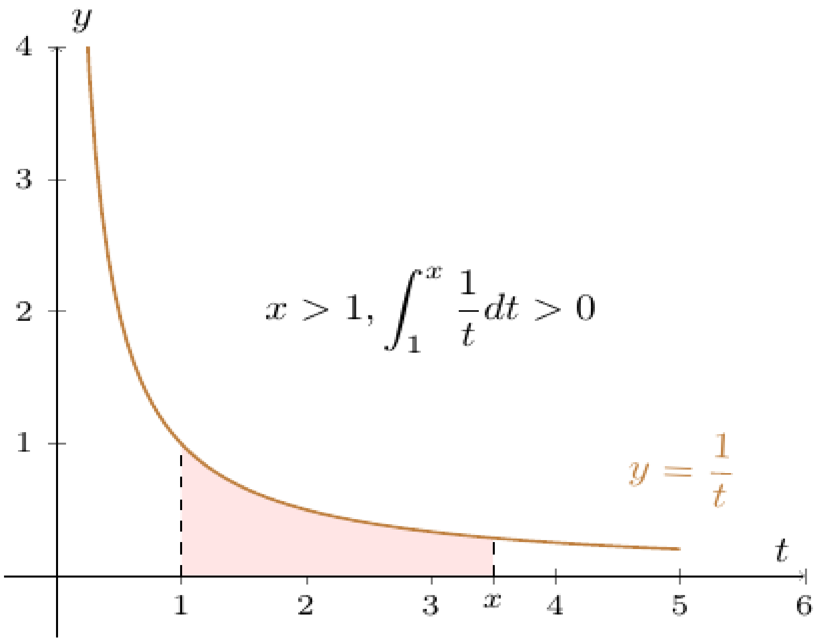
$$log1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$$

[4] يمكنكم الاطلاع على برهان النظرية في الصفحة 176 من كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر.

أما إذا كانت $0 < x < 1$ فيكون التكامل

$$logx = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{dt}{t}$$

مساويا للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحنى بين x و 1.



بيان الدالة $y = logx$

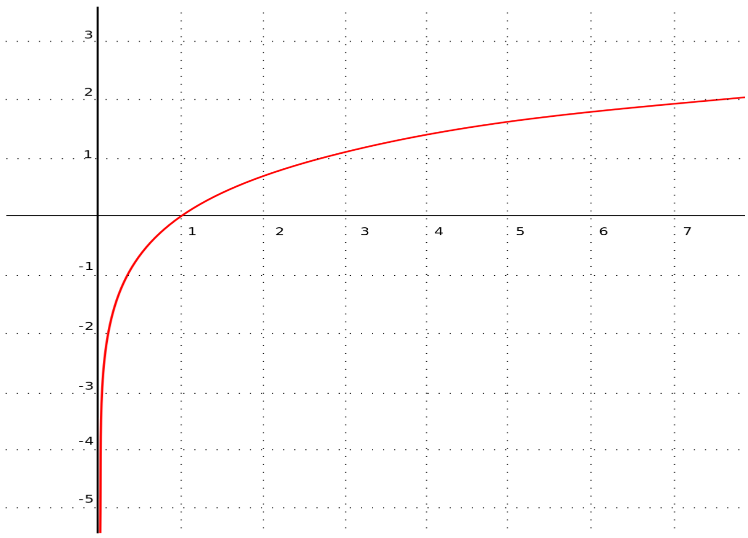
يعطى ميل المنحنى بـ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ويمر المنحنى من النقطة $(1, 0)$ لان $log1 = 0$ و يكون ميله عند هذه النقطة مساويا $(+ 1)$لذلك فالمماس في هذه النقطة يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحورox.

و حيث أن $y' = \frac{1}{x} > 0$ فإن التابع متزايد تماما. و بما أن $y' \to 0$ لما $x \to +\infty$ فالمماس يوازيox و $y' \to +\infty$ لما $x \to 0_{>}$ فالمماس يوازي oy.

و حيث $logx \to +\infty$ و $logx \to -\infty$ لما $x \to 0_{>}$ فإن جدول التغيرات هو :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$		$-$	
$logx$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

و البيان هو:



تعريف:

إذا كان g تابعا قابلا للاشتقاق عند نقطة x و $g'(x) \neq 0$ و $g(x) > 0$ فإن:

$$(\log g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

التابع الأسي

تعريف:

بما أن التابع اللوغارتمي معرف بـ:

$log:]0, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$ و هو مستمر و متزايد تماما، فله تابع عكسي

log^{-1} معرف بـ: $log^{-1}:]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ و هو مستمر و متزايد تماما.

نسمي هذا التابع العكسي log^{-1} بالتابع الأسي و نرمز له بالرمز exp أي أن

$exp = log^{-1}$ و بالتالي فإن:

$$exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

$$x \to \exp(x)$$

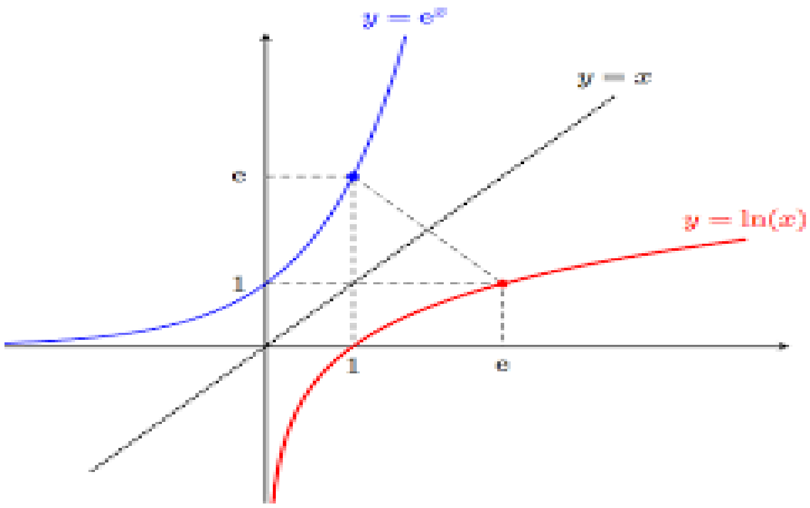
و هو مستمر و متزايد تماما و نكتب اصطلاحا $exp(x) = e^x$. و لدينا.

$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \forall y \in]0, +\infty[: x = logy \Leftrightarrow y = e^x$

باعتبارهما تابعين متعاكسين.

بيان $y = e^x$

بيان التابع الأسي يناظر بيان تابعه العكسي بالنسبة لمنصف الربع الأول كما هو موضح في الرسم أدناه.



مما تقدم من خواص log أن :

$$e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \text{و} \quad e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

نظرية: **التابع الأسي**

$$e: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

$$x \to y = e^x$$

يحقق الشروط التالية :

1- التابع الأسي مستمر و متزايد تماما على $\mathbb{R}$

2- $(e^x)' = e^x$ **و** $(e^x)^{(k)}$; $k \in \mathbb{N}$

3- $\forall x, y \in]-\infty, +\infty[: e^{x+y} = e^x e^y$

4- $\forall x, y \in]-\infty, +\infty[: e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

5- $\forall x, y \in]-\infty, +\infty[: (e^x)^r = e^{rx}; r \in \mathbb{R}$

6- $e^{rloga} = a^r$; $r \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}_+^*$

نشر الدوال

ان هدف نشر الدوال هو إيجاد طريقة سهلة لحساب قيم تقريبية لهذه الدوال، بالإضافة الى استخدام منشور الدوال في حساب نهايات بعض الدوال بعد رفع حالات عدم التعيين وسنتطرق فيما يلي الى منشور تايلور ومنشور ماك لوران والنشر المحدود للدوال بجوار الصفر.

دستور تايلور (نشر تايلور)[5]

ليكن $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ **كثير حدود من الدرجة** n **(أي** $a_n \neq 0$ **حتما).**
ولتكن x_0 **نقطة معلومة مثبتة. نكتب** $P(x)$ **في القوة المتزايدة لــ** $(x - x_0)$ **بالشكل:**

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n \text{ .... } (1)$$

و لتعيين الأمثال b_n**،...،**b_0 **نحسب مشتقات** $P(x)$ **حتى المرتبة** n**:**

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n$$

$$P'(x) = \quad b_1 + 2b_2(x - x_0) \ + ... + nb_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = \quad 2b_2 + 6b_3(x - x_0) \ ... + n(n - 1)b_n(x - x_0)^{n-2}$$

....

$$P^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2)...... 1. b_n$$

و بوضع : $x = x_0$ **في العبارات السابقة نجد أن:**

$$P(x_0) = b_0 = 0!\, b_0 \Rightarrow b_0 = \frac{P(x_0)}{0!}$$

$$P'(x_0) = b_1 = 1!\, b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}$$

$$P''(x_0) = 2b_2 = 2!\, b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}$$

....

$$P^{(n)}(x_0) = n!\, b_n \Rightarrow b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$

و بالتعويض $b_0,...,b_n$ **في العبارة (1) نجد:**

$$P(x) = P(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}P'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}P''(x_0)$$

$$+ ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}P^{(n)}(x_0) \text{ .... } (2)$$

يسمى الدستور (2) بدستور تايلور لكثير الحدود $P(x)$ **في جوار النقطة** x_0 **(أو نشر تايلور لكثير الحدود** $P(x)$ **بجوار النقطة** x_0 **).**

مثال:

نشر تايلور بجوار النقطة $x_0 = 1$ **لكثير الحدود** $P(x) = 3x^2 + 5x + 2$ **هو**

---

[5] للإطلاع أكثر أنظر كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر ص 39 من الجزء الثاني.

$$P(x) = P(1) + \frac{(x-1)}{1!}P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)$$

و نتوقف عند P'' لأن $P(x)$ من الدرجة 2 و بالتالي $P'''(x) = 0$ و حيث :

$P'(x) = 6x + 5$ و $P''(x) = 6$ فإن : $P(1) = 10$، $P'(1) = 11$، $P''(1) = 6$ و منه:

$$P(x) = 10 + \frac{(x-1)}{1!}11 + \frac{(x-1)^2}{2!} \times 6$$

$$P(x) = 10 + 11(x-1) + 3(x-1)^2$$

- **لاحظ أن لو قمنا بفك الأقواس من هذه العبارة الأخيرة فإننا نحصل من جديد على نفس العبارة الأولى لـ $P(x)$.**
- **نشر كثير حدود معين لا يغير شيئا في عبارة التابع $P(x)$، بل كل ما هناك أنه يعطي شكلا جديدا لكتابة كثير الحدود $P(x)$ يسهل علينا الحصول على نتائج مفيدة حول التابع، لم نكن قادرين الحصول عليها قبل النشر.**

دستور تايلور

ليكن $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا يقبل الإشتقاق حتى المرتبة n

1. **إذا كان f كثير حدود درجته n فإن نشر تايلور له بجوار نقطة $x_0 \in I$ هو:**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

2. **إذا كان f ليس كثير حدود أو كثير حدود درجته أكبر من n، فإن $f(x) \neq P(x)$، حيث $P(x)$ كثير حدود درجته n، في هذه الحالة يمكن تمثيل $f(x)$ بكثير الحدود $P(x)$ بصورة تقريبية في جوار x_0. و يكون الخطأ المرتكب في هذا التقريب هو $R(x)$. أي أن: $f(x) = P(x) + R(x)$ و منه يكون نشر تايلور للتابع $f(x)$ بجوار x_0 هو:**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R(x)$$

يسمى $R(x)$[6] بالخطأ المرتكب أو الحد الباقي في نشر تايلور للتابع f بجوار x_0.

ملاحظة:

- إذا كان $f(x)$ كثير حدود درجته n فإن $R(x)$.

- إذا كان $x_0 = 0$ فإن نشر تايلور لـ $f(x)$ هو:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R(x)$$

و يسمى هذا النشر الأخير بنشر ماك لوران للتابع f .

[6] يمكن الإطلاع أكثر على كيفية تعيين الخطأ المرتكب في كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر ص42 من الجزء الثاني.

مثال: ليكن $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ أكتب نشر تايلور لـ f بجوار $x_0 = 0$ و بجوار $x_1 = 1$

$$x \to f(x) = e^x$$

بما أن e^x يقبل الإشتقاق من أي مرتبة أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: f^{(n+1)}(x) = \left(e^x\right)^{(n+1)} = e^x$$

إذن النشر بجوار $x_0 = 0$:

$$e^x = e^0 + \frac{x}{1!}e^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 +...+ \frac{x^n}{n!}e^0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} +...+ \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

بجوار $x_0 = 1$:

$$e^x = e^1 + \frac{(x-1)}{1!}e^1 +...+ \frac{(x-1)^n}{n!}e^1 + \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{1+\theta(x-1)}$$

أي أن:

$$e^x = e + \frac{(x-1)}{1!}e +...+ \frac{(x-1)^n}{n!}e + \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{1+\theta(x-1)}$$

النشر المحدود

تعريف: ليكن f تابعا معرفا بجوار x_0 ما عدا عند x_0 على الأكثر.

نقول أن f يقبل نشرا محدودا (منته) من المرتبة n بجوار x_0 إذا إذا أمكن كتابة $f(x)$ بالشكل التالي:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +...+ a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

مع $\varepsilon(x) \to 0$ لما $x \to x_0$ ($a_n \neq 0$ على الأقل).

و ذلك من أجل كل x في جوار x_0، و هذا النشر وحيد.

أي إذا أمكن إيجاد $a_0, a_1,..., a_n$ تحقق تلك الكتابة لـ f. يقال أن f يقبل نشرا محدودا بجوار x_0 وفق القوى المتزايدة لـ $(x - x_0)$.

أما إذا كان $\frac{1}{x-x_0}$ محدودا أي $\exists k > 0: \left|\frac{1}{x-x_0}\right| < k$. فيقال أن f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار x_0 وفق القوى المتناقصى لـ $(x - x_0)$ إذا أمكن كتابة $f(x)$ بشكل وحيد على الصورة:

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{(x-x_0)} + \frac{b_2}{(x-x_0)^2} + ... + \frac{b_n}{(x-x_0)^n} + \frac{\varepsilon(x)}{(x-x_0)^n}$$

$\varepsilon(x) \to 0$ لما $x \to +\infty$ $(b_n \neq 0)$ على الأقل

أي إذا أمكن إيجاد أعداد $b_0, b_1, ..., b_n$ تحقق تلك الكتابة لـ f.

ملاحظة[7]:

نشر تايلور ⇐ النشر المحدود، و العكس غير صحيح في الحالة العامة.

أي إذا قبل f نشرا محدودا فليس بالضرورة يقبل نشرا وفق تايلور.

خواص النشور المحدودة:

- النشر المحدود لمجموع دالتين يساوي مجموع النشور المحدودة لهما.

- النشر المحدود لضرب دالتين يساوي ضرب النشور المحدودة لهما مع الحتفاظ بالحدود من الرتب الدنيا.

- النشر المحدود لقسمة دالتين يساوي قسمة الجزء الرئيسي لنشر دالة البسط على الجزء الرئيسي لنشر دالة المقام وفق الأسس المتزايدة إلى الرتبة n.

النشر المحدود لبعض الدوال الأولية في جوار الصفر

e^{ax}	$= 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ax)^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\cdots)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots + x^n + o(x^n)$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{ch} x$	$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\operatorname{sh} x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\tan x$	$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$

[7] يمكن الإطلاع أكثر على تبرير الملاحظة في كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر ص46 من الجزء الثاني.

مثال: أوجد نشرا محدودا بجوار $x_0 = 0$ من الرتبة $n = 2$ للتابعين التاليين:

$$f_1(x) = \left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)^3 \quad , \quad f_2(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1. لدينا بجوار $x_0 = 0$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O\left(x^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)^3 = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O\left(x^2\right)\right)^3$$

نضع: $y = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^2)$

بجوار الصفر لدينا $(1 + y)^3 = 1 + 3y + \frac{6y^2}{2!} + O\left(y^2\right)$

و منه

$$\left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)^3 = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{4} + O(x^2).$$

2. لدينا بجوار $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + O\left(x^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + O\left(x^2\right)}$$

نضع: $y = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + O(x^2)$

و منه بجوار الصفر لدينا $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O\left(y^2\right)$

و منه

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1+y} = 1 - \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}\right) + \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}\right)^2 + O\left(x^2\right)$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + O(x^2).$$

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك | السنة الأولى

رياضيات 1

السلسلة رقم 04

تمرين 01: ليكن التابع

$$f : x \to \log\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

أوجد مجموعة التعريف f.

برهن أن f يقبل تمديدا بالاستمرار عند $x_0 = 0$.

تمرين 02:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{lnx} \ ، \ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \ ، \ \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x^3} \ ، \ \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{ln(x^2)} \ ، \ \lim_{x\to 0^+} xlnx$$

تمرين 03: أدرس استمرارية و اشتقاق التوابع التالية على مجال تعريفها:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2\log(x) : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \log(1+x)}{x} : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}$$

تمرين 04: أوجد قيم a و b التي تجعل التابع التالي مستمرا على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & : x < 1 \\ 2 & : x = 1 \\ x^2 + b^2 & : x > 1 \end{cases}$$

تمرين 05: برهن أن:

$$\forall x]0, +\infty[: x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

تمرين 06: احسب المشتقة النونية لكل من التابعين

$$f_1(x) = x^2 e^x \quad , \quad f_2(x) = x^{n-1} logx$$

تمرين 07: أوجد النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار 0 للدالة الآتية:

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

الفصــل الــخامس: الدوال الاصلية و حســاب التكـــامل

1. التوابع الأصلية :

تعريف: ليكن $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية و ليكن $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية و ليكن $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإنشقاق. نقول ان F دالة أصلية لـ f إذا تحقق الشرط :

$$\forall x \in [a, b]: F'(x) = f(x)$$

نستنتج أنه إذا كان F و G دالتين اصليتين لـ f فإنه

$$\forall x \in [a, b]: \quad G'(x) = f(x) \quad \text{و} \quad F'(x) = f(x)$$

أي أن

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

إذن $G(x) - F(x)$ ثابت أي أن $G(x) - F(x) = C$

أي أن الدوال الأصلية للدالة f لا تختلف عن بعضها الا بثابت C .

نرمز لمجموعة كل الدوال الاصلية لـ f بالرمز $\int f(x)dx$ أي أن :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

و تسمى $\int f(x)dx$ تكامل غير محدود أو دالة أصلية لـ f.

نظرية:

إذا كان $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و $x_0 \in [a, b]$ فإن $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dt$ دالة أصلية لـ f أي :

f مستمرة على $[a, b] \Leftarrow f$ يقبل دالة أصلية عكس الاستلزام غير صحيح أي اذا كان F دالة أصلية لـ $f \not\Leftarrow f$ مستمرة .

مثال:

لتكن $F(x)$ معرفة كما يلي

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} : & x \neq 0 \\ 0 \quad : & x = 0 \end{cases}$$

دالة أصلية لـ f لأن : $F'(x) = f(x)$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} : & x \neq 0 \\ 0 \quad : & x = 0 \end{cases}$$

و رغم ذلك f غير مستمرة عند $x_0 = 0$.

2. النظرية الأساسية

تعريف:

اذا كان $f:[a,b\,]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و كان F دالة أصلية لـ f أي أن :

$F'(x) = f\,(x)$ $\forall x\in$، عندئذ لدينا : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(x)$

ونرمز بـ : $[F(x)]_a^b = F[b] - F[a]$.

3. كيفية حساب تكامل:

عند حساب $\int f(x)dx$ فإننا نفكر أولا في تطبيق تعريف الدالة الأصلية، فإذا إستطعنا إيجاد

دالة $F(x)$ بحيث يكون $F'(x) = f\,(x)$ فعندئذ يكون لدينا: $\int f(x)dx = F(x) + c$

الجدول التالي يوضح الدوال الأصلية لبعض الدوال، حيث مستنتج من مشتقات بعض الدوال

الدالة	الدالة الأصلية لها	الدالة	الدالة الأصلية لها $c\in\mathbb{R}$
0	a $a\in IR$	$f^n\times f'$ $n\in Q-\{-1\}$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}+c$
a $a\in IR$	$ax+c$	$f\times f'$	$\frac{1}{2}f^2+c$
x^n و $n\in Q-\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\frac{1}{x^n}$ و $n\in Q-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}ln\lvert ax+b\rvert+c$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\frac{f'}{f}$	$ln\lvert f\rvert+c$
$\frac{f'}{f^n}$ و $n\in Q-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}+c$	$f'\times e^f$	e^f+c
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

مثال:

$$\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

أما اذا لم نستطع فعل ذلك لسبب من الأسباب فإننا نلجأ إلى حساب التكامل $\int f(x)dx$ بإحدى الطرق التالية:

1- بطريقة إستبدال المتغير

لحساب $\int f(x)dx$ نغير المتغير بوضع $t = h(x)$ و منه $dt = h'(x)dx$ و نستخرج عبارة $f(x)$ و dx بدلالة t و dt ثم نعوض في التكامل المعطى فنحصل على تكامل يسهل حسابه.

مثال:

لحساب $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx =??$

نضع $t = 1 + x^3$ فيكون $dt = 3x^2dx$ و منه $x^2dx = \frac{1}{3}dt$ و نحصل على:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx = \int \frac{1}{(1+x^3)^3}x^2dx = \int \frac{1}{t^3}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-3}dt$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{-2}t^{-2} + c = \frac{-1}{6t^2} + c$$

حيث $t = 1 + x^3$ فإن : $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx = \frac{-1}{6(1+x^3)^2} + c$

2. طريقة التكامل بالتجزئة

اذا كان $u.v: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالتين قالبلتين للإشتقاق فإن:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

و يسمى دستور المكاملة بالتجزئة

مثال:

لنحسب التكامل $\int xsinxdx$

نضع

$$f(x) = \begin{cases} u = x \\ dv = sinxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -cosx \end{cases}$$

اذن:

$$\int xsinxdx =- xcosx - \int(- cosx)dx =- xcosx + sinx + c$$

3. طريقة حسا تكامل دالة كسرية

لحساب تكامل من الشكل $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ **حيث** $P(x)$ **و** $Q(x)$ **كثيري حدود فإننا نقوم بما يلي:**

1- نقسم $P(x)$ **و** $Q(x)$ **اقليديا (عندما تكون درجة** $P(x)$ **أكبر من درجة** $Q(x)$**) و نكتب:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث $h(x)$ **هو ناتج القسمة و** $P_1(x)$ **كثير حدود درجة أقل من درجة** $Q(x)$

2- نفكك $Q(x)$ **إلى جداء مضاريب (ان أمكن) من الشكل** $(ax + b)^n$ **و** $(\alpha x^2 + \beta x + \delta)^m$ **و نكتب عندئذ مثلا:**

$$\frac{P_1(x)}{(ax+b)^n(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} +...+ \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{\alpha x^2+\beta x+\delta} +...+ \frac{C_mx+D_m}{(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m}$$

حيث A_i، C_i ، D_i، γ ،δ ،β ،α ،b ،a **كلها ثوابت نعينها بعد توحيد المقامات و مطابقة الطرفين و بذلك نكون قد حصلنا على تفكيك للكسر** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ **ثم نكامل الطرفين فنجد** $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

مثال: لحساب $\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} dx$

نرى أن

$$\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} = x^2 + \frac{1}{x^2-1} = x^2 + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = x^2 + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+1)}$$

توحيد المقامات و المطابقة نجد: $A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}$**. و منه**

$$\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} dx = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x^2-1} = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{2(x-1)} + \int \frac{dx}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ln|x - 1| + \frac{1}{2}ln|x + 1| + c$$

مثال: لحساب $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$

نرى أن مميز المقام $\Delta = 9 - 8 > 0$ اذن المقام يقبل جذرين $x_1 = 1 , x_2 = 2$ و منه

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-1)}$$

إذن عد توحيد المقامات و المطابقة نجد: $A_1 =- 2, A_2 = 3$. و التالي

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-2}{(x-2)}dx + \int \frac{3}{(x-1)}dx =- 2\int \frac{dx}{(x-2)} + 3\int \frac{dx}{(x-1)}$$

$$=- 2ln|x - 1| + 3ln|x - 1| + c$$

مثال: لحساب $L = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

نرى أن مميز المقام $\Delta = 1 - 4 < 0$ و بالتالي $x^2 + x + 1 > 0$ أي لا يملك جذور، لا يفكك إلي مضاريب في هذه الحالة نقوم بإكماله إلى مربع كامل كالتالي:

$$x^2 + x + 1= (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

أي

$$L = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

ثم نضع $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ فيكون $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}t^2$ و $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$ و منه يصبح

$$L = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}arctan(t) + c$$

و بما أن $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})$، إذن

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})) + c$$

4. التكامل بالتـــدريج

لحسا تكامل من الشكل $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ مثلا فإننا نعتبر التكامل $I_n = \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ و نحسب مكاملين بالتجزئة عبارة عن I_{n-1} فنجد علاقة تدريجية تربط بين I_n و I_{n-1} و منه نحسب I_1، I_2،...

لحساب $I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$ نضع

$$dv = dx \longrightarrow v = x$$

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \longrightarrow du = \frac{-2(n-1)x}{(x^2+1)^n}$$

و حسب دستور التجزئة:

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)[I_{n-1} - I_n]$$

و منه $n \geq 2$

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)}I_{n-1}$$

و حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctanx$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^0} = \int dx = x$$

$$n = 2 \Rightarrow I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_1$$

$$n = 3 \Rightarrow I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2$$

نظرية:

إذا كان f و g يقبلان المكاملة فإن $f \pm g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, يقبلان المكاملة و لدينا

$$\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

و لدينا الخواص التالية :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك السنة الأولى

رياضيات 1

السلسلة رقم 5

التمرين 01 :

1- باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب الدوال الأصلية التالية :

1) $\int x^2 \ln x dx$ 2) $\int e^x \cos x dx$

2- باستعمال طريقة استبدال المتغير أحسب الدوال الأصلية التالية :

1) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ 2) $\int \frac{1}{3+e^{-x}} dx$

3- أحسب الدوال الأصلية التالية :

1) $\int \frac{x+2}{x^2-3x+4} dx$ 2) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$

التمرين 02 :

أحسب التكاملات التالية :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ 2) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

التمرين 03:

أحسب التكاملات التالية :

$\int \frac{x}{x^2+x+1} dx$ ، $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$ ، $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ، $\int_{-1}^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$ ، $\int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx$

الفصل السادس: الـــــدوال ذات عــــــدة متغيــرات

1. تعـــاريف

تعريف:

التابع الحقيقي بـ n متغير حقيقي هو التابع المعرف بالشكل:

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$، و بالتالي فإن:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ تعني $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

ملاحظة:

سنهتم بالحالة عندما $n = 2$ لأجل تسهيل التصور و تعاد المناقشات بطريقة مشابهة لأجل $n > 2$.

مثال:

الحجم V لغاز معين يتبع درجة الحرارة t و الضغط P. إذن فهو تابع بمتغيرين $V(t, P)$

2. البيـــان

هو مجموعة النقاط $\{(x, y, z):\ z = f(x, y)\}$ أي تلك الأزواج (x, y) من المستوي xoy التي ترتبط بـ z. و بالتالي يحتاج الأمر إلى ثلاث محاور لتمثيل هذا البيان.

3. مجموعة التعريف

هي قيم (x, y) التي تجعل التابع $z = f(x, y)$ معرفا.

مثال:

ليكن $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معطى بـ : $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ يكون f معرفا إذا كان $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftarrow x^2 + y^2 \leq 1$. و بالتالي فإن f معرف على القرص ذي المركز $(0, 0)$ و نصف القطر $r = 1$. فإذا رمزنا بـ D_f لمجموعة تعريف f فإن:

$$D_f = \left\{(x, y) \in\ \mathbb{R}^2:\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

مثال: أوجد مجموعة التعريف للتابع f و g و مثله بيانيا

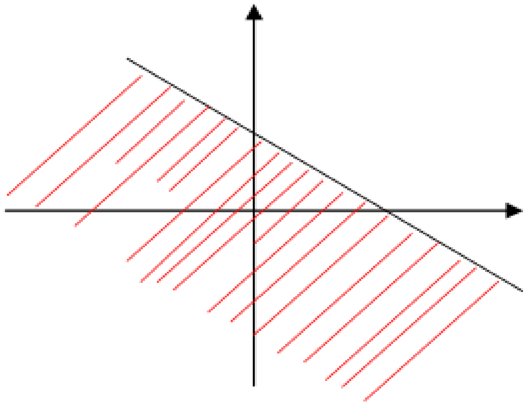
1. لدينا $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y}$ إذن:

$$D_f = \left\{(x, y) \in\ \mathbb{R}^2:\ 6 - (2x - 3y\ ) \geq 0\right\}$$

$\Rightarrow 2x - 3y \leq 6$

و بالتالي فإن f معرفة على نقاط خط المستقيم و أسفل خط المستقيم

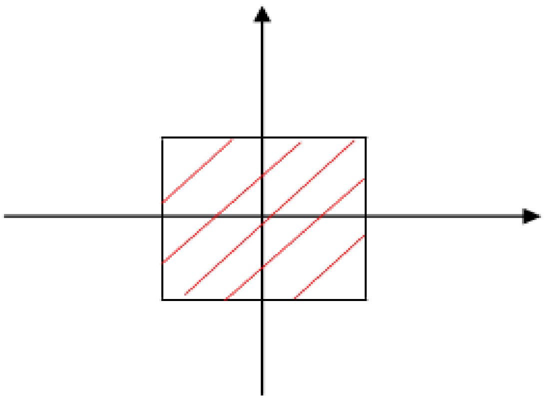
كما هو موضح في البيان التالي:



2. لدينا $g(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ إذن

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \geq 0 \text{ و } 1 - y \geq 0\right\}$$

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ و $1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$



4. النهايات

تعريف:

إذا كان f تابعا معرفا على ساحة D $(D \in \mathbb{R}^2)$ بإستثناء (x_0, y_0)، نقول أن l هي نهاية التابع f عند (x_0, y_0) و نكتب:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

مثال:

1. ليكن $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ نريد حساب $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ إن وجدت.

لاحظ أن f غير معرف عند $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

بفرض أن $(x, y) \to (0, 0)$ عبر المستقيم $y = mx$ فإن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

و بما أنه كلما غيرنا المستقيم الذي تقترب عبره النقطة (x, y) نحو $(0, 0)$ فإن m تتغير و بالتالي فالنهاية $l = \frac{m}{1+m^2}$ تتغير حسب السبيل. لذلك لا توجد نهاية

2. ليكن $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

النهاية غير موجودة.

ملاحظة:

تبقى النظريات المتعلقة بالنهايات في حالة تابع بمتغير واحد، صحيحة في حالة تابع بعدة متغيرات، و تبرهن بطريقة مشابهة.

5. الاستمرار

تعريف:

ليكن f معرفا على ساحة D تشمل (x_0, y_0). $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$. نقول أن التابع f مستمر عند النقطة (x_0, y_0) من ساحة تعريفه إذا تحقق:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

أي أن الإستمرار هو حالة خاصة للنهاية.

ملاحظة:

تبقى كل النظريات المتعلقة بالإستمرار في حالة تابع بمتغير واحد، صحيحة في حالة تابع بعدة متغيرات، و تبرهن بطريقة مشابهة.

مثال:

إذا كان f و g مستمرتين عند (x_0, y_0) فإن $f \pm g$ و $f . g$ و $\frac{f}{g}(g(x, y) \neq (0, 0))$ كلها توابع مستمرة عند (x_0, y_0).

مثال: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & : (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & : (x,y)=(0,1) \end{cases}$$

فنرى أن $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 1$ **إذن** f **يقبل نهاية عند** $(0,1)$ **و لكنه غير مستمر عند** $(0,1)$ **لأن :** $1 = \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) \neq f(0,1) = 0$

6. الاشتقاق

المشتقات الجزئية

ليكن $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**. نقول أن** f **يقبل مشتقا جزئيا عند النقطة** $\left(x_0, y_0\right)$ **بالنسبة للمتحول** x **إذا كانت النهاية التالية موجودة ووحيدة:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

و نرمز لهذه النهاية عندئذ بـ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)$ **أو** $f_x'(x_0, y_0)$**.**

و نقول أنه يقبل مشتقا حزئيا عند نقطة (x, y) **بالنسبة للمتحول** x **إذا كانت النهاية التالية موجودة ووحيدة:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x\ +h,y\ )-f(x\ ,y\ )}{h}$$

و نرمز لهذه النهاية عندئذ بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ **أو** $f'(x, y)$**. أو بإختصار بالرمز** $\frac{\partial f}{\partial x}$**.**

و نقول أنه يقبل مشتقا حزئيا عند نقطة (x_0, y_0) **بالنسبة للمتحول** y **إذا كانت النهاية التالية موجودة ووحيدة:**

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0\ ,y_0+k)-f(x_0\ ,y_0)}{k}$$

و نرمز لهذه النهاية عندئذ بـ $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)$**.**

أي أنه لحساب $\frac{\partial f}{\partial x}$ **يمكن اعتبار** $g(x) = f(x, y)$ **و يكون** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x)$ **فنعود إلى تعريف مشتق تابع بمتغير واحد، بإعتبار** y **كوسيط.**

مثال: لتكن $f(x, y) = x^2 + y^2$ **فإن:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

المشتقات الجزئية المتتابعة

إذا كان لـ $f(x,y)$ مشتقين جزئيين $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و قبل هذان المشتقان الجزئيان بدورهما الإشتقاق الجزئي، فنسمي المشتقات الجزئية الأخيرة بالمشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لـ f و نرمز لها بـ: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\ ,y\ )$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\ ,y\ )$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\ ,y\ )$.

حيث أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ أي أننا نقوم بإشتقاق $\frac{\partial f}{\partial x}$ جزئيا بالنسبة للمتحول x.

بينما $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ تعني أننا نقوم بإشتقاق $\frac{\partial f}{\partial y}$ جزئيا بالنسبة للمتحول x، أي نقوم بإشتقاق f جزئيا بالنسبة لـ y أولا ثم نقوم بإشتقاق الناتج بالنسبة لـ x ثانيا.

مثال:

$f(x,y) = x^2y + x$ فإن: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 1) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 1) = 2x$$

لاحظ أن: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

و هكذا فإن $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ تعني أن: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$ فنحسب $\frac{\partial f}{\partial y}$ أولا ثم الناتج لـ x ثم الناتج نشتقه بالنسبة لـ x مرة أخرى.

مثال:

$f(x,y) = x^4y + y^3$ و نحسب $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$. لدينا $\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 3y^2$ و حيث:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

فإن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(x^4 + 3y^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6y\ ) = 0$$

نظرية: إذا كان $f:\ D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مستمرا و كان مشتقاه الجزئيان من المرتبة الثانية
$(x,y) \to z = f(x,y)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ مستمران، عندئذ يكون: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك   السنة الأولى

رياضيات 1

السلسلة رقم 06

تمرين 01:

عين مجموعة تعريف التوابع التالية و مثلها يانيا

$f_1(x, y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$ ، $f_2(x, y) = ln(5x + 2y - 4)$ ،

$f_3(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{x - y}$ ، $f_4(x, y) = \frac{3xy}{2x-4y+1}$ ، $f_5(x, y) = x^y$

$f_6(x, y) = \frac{3x^2+y}{2x^2+2y^2-4x+y+1}$.

تمرين 02:

أحسب النهاية التالية

$$\lim_{(x,y) \to (+\infty,k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$$

تمرين 03:

أدرس استمرارية التابع f عند (x_0, y_0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تمرين 04:

عين المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للتوابع التالية:

$f(x, y) = \frac{3x^2y}{2x-4y+1}$ ، $g(x, y) = ln(5x + 2y - 4)$ ،

$l(x, y) = \sqrt{2x^2y - 3xy^3 + 1}$ ، $l(x, y) = e^{3x^2y-5x}$

المراجع

1. سعود محمود و لخضر بن عيسى. التحليل الرياضي. ديوان المطبوعات الجامعية، 2012.
2. بابا حامد، محاضرات في التحليل، ديوان المطبوعات، 1988.
3. .ق. علاب، عناصر من التحليل الرياضي، التوابع لمتغير واحد، ترجمة سعد الله بوبكر، ديوان المطبوعات، 2010.