المحور الثالث

الميكانيك النسبي

III.1. مقدمة

لقد رأينا أنه يجب لوصف حركة الجسيمات بصورة صحيحة في إطار النظرية النسبية الخاصة أن نستبدل معادلات التحويل الجاليلية بمعادلات تحويل لورنتز. ولأن قوانين الفيزياء يجب أن تظل كما هي تحت تحويلات لورنتز يجب أن نعمم قوانين نيوتن وتعريف كمية الحركة الخطية والطاقة بما يوافق معادلات تحويل لورنتز ومبدأ النسبية. وبالطبع هذه التعريفات المعممة يجب أن تؤول للتعريفات الكلاسيكية عندما $v \ll c$.

III.2. مراجعة ميكانيك نيوتن

تعرف القوة المؤثرة على الجسم وفق الميكانيك الكلاسيكي بانها مشتقة كمية الحركة بالنسبة للزمن وتعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{F_N} = \frac{d\overrightarrow{P_N}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\vec{v}) = m_0\frac{d\vec{v}}{dt} = m_0\vec{a} \qquad (1.\text{III})$$

وتمثل هذه الصيغة قانون نيوتن الثاني. ولكن وفق النظرية النسبية فان الكتلة تتغير بالنسبة للسرعة وتعرف القوة حينئذ بانها مشتق كمية الحركة النسبية بالنسبة للزمن. وتعطى الصيغة النسبية لقانون نيوتن الثاني بالشكل:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d(\gamma m_0\vec{v})}{dt} \qquad (2.\text{III})$$

عندما $v \ll c$ فان $\gamma \cong 1$ وعليه فان المعادلة النسبوية تؤول الى المعادلة الكلاسيكية.

لو اعتبرنا جسيم يتحرك في بعد واحد مثلا المحور ox فهناك قوة في هذا الاتجاه تسب تغيرا في كمية الحركة للجسيم، والعمل الذي تبذله هذه القوة على الجسيم هو:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\vec{P}}{dt}dx \qquad (3.\text{III})$$

العمل العنصري $\delta\omega$ في الإطار المرجعي الغاليلي (R) للقوة$\vec{F}$ المطبقة على نقطة مادية متحركة بالسرعة $\vec{v}$ أثناء الزمن dt يساوي:

$$\delta w = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.\vec{r} = dE_c \qquad (4.\text{III})$$

من جهة أخرى العمل هو التغير في الطاقة الحركي E_c.

III.3. *الشعاع* الرباعي طاقة ـ كمية الحركة

يمكن إيجاد العلاقة بين الطاقة وكمية الحركة من تعريف الطاقة الكلية:

$$E = E_0 + E_c$$

E_0 : الطاقة عند السكون وتساوي m_0c^2.

E_c : الطاقة الحركية.

الطاقة الحركية لجسم حر تعطى بالعلاقة:

$$E_c = \int \vec{F}\,.d\vec{r} \Longrightarrow \frac{dT}{dt} = \overrightarrow{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,.\vec{v}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m_0\gamma\vec{v} + m_0\frac{\gamma^3}{c^2}(\vec{\varphi}\,.\vec{v}).\vec{v} = m_0\gamma\vec{v}\left(1+\frac{\gamma^2}{c^2}\right) = m_0\gamma^3(\vec{\varphi}\,.\vec{v})$$

(5.III)

من جهة أخرى لدينا:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{\vec{\varphi}\,.\vec{v}}{c^2} \Longrightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) \qquad (6.\mathrm{III})$$

بالمكاملة نجد:

$$E_c = m\gamma c^2 + E_{c_0}$$

لما $\vec{v} = 0$ *فان* $E_c = 0$ *اي* $E_{c_0} = -mc^2$ *ومنه*

$$E_c = \mathrm{m}_0\gamma c^2 - m_0c^2$$

ومنه الطاقة الكلية تتكون من الطاقة الحركية E_c *والطاقة عند السكون* $E_0 = mc^2$

$$E = mc^2 + E_c = m\gamma c^2$$

وعليه فان الشعاع الرباعي لكمية الحركة- طاقة يصبح:

$$\vec{P}^{\mu} = m\vec{v}: \begin{cases} p_0 = im_0\gamma c = i\dfrac{E}{c} \\ \vec{p} = m_0\gamma\vec{v} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E} \quad ,\gamma = \frac{E}{m_0c^2}$$

شبه الطويلة

$$p^2 = m_0 v^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0 c^2 \Longrightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 + {m_0}^2 c^4$$

(7.III)

وهي مقدار صامد نسبيا وهي من النوع الزمني

و حسب تحويلات لورنتز قانون التحويل بين المعالم العطالية للشعاع الرباعي لكمية الحركة – طاقة كما يلي :

$$\overrightarrow{P'^{\mu}} \begin{cases} \dfrac{E'}{c} = \gamma(\dfrac{E}{c} - \overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{p'}) \\ \vec{p'}_x = \gamma(\vec{p}_x - \beta'.\dfrac{E}{c}) \\ \overrightarrow{p'}_y = \vec{p}_y \\ \overrightarrow{p'}_z = \vec{p}_z \end{cases}$$

4.III. *معادلة* التحريك النسبي

نعرف الشعاع الرباعي للقوة بالعبارة التالية

$$\overrightarrow{F^{\mu}} = \frac{d\overrightarrow{P^{\mu}}}{d\tau} = \gamma \frac{d\overrightarrow{P^{\mu}}}{dt} = \gamma(F_0, \vec{F})$$

$$F_0 = \frac{dp_0}{d\tau} = \gamma \frac{d\left(\frac{E}{c}\right)}{dt} = \gamma \frac{1}{c}\frac{dE_c}{dt} = \gamma \frac{\vec{F}.\vec{v}}{c}$$

وبالتالي يكون:

$$\vec{F}^{\mu} = \left(\gamma \frac{\vec{F}.\vec{v}}{c}, \gamma\vec{F}\right) \qquad (8.III)$$

قانون تحويل القوة هو

$$\overrightarrow{F'^{\mu}} = \begin{cases} {\gamma'}_{(v')}\left(\dfrac{\overrightarrow{F'}.\overrightarrow{v'}}{c}\right) = \gamma_{(V)}\gamma_{(v)}\left[\dfrac{\vec{F}.\vec{v}}{c} - \beta F_x\right] \\ {\gamma'}_{(v')}{F'}_x = \gamma_{(V)}\gamma_{(v)}\left[F_x - \beta\dfrac{\vec{F}.\vec{v}}{c}\right] \\ {\gamma'}_{(v')}{F'}_y = \gamma_{(v)}F_y \\ {\gamma'}_{(v')}{F'}_z = \gamma_{(v)}F_z \end{cases} \qquad (9.III)$$

من قانون تحويل السرعة $\overrightarrow{v'^{\mu}} = (\mathcal{L})\overrightarrow{v^{\mu}}$ وجدنا العلاقة:

$$\frac{\gamma_{(v)}}{\gamma'_{(v)}} = \frac{1}{\gamma_{(V)}(1-\frac{VV_x}{c^2})}$$

يمكن استنتاج قانون تحويل مركبات القوة $\vec{F}$ *والقدرة اللحظية* $(\vec{F}.\vec{v})$:

$$\overrightarrow{F'^{\mu}} = \begin{cases} \left(\overrightarrow{F'}.\overrightarrow{v'}\right) = \left[\frac{\vec{F}.\vec{v}-VF_x}{(1-\frac{VF_x}{c^2})}\right] \\ F'_x = \left[\frac{F_x - V\frac{(\vec{F}.\vec{v})}{c^2}}{(1-\frac{VF_x}{c^2})}\right] \\ F'_y = \frac{F_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{VF_x}{c^2}\right)} \\ F'_z = \frac{F_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{VF_x}{c^2}\right)} \end{cases} \qquad (10.III)$$

5.III. تطبيقات على الفوتون

حسب الدراسات النظرية فان الأمواج الكهرومغناطيسية عبارة عن جسيمات تدعى فوتونات ليس لها كتلة طاقتها مكممة $E = h\nu$. لكن الدراسات التجريبية في الميكانيك النسبي الفوتونات لها طاقة وكمية حركة تكتبان:

$$\vec{p} = m_0\gamma\overrightarrow{v} \quad ; \quad E = m_0\gamma c^2$$

بما ان الفوتونات ليس لها كتلة فان : $E^2 = \vec{p}^2c^2 + {m_0}^2c^4$

ومنه فان $p = \frac{E}{c}$

وعليه فان الشعاع الرباعي لكمية الحركة

$$\vec{p}^{\mu} = \begin{cases} p_0 = i\frac{E}{c} \\ \vec{p} = m_0\gamma\vec{v} \end{cases} \qquad (11.\text{III})$$

وهناك دراسات أخرى أجريت خلال قياس التردد ν فان :

$$E = h\nu = \hbar\omega, \ \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

وبالتالي فان: $p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k \Rightarrow \vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$\vec{p}^{\mu} = \begin{cases} p_0 = i\ \frac{\hbar\omega}{c} \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases} \qquad (12.\mathrm{III})$$

حسب هذه الملاحظات اقترح لويس بروغلي سنة 1923 ازدواجية موجة –جسيم للامواج الكهرومغناطيسية وعليه فان :

$$\vec{p}^{\mu} = \begin{cases} p_0 = i\frac{E}{c} = i\ \frac{\hbar\omega}{c} \\ \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\gamma\vec{v} = \hbar\vec{k} \end{cases} \qquad (13.\mathrm{III})$$

6.III. تكافؤ كتلة طاقة

من علاقة الكتلة : $m = m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$، هل الزيادة في الكتلة هي زيادة في عدد الذرات التي يحويها الجسم، أ م أن لها فهم آخر؟

لما $1 \ll \frac{v}{v}$ فان:

$$m = m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong m_0(1+\frac{v^2}{2c^2}+\cdots) \qquad (14.\mathrm{III})$$

وهذا يعني أن:

$$\Delta m = m - m_0 \cong \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} = \frac{KE_c}{C^2} \qquad (15.\mathrm{III})$$

K: هو ثابت

من الواضح أن الزيادة في كتلة الجسم تأتي من الطاقة الحركية التي يكتسبها أثناء الحركة. ومن خلال التأمل في المعادلة (15.III)،تمكن أينشتاين من القول أن هنالك عالقة تكافؤ بين الطاقة والكتلة بحيث تكون الطاقة مساوية للكتلة مضروبة في مربع سرعة الضوء. أي :

$$E = mc^2 \qquad (16.\mathrm{III})$$

تعتبر العلاقة بين الكتلة والطاقة أساس التحويلات والتفاعلات النووية، وتطلق عدة تسميات على هذه العلاقة منها تكافؤ المادة والطاقة. هما مفهومين غير مستقلين قابلين لتحويل إحداهما الى للأخرى.

7.III الشعاع الرباعي للاهتزاز (التواتر)

الموجة المستوية وحيدة اللون تتميز بالتواتر الزاوي ω و شعاع الموجة $\vec{k}$ حيث

ν هو التواتر $\qquad \omega = 2\pi\nu$

λ طول موجة $\qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

لنعتبر جسم حر له طاقة E ودفع $\vec{p}$ وكتلته m

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \quad / \quad \frac{v}{c} = \frac{|p|c}{E} \qquad (17.\text{III})$$

في ميكانيك الكم نصاحب كل جسم بموجة تتميز بالتواتر الزاوي ω و شعاع الموجة $\vec{k}$ حيث

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad , \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \qquad (18.\text{III})$$

مركبات الشعاع الرباعي طاقة – كمية حركة هي

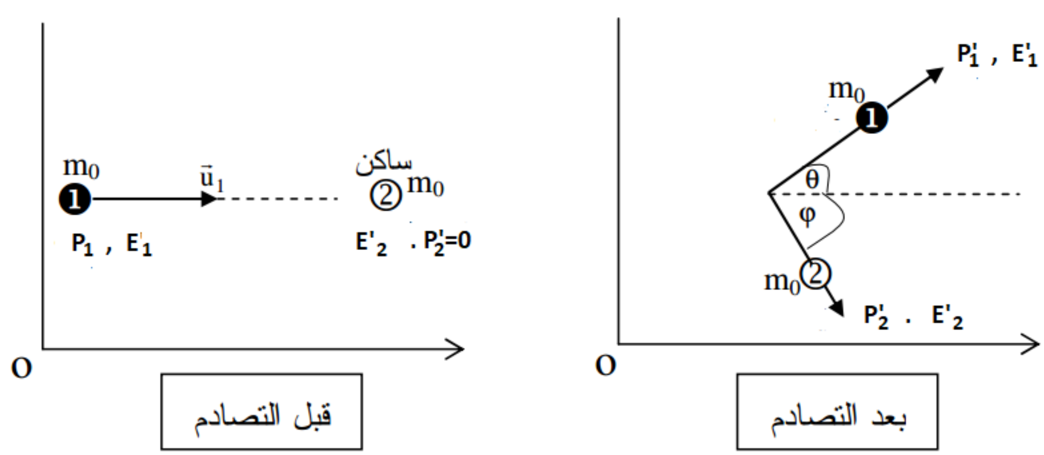
$$p^\mu = \left(i\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad (19.\text{III})$$

الشعاع الرباعي للموجة هو $k = \frac{c}{\hbar}p$ مركباته هي

$$k^\mu = \left(i\omega, c\vec{k}\right) \qquad (20.\text{III})$$

7.III التفاعل بين الجسيمات

نفرض أن جسيما حرا كتلته الساكنة $m_{0\,1}$ وكمية حركته $\overrightarrow{P_1}$ وطاقته الكلية E_1 تصادم مع جسيم آخر ساكن كتلته الساكنة $m_{0\,2}$ وكمية حركته $\overrightarrow{P_2}$ وطاقته الكلية E_2.



الشكل *1.III*: الجسمين قبل وبعد التصادم.

لنفرض ان كلا من كمية الحركة والطاقة محفوظين قبل وبعد التصلدم. بتطبيق قانون انحفاظ كمية الحركة نجد:

$$p_1 = p_x = p'_1 \cos\theta_1 + p'_2 \cos\theta_2 \qquad (21.III)$$

$$p_y = p'_1 \sin\theta_1 - p'_2 \sin\theta_2 = 0 \qquad (22.III)$$

في النسبية الخاصة لدينا :

$$E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2c^4 \Longrightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - {m_0}^2c^4} \qquad (23.III)$$

ومنه لدينا

$$(E'_1 = E'_2, m_{0\,1} = m_{0\,2} = m_0) \Longrightarrow p'_1 = p'_2 \qquad (24.III)$$

نجد بالتعويض في المعادلة (*15.III*)

$$p'_1 \sin\theta_1 - p'_2 \sin\theta_2 = 0 \Longrightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2 \qquad (25.III)$$

بالتعويض في المعادلة (13.III) نجد:

$$p_1 = 2p'_1 \cos\theta_1 = 2p'_2 \cos\theta_2 \qquad (26.III)$$

ومن قانون انحفاظ الطاقة :

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \Longrightarrow E_1 + 0 = E'_1 + E'_2 \qquad (27.III)$$

$$E'_1 = E'_2$$

ومنه

$$E'_1 = E'_2 = \frac{E_1}{2} \qquad (28.III)$$

من المعادلة (27.III) و(28.III) نجد

$$\cos\theta_1 = \frac{p_1}{2p'_1} = \frac{\frac{1}{c}\sqrt{{E_1}^2 - {m_0}^2c^4}}{\frac{2}{c}\sqrt{{E'_1}^2 - {m_0}^2c^4}} = \frac{\sqrt{{E_1}^2 - {m_0}^2c^4}}{2\sqrt{\left(\frac{E_1}{2}\right)^2 - {m_0}^2c^4}} = \frac{\sqrt{{E_1}^2 - {m_0}^2c^4}}{\sqrt{{E_1}^2 - 4{m_0}^2c^4}} \qquad (29.III)$$

8.III. مفعول كوانتوم

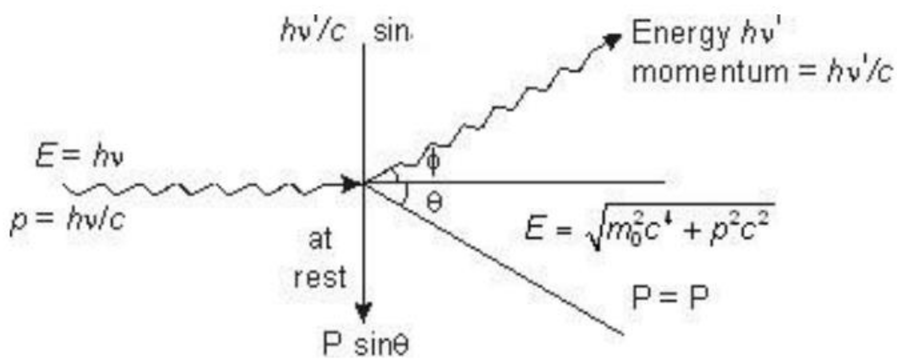
خلال دراسة تشتت أشعة X عن المادة الحظ آرثر كوانتوم عام 1923 أن الاشعة المتشتتة عن السطوح المعدنية تمتلك أطوال موجية أكبر من للأطوال الموجية
للأشعة الساقطة عليها. وبموجب النظرية الكهرومغناطيسية فإن الطول الموجي للإشعاعات المتشتتة ينبغي أن يكون مساويا للطول الموجي للأشعة الساقطة. وهذا يعني أن هنالك مشكلة من المطلوب حلها لتفسير الظاهرة.

ومن الواضح أن النظرية الكهرومغناطيسية تخفق مرة أخرى في تفسير تصرف الاشعاعات القصيرة وعلاقتها بالمادة .

قدم كوانتوم تفسيره للظاهرة على أساس أن الإلكترونات الحرة في المادة تمتص جزء من الطاقة التي تحتويها فوتونات أشعة X فتنطلق بطاقة حركية تتناسب مع الطاقة التي امتصتها فيما تتشتت فوتونات أشعة X بطاقة أقل أي بطول موجي أكبر .والمتشتتة والفرق بين الطول الموجي للأشعة الساقطة بموجب حسابات كوانتوم هو:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\theta) \qquad (30.III)$$

حيث ان m_0 كتلة الالكترون الساكن و θهي زاوية تشتت فوتون أشعة. X .



الشكل $2.III$: ظاهرة كوانتوم.

لغرض الوصول الى المعادلة (30.III) نحتاج الى استخدام قانون حفظ الطاقة وقانون حفظ كمية الحركة في عملية تصادم الفوتون مع الالكترون الساكن.

نلاحظ ان هذه الاشعة تنتشر بزوايا معينة مع انه من المفروض ان تكمل طريقها وبالتالي نلاحظ استطالة $\lambda' > \lambda$ ازداد الموجي الطول ان أي الفوتون

لاثبات ذلك ندرس الشعاع الرباعي لكمية الحركة قبل وبعد التصادم:

$$P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2 \qquad (31.III)$$

قبل التصادم

$$\vec{P}_1^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{iE_1}{c} \\ P_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}_2^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{iE_2}{c} \\ P_2 \end{pmatrix} \qquad (32.III)$$

بعد التصادم

$$\overrightarrow{P'}^{\mu}_{1} = \begin{pmatrix} \frac{iE'_1}{c} \\ P'_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}'^{\mu}_{2} = \begin{pmatrix} \frac{iE'_2}{c} \\ P_2' \end{pmatrix} \qquad (33.III)$$

بالنسبة للفوتون، الشعاع الرباعي لكمية الحركة معدوم لان كتلته معدومة ومنه بتطبيق مبدأ التصادم فان:

$$\vec{P}^{\mu}_{\text{الصدم قبل}} = \vec{P}^{\mu}_{\text{الصدم بعد}}$$

$$\begin{cases} p_1 = p_1{}' + p_2{}' \\ E_1 + E_2 = E_1{}' + E_2{}' \end{cases} \qquad (34.III)$$

ومنه

$$\begin{cases} p_2{}' = p_1{}' + p_1 \\ E_2{}' = E_2 + E_1 - E_1{}' \end{cases} \qquad (35.III)$$

الجداء السلمي

$$\vec{P}^{\mu}_{1}.\vec{P}^{\mu}_{2} = \overrightarrow{P'}^{\mu}_{1}.\overrightarrow{P'}^{\mu}_{2} \qquad (36.III)$$

بالتعويض يكون:

$$-\frac{E_1E_2}{c^2} = \overrightarrow{p'}_1.\overrightarrow{p'}_2 - \frac{E'_1E'_2}{c^2} \qquad (37.III)$$

ومنه:

$$-\frac{E_1E_2}{c^2} = p'_1p_2cos\theta - p'^2_1 - \frac{E'_1E'_2}{c^2} - \frac{E'_1E'_2}{c^2} + \frac{E'^2_2}{c^2} \qquad (38.III)$$

لدينا:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad (39.III)$$

$$E' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} \qquad (40.III)$$

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_0c^2}(1 - cos\,\theta) \qquad (41.III)$$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_0c^2}(1 - cos\,\theta) \Longrightarrow \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} + \frac{h}{m_0c^2}(1 - cos\,\theta)$$

$$\nu' = \left(\frac{1}{\nu} + \frac{h}{m_0c^2}(1 - cos\,\theta)\right)^{-1} \qquad (42.III)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow cos\,\theta = 0 \qquad (43.III)$$

ومنه

$$\nu' = \left(\frac{1}{\nu} + \frac{h}{m_0 c^2}\right)^{-1} \qquad (44.III)$$

لدينا $\nu = \frac{c}{\lambda}$ بالتعويض يكون:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\theta) \Rightarrow \Delta\lambda > 0 \qquad (45.III)$$

المقدار التالي يمثل طول موجة مفعول كوانتوم $\frac{h}{m_0 c} = \lambda_c = 0,024263A°$

أسئلة الفصل الثالث

س 1- هل المبدأ الأساسي للتحريك في النسبية الخاصة هو نفسه الذي كان في الفيزياء الكلاسيكية؟

س 2- اكتب عبارة الشعاع الرباعي طاقة – كمية الحركة؟

س 3- هل الطاقة الكلية تساوي الطاقة عند السكون؟

س 4- اكتب عبارة الشعاع الرباعي لشعاع الموجة؟

س 5- عرف ظاهرة كوانتوم وما الهدف من دراستها؟

س 6- عند تسليط اشعة قصيرة على المادة مثل اشعة γ في تجربة مفعول كوانتم. ماذا يحدث؟

تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول:

الشعاع الرباعي للسرعة يعطى كما يلي: $\overrightarrow{v^{\mu}} = (ic\,\gamma_{(v)}, \gamma_{(v)}\vec{v})$.

1- أوجد مركبات الشعاع الرباعي لكمية الحركة $\overrightarrow{P^{\mu}}$ و كذلك $\overrightarrow{P^{\mu}}^2$ و $\overrightarrow{v^{\mu}}^2$. ثم استنتج الطاقة النسبية بدلالة كمية الحركة؟

2- أوجد مركبات الشعاع الرباعي للقوة $\overrightarrow{F^{\mu}}$ وكذلك $\overrightarrow{F'^{\mu}}$ ؟

3- استنتج الشعاع الرباعي للتسارع ؟

التمرين الثاني:

1- برهن أن عبارة الطاقة في النسبية تكتب بالعلاقة $E^2 = \vec{p}^2c^2 - m^2c^4$.

2- اثبت ان مشتقة الطاقة بالنسبة لكمية الحركة تساوي السرعة النسبية $\frac{dE}{dP} = v$.

التمرين الثالث:

في تجربة ظاهرة كوانتوم لفوتون تواتره ν مصطدم بإلكترون نعتبره في حالة سكون. الفوتون المنتشر بواتر ν' يصنع زاوية θ مع اتجاه الفوتون الساقط. نلاحظ ان $\overrightarrow{P'^{\mu}_{\gamma}}, E^{\mu}{}_{\gamma}, \overrightarrow{P'^{\mu}_{e}}, E^{\mu}{}_{e}$ هي الاشعة الرباعية لطاقة – كمية الحركة قبل وبعد الصدم للفوتون والالكترون.

1) $a.$– اكتب معادلات انحفاظ الطاقة وكمية الحركة خلال هذا الصدم؟

$b.$- استنتج الشعاع الرباعي $\overrightarrow{P'^{\mu}}$ بدلالة الاشعة الرباعية السابقة؟

2) بين ان طاقة الفوتون بعد الصدم تعطى بالعلاقة: $$h\nu' = \frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{m_0}(1-cos\theta)}$$

3) استنتج التغير في الطول الموجي$\Delta\lambda$.

التمرين الرابع:

نعتبر تصادم مرن لجسم نسبي كتلته m وطاقته E_1 مع جسم له نفس الكتلة وساكن في المعلم R

1 – في حالة الطاقتين بعد التصادم متساويتين اوجد زوايا انتشار الجسمين بعد التصادم بالنسبة لاتجاه الجسم قبل التصادم

2- تطبيق نعتبر بروتون كتلته $m = 938MeV/c^2$ وطاقته $E_1 = 400GeV$ يصتدم ببروتون ساكن احسب الزوايا التي يتخذها البروتونين بعد التصادم بالنسبة لاتجاه البروتون القادم قبل التصادم .

حلول تمارين الفصل الثالث

حل التمرين الأول:

1- ايجاد مركبات الشعاع الرباعي لكمية الحركة $\overrightarrow{\mathrm{P}^{\mu}}$ و كذلك $\overrightarrow{\mathrm{P}^{\mu}}^2$ و $\overrightarrow{v^{\mu}}^2$

$$\vec{P}^{\mu} = m\vec{v}: \begin{cases} p_0 = im_0\gamma c = \dfrac{E}{c} \\ \vec{p} = m_0\gamma\vec{v} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}^{\mu}}^2 = \left(i\frac{E}{c}\right)^2 + (\vec{p})^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2}$$

إيجاد $\overrightarrow{v^{\mu}}^2$

$$\overrightarrow{v^{\mu}} = (ic\gamma)^2 + (\gamma\vec{v})^2 = -\gamma^2(v^2 - c^2) = -c^2$$

استنتاج الطاقة النسبية بدلالة كمية الحركة:

لدينا من عبارة الشعاع الرباعي لكمية الحركة

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E} \quad ,\gamma = \frac{E}{m_0c^2}$$

ومنه:

$$p^2 = m_0v^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0c^2 \Longrightarrow E^2 = \vec{p}^2c^2 + {m_0}^2c^4$$

2- ايجاد مركبات الشعاع الرباعي للقوة $\overrightarrow{\mathrm{F}^{\mu}}$ وكذلك $\overrightarrow{\mathrm{F}'^{\mu}}$

$$\overrightarrow{F^{\mu}} = \frac{d\overrightarrow{P^{\mu}}}{d\tau} = \gamma\frac{d\overrightarrow{P^{\mu}}}{dt} = \gamma(F_0, \vec{F})$$

$$F_0 = \frac{dp_0}{d\tau} = \gamma\frac{d\left(\frac{E}{c}\right)}{dt} = \gamma\frac{1}{c}\frac{dE_c}{dt} = \gamma\frac{\vec{F}.\vec{v}}{c}$$

وبالتالي يكون:

$$\vec{F}^{\mu} = \left(\gamma\frac{\vec{F}.\vec{v}}{c}, \gamma\vec{F}\right)$$

ويمكن استنتاج $\overrightarrow{F'^{\mu}}$ من قانون تحويل القوة:

$$\overrightarrow{F'^{\mu}} = \begin{cases} \gamma'_{(v')}\left(\frac{\overrightarrow{F\prime}.\overrightarrow{v\prime}}{c}\right) = \gamma_{(V)}\gamma_{(v)}\left[\frac{\vec{F}.\vec{v}}{c} - \beta F_x\right] \\ \gamma'_{(v')}F'_x = \gamma_{(V)}\gamma_{(v)}\left[F_x - \beta\frac{\vec{F}.\vec{v}}{c}\right] \\ \gamma'_{(v')}F'_y = \gamma_{(v)}F_y \\ \gamma'_{(v')}F'_z = \gamma_{(v)}F_z \end{cases}$$

3- استنتاج الشعاع الرباعي للتسارع:

من عبارة المبدا الأساسي للتحريك

$$\vec{F}^{\mu} = m\vec{a}^{\mu} \Rightarrow \vec{a}^{\mu} = \frac{\vec{F}^{\mu}}{m} \qquad (1.III)$$

حل التمرين الثاني:

1- لنبرهن أن عبارة الطاقة في النسبية تكتب بالعلاقة $E^2 = p^2c^2 - m^2c^4$

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E} \quad , \gamma = \frac{E}{m_0c^2}$$

ومنه:

$$p^2 = m_0v^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0c^2 \Longrightarrow E^2 = \vec{p}^2c^2 + {m_0}^2c^4$$

2- اثبت ان مشتقة الطاقة بالنسبة لكمية الحركة تساوي السرعة النسبية $\frac{dE}{dP} = v$

باشتقاق المعادلة السابقة نجد:

$$2EdE = 2c^2pdp \Rightarrow \frac{dE}{dp} = c^2\frac{p}{E} = c^2\frac{v}{c^2} = v$$

حل التمرين الثالث:

1) a. كتابة معادلات انحفاظ الطاقة وكمية الحركة خلال هذا الصدم

الشعاع الرباعي لكمية الحركة قبل وبعد التصادم:

$$\vec{P}^{\mu}_{\text{قبل الصدم}} = \vec{P}^{\mu}_{\text{بعد الصدم}}$$

$$P_{\gamma} + P_e = P'_{\gamma} + P'_e$$

عبارة الطاقة قبل وبعد الصدم:

$$E_\gamma + E_e = E_\gamma{}' + E'_{é}$$

b. استنتاج الشعاع الرباعي p'^μ الاشعة الرباعية السابقة

قبل التصادم

$$P_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\vec{u} \end{pmatrix} \qquad P_e = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

بعد التصادم

$$P'_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\vec{u}' \end{pmatrix} \qquad P'_e = \begin{pmatrix} \gamma_e m_e c \\ \overrightarrow{p'} \end{pmatrix}$$

$$P_\gamma + P_e = P'_\gamma + P'_e \Longrightarrow P_\gamma + P_e - P'_\gamma = P'_e \Longrightarrow \left(P_\gamma + P_e - P'_\gamma\right)^2 = (P'_e)^2$$

$$\Longrightarrow \left(P_\gamma\right)^2 + (P_e)^2 + \left(P'_\gamma\right)^2 + 2P_\gamma P_e - 2P_e P'_\gamma - 2P_\gamma P'_\gamma = (P'_e)^2$$

بالنسبة للفوتون مربع الشعاع الرباعي للدفع معدوم لان كتلته معدومة ومنه

$$\left(P_\gamma\right)^2 = 0 \qquad ,\left(P'_\gamma\right)^2 = 0$$

بالنسبة للالكترون

$$(P_e)^2 = m_e{}^2 c^2 \quad ,(P'_e)^2 = m_e{}^2 c^2$$

ومنه

$$P_\gamma P_e - P_e P'_\gamma - P_\gamma P'_\gamma = 0$$

$$P_\gamma P_e = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\vec{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = m_e E$$

$$P_e P'_\gamma = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\vec{u} \end{pmatrix} = m_e E'$$

$$P_\gamma P'_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\vec{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\vec{u}' \end{pmatrix} = \frac{EE'}{c^2} - \frac{EE'}{c^2}\vec{u}.\vec{u}' = \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta)$$

2) بين ان طاقة الفوتون بعد الصدم تعطى بالعلاقة: $h\nu' = \frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{m_0}(1-cos\theta)}$

بالتعويض في المعادلة السابقة:

$$m_e E - m_e E' - \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) = 0 \Longrightarrow \frac{E-E'}{EE'} = \frac{1}{m_e c^2}(1-\cos\theta) \Longrightarrow \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}(1-\cos\theta)$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'}$$

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)}$$

3) استنتج التغير في الطول الموجي $\Delta\lambda$.

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_0 c^2}(1-\cos\theta) \Longrightarrow \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} + \frac{h}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)$$

$$\nu' = \left(\frac{1}{\nu} + \frac{h}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)\right)^{-1}$$

ومنه

$$\nu' = \left(\frac{1}{\nu} + \frac{h}{m_0 c^2}\right)^{-1}$$

لدينا $\nu = \frac{c}{\lambda}$ بالتعويض يكون:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\theta)$$

حل التمرين الرابع:

في حالة تصادم مرن بين جسمين متماثلين احدهما ساكن والاخر متحرك وله طاقة عندما تكون طاقتيهما بعد التصادم متساويتين نحسب زوايا نتشار هذيم الجسمين

لدينا من انحفاظ كمية الحركة

$$p_1 = p_x = p'_1 \cos\theta_1 + p'_2 \cos\theta_2 \qquad (1)$$

$$p_y = p'_1 \sin\theta_1 - p'_2 \sin\theta_2 = 0 \qquad (2)$$

في النسبية الخاصة لدينا

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Longrightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{\ E^2 - m^2c^4}$$

ومنه لدينا

$$(E'_1 = E'_2, m_1 = m_2) \Longrightarrow p'_1 = p'_2$$

نجد بالتعويض في المعادلة (2)

$$p'_1 \sin\theta_1 - p'_2 \sin\theta_2 = 0 \Longrightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2$$

بالتعويض في المعادلة الاولى نجد

$$p_1 = 2p'_1 \cos\theta_1 = 2p'_2 \cos\theta_2$$

ومن انحفاظ الطاقة

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \Longrightarrow E_1 + 0 = E'_1 + E'_2$$
$$E'_1 = E'_2$$

ومنه

$$E'_1 = E'_2 = \frac{E_1}{2}$$

بالتعويض في معادلة كمية الحركة نجد

$$\cos\theta_1 = \frac{p_1}{2p'_1} = \frac{\frac{1}{c}\sqrt{{E_1}^2 - m^2c^4}}{\frac{2}{c}\sqrt{{E'_1}^2 - m^2c^4}} = \frac{\sqrt{{E_1}^2 - m^2c^4}}{2\sqrt{\left(\frac{E_1}{2}\right)^2 - m^2c^4}} = \frac{\sqrt{{E_1}^2 - m^2c^4}}{\sqrt{{E_1}^2 - 4m^2c^4}}$$

في حالة بروتون كتلته $m = 938MeV/c^2$ وطاقته $E_1 = 400GeV$ يصتدم ببروتون ساكن

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{{E_1}^2 - m^2c^4}}{\sqrt{{E_1}^2 - 4m^2c^4}} = \frac{\sqrt{(4\times10^3)^2 - (9{,}38)^2}}{\sqrt{(4\times10^3)^2 - 4(9{,}38)^2}} = 1 \Rightarrow \theta_1 = 0$$