الفصل الثاني

علم الحركة النسبية

1.II.مقدمة

تعتبر النظرية النسبية الخاصة التي قدمها العالم الألماني ألبرت اينشتاين عام 1905م من الأعمال العلمية الهامة التي ساهمت في تطور الفيزياء. حاول اينشتين في نظريته النسبية الخاصة ازالة التناقض بين نسبية جاليلي والنظرية الكهرومغناطيسية، ولقد عالج في نظريته جمل الاسناد التي تتحرك بالنسبة لبعضها البعض بسرعة ثابتة ولم يتعرض لجمل الاسناد المتسارعة الا في نظريته النسبية العامة والتي نشرت بعد عشر سنوات من نشر نظريته النسبية الخاصة.

2.II. فرضيات (مسلمات) اينشتاين

كان اينشتاين اول من تنبه الى ان الضوء يمكن ان ينتشر في الفراغ دون الحاجة الى وسط ناقل مثل الموجات الاخرى، بالتالي لاوجود للأثير ولا وجود لجمل اسناد كونية مطلقة وساكنة. ولقد وضع اينشتاين فرضيتين:

1- (ثبات سرعة الضوء) سرعة الضوء في الفراغ مطلقة وثابتة لا تعتمد على حالة حركة المراقب الذي يقيسها (وضع وحركة الشخص الذي يقوم بقياسها) ولا تعتمد على حالة مصدر الضوء (حركة الجسم المشع للضوء نفسه).

2-(مبدأ النسبية) قوانين وعلاقات الفيزياء تأخذ نفس الصورة في جميع جمل الإسناد القصورية (التي تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لبعضها البعض)، يعتبر هذا الافتراض تعميم لمبدأ نسبية غاليلي الذي اقتصره على قوانين الميكانيكا فقط. بمعنى القوانين الفيزيائية في جمع الأطر المرجعية الساكنة واحدة لا تتغير.

ومعنى ذلك أنه يمكننا أجراء تجربة فيزيائية معينة في معمل ساكن ونحصل على نفس النتائج تماما لو كان هذا المعمل متحرك بسرعة منتظمة، طالما أننا طبقنا نفس القوانين الفيزيائية في الحالتين. ويعرف هذا المبدأ بمبدأ نسبية الحركة وهو يعتبر أساس للميكانيكا الكلاسيكية.

استخدمت الفرضية الاولى لتفسير النتيجة السلبية لتجربة مايكلسون ومورلي حيث توضح هذه الفرضية عدم تأثير السرعة النسبية على سرعة الضوء المطلقة حيث تقول هذه الفرضية ان سرعة الضوء c وليس $c-v$ أو $c+v$.

3.II. تحويلات لورنتز: تمدد الزمن وتقلص الطول

إن من يتأمل الصياغة الرياضية لقوانين ماكسويل المدرجة في المحور الاول ليجد أنها توحي بتداخل الزمان والمكان معا. وقد وجد الفيزيائي الدنيماركي أنطون هندريك لورنتز أن معادلات ماكسويل لا تبقى محافظة

على صيغتها تحت تحويلات غاليليو بل تبقى محافظة على صيغتها تحت تحويلات جديدة يتداخل فيها الزمان مع المكان فعالً وهذه التحويلات في بعد مكاني واحد. وهي كآلاتي:

$$\begin{cases} ct=\gamma(ct'+\beta x') \\ x=\gamma(x'+c\beta t') \\ y=y' \\ z=z' \end{cases} \qquad (1.II)$$

حيث β هو السرعة المختصرة وعبارتها هي $\beta=\frac{V}{c}$

و γ هو معامل لورنتز وعبارته هي $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

نتحصل على تحويلات لورنتز العكسية باستبدال السرعة النسبية V بـ $-V$ و (x,y,z)بـ (x',y',z') والعكس صحيح وعبارتها هي

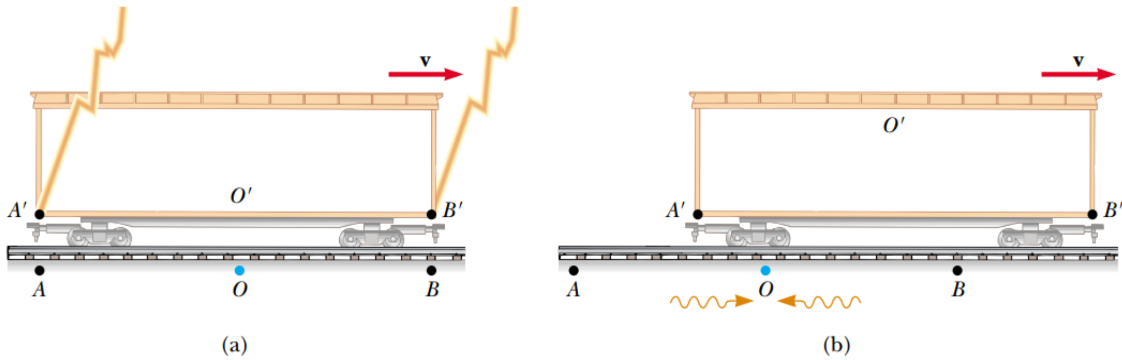
$$\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta x) \\ x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \qquad (2.II)$$

1.3.II. التزامن ونسبية الزمن

ابتكر أينشتاين التجربة الفكرية التالية لتوضيح هذه النقطة. تتحرك عربة قطار بسرعة منتظمة، وتضرب صاعقتان طرفيها، كما هو موضح في الشكل a.1.II، تاركين علامات على عربة القطار وعلى الأرض. العلامات الموجودة على عربة القطار مسماة بـ A’ و B’، وتلك الموجودة على الأرض مسماة بـ A و B. يكون المراقب O’المتحرك مع عربة القطار في منتصف الطريق بين A’ و B’، ويكون المراقب O الموجود على الأرض في منتصف الطريق بين A وB. الأحداث التي سجلها المراقبون هي ضرب عربة القطار بواسطة صاعقتين.

تصل إشارات الضوء الصادرة من A و B في اللحظة التي تضرب فيها الصاعقتان إلى المراقب O في نفس الوقت، كما هو موضح في الشكل b.1.II. يدرك هذا المراقب أن الإشارات قد انتقلت بنفس السرعة على مسافات متساوية، وبالتالي يستنتج بشكل صحيح أن الأحداث في A و Bحدثت في وقت واحد. الآن، ضع في اعتبارك نفس الأحداث كما رآها المراقب O’. وبحلول الوقت الذي وصلت فيه الإشارات إلى المراقبO ، يكون المراقب O’ قد تحرك كما هو موضح في الشكل b.1.II. وبالتالي، تكون الإشارة من B’ قد اجتاحت بالفعلO’ ، لكن الإشارة من A’ لم تصل بعد إلى O’. بعبارة أخرى، يرى O’ الإشارة من B’ قبل رؤية الإشارة من A’. وفقًا لأينشتاين، يجب أن يجد المراقبان أن الضوء ينتقل بنفس السرعة. لذلك، يستنتج المراقب O’أن البرق يضرب مقدمة عربة القطار قبل أن يضرب مؤخرتها.

تُظهر هذه التجربة الفكرية بوضوح أن الحدثين اللذين يبدو أنهما متزامنان للمراقب O لا يبدو أنهما متزامنان أيضًا للمراقب O’.



الشكل 1.II: رسم توضيحي لمفهوم التزامن

ليكن $B(t_B,x_B)$ و$A(t_A,x_A)$ حدثين متزامنين كما يراهما المراقب O والذي يستلزم ان $t_A = t_B$، لايجاد زمن الحدثين في المعلم $B'(t'_B,x'_B)$ و $A'(t'_A,x'_A)$ كما يراهما المراقب O’ نستعمل تحويلات لورنتز:

$$\begin{cases} ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) \\ ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) \end{cases} \qquad (3.II)$$

$$t'_A - t'_B = \frac{\gamma\beta}{c}(x_A - x_B) \qquad (4.II)$$

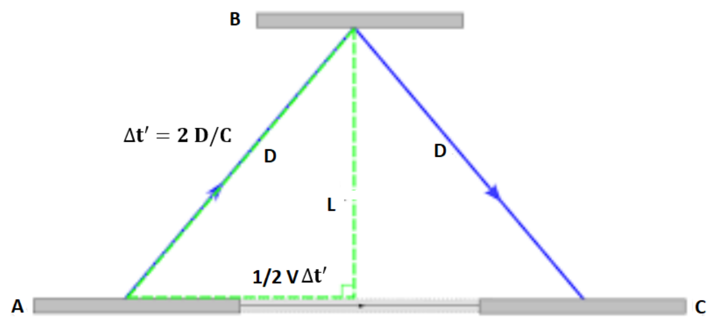
$$x_A \neq x_B \Longrightarrow t'_A \neq t'_B$$

تُظهر هذه التجربة الفكرية بوضوح أن الحدثين اللذين يبدو أنهما متزامنان للمراقب O لا يبدو أنهما متزامنان أيضًا للمراقب O’. عليه يمكن القول

ان التزامن يبقى محفوظ إذا كان في نفس المكان ومنه التزامن يفقد صفته المطلقة.

2.3.II. تمدد الزمن Time Dilation

افترض أن مرجع متحرك كعربة قطار مثلا، تسير بسرعة v بالنسبة إلى رصيف المحطة وبداخلها شخص يعمل تجربة داخل العربة. نفترض وجود مصباح ضوئي وسط أرضية العربة ولنفترض وجود مرآة في سقف العربة تعكس شعاع الضوء الساقط عليها كما مبين في الشكل 2.II. ليكن الزمن اللازم لومضة الضوء لكي تصل السقف ثم تعود هو0 بالنسبة إلى المشاهد الذي في العربة. ما هو الزمن اللازم لومضة الضوء كي تنطلق من المصباح إلى السقف ثم تعود إلى أرضية العربة بالنسبة لمشاهد يقف على الرصيف؟



الشكل 2.II. اثبات تباطؤ الزمن.

- إن المشاهد الذي هو في عربة القطار نفسها سيرى ومضة الضوء ترتفع بخط مستقيم من أرضية العربة إلى السقف ثم تنعكس إلى الارضية ثانية. المسافة
التي تقطعها الومضة هي 2L ولذا فإن:

$$\Delta t = \frac{2L}{C} \qquad (5.II)$$

- وإن المشاهد الذي يقف على الرصيف سيرى شعاع الضوء متحركا بمسار يشكل مثلثا متساوي الساقين ضلعيه المتساويين هما خط الاشارة الضوئية الصاعدة
والاشارة النازلة. والضلع الثالث هو أرضية القطار نفسها.
المسافة التي يقطعها الضوء هي 2D حيث أن :

$$D = \sqrt{L^2 + \left(V.\frac{\Delta t\prime}{2}\right)^2} \qquad (6.II)$$

ولكن الزمن اللازم لقطع المسافة D هو:

$$\Delta t' = \frac{2D}{C} \qquad (7.II)$$

لذا فان:

$$\Delta t' = \frac{2}{C}\sqrt{(\Delta t_0 C/2)^2 + (V\Delta t'/2)^2} \qquad (8.II)$$

أي أن:

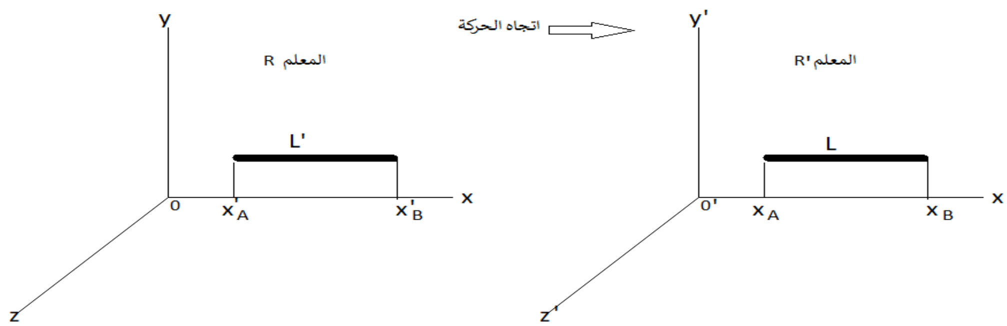
$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 + \frac{V^2}{C^2}\Delta t'^2 \qquad (9.II)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \qquad (10.II)$$

وهو قانون تمدد الزمن.

3.3.II. تقلص الطول Contraction Length

من النتائج المباشرة لتحويلات لورنتز انكماش الطول (تقلص). لتكن مسطرة نهايتيها هما الحدثان (x_B, x_A)ساكنة في المعلم R'موازية للمحور $o'x'$ طولها $L = x_B - x_A$. فان طولها في المعلم R سيكون $L' = x'_B - x'_A$. نهايتي المسطرة مقاستين في نفس اللحظة في المعلم ومنه $t'_B = t'_A$.



الشكل 3.II. اثبات انكماش الطول.

باستعمال تحويلات لورنتز نجد:

$$\begin{cases} x_A = \gamma(x'_A + \beta c t'_A) \\ x_B = \gamma(x'_B + \beta c t'_B) \end{cases} \Longrightarrow L = x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma L' \qquad (11.II)$$

وعليه فان :

$$L' = \gamma L \qquad (12.II)$$

وهو قانون الانكماش الطولي.

4.II. قانون تركيب السرعات في النسبية الخاصة

جسم يتحرك بسرعة$\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ في المعلم R وبسرعة $\overrightarrow{v'}(v'_x, v'_y, v'_z)$ في المعلم R' العلاقة بين السرعتين وذلك باستخدام تحويلات لورنتز تكون

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x'+\beta c t')}{d(t'+\frac{\beta}{c}x')} \qquad (13.II)$$

بقسمة البسط والمقام على dt

$$v_x = \frac{\frac{dx\prime}{dt\prime}+\beta c\frac{dt\prime}{dt\prime}}{\frac{dt\prime}{dt\prime}+\frac{\beta dx\prime}{c\,dt\prime}} = \frac{v\prime_x+\beta c}{1+\frac{v\prime_x\beta}{c}} \qquad (14.II)$$

حيث أن $\boldsymbol{V} = \frac{\beta}{c}$ هي السرعة النسبية بين المعلمين (سرعة R' بالنسبة لـ R).

$$v_x = \frac{v\prime_x+V}{1+\frac{v\prime_x V}{c^2}} \qquad (15.II)$$

وباتباع نفس الطريقة نجد:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v\prime_y}{\gamma\left(1+\frac{v\prime_x V}{c^2}\right)} \qquad (16.II)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v\prime_z}{\gamma\left(1+\frac{v\prime_x V}{c^2}\right)} \qquad (17.II)$$

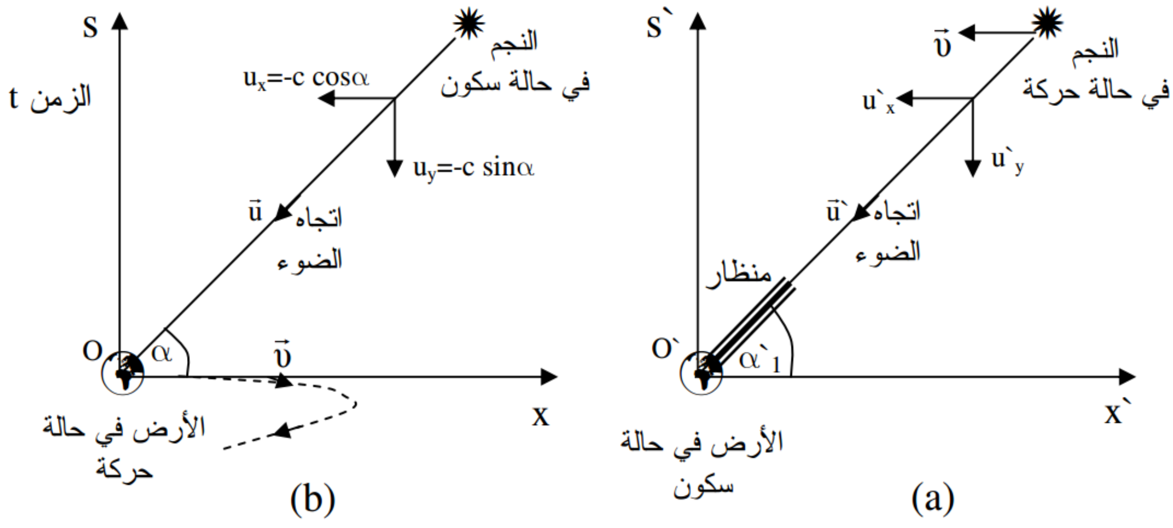
لإيجاد مركبات السرعة العكسية نستبدل V بـ V- فنتحصل على:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V}{1-\dfrac{v_x V}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1-\dfrac{v_x V}{c^2}\right)} \\ v'_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1-\dfrac{v_x V}{c^2}\right)} \end{cases} \qquad (18.II)$$

5.II. تطبيق: انحراف الضوء

اكتشف ظاهرة الزيغ من قبل العالم الفلكي برادلي سنة 1728. فقد لاحظ تغيرا في الموضع الظاهري للنجم خلال فترات زمنية مختلفة في السنة. وقد أعزى ذلك الى سرعة الأرض وهي تتحرك حول الشمس. وفسر ذلك باستخدام تحويلات لورنتز للسرعة.

لنعتبر ان النجم والشمس ساكنين في المعلم R، وان الارض في الاتجاهx بالسرعة V كما هو موضح في الشكل 4.II. وفي المعلم R' تكون الأرض اذن ساكنة.



الشكل 4.II. (a) النجم متحرك والأرض ساكنة في المعلم (R') (b) النجم ساكن والأرض متحركة في المعلم (R)

نفرض ان الضوء يصنع زاوية α مع المحور ox . في المعلم المرتبط بالأرض تلسكوب آخر يرى موضع النجم مائل بالزاوية α_1' بالنسبة للمحور للمحور $o'x'$.

في المعلم R الشعاع الضوئي له مركبات السرعة التالية :

$$v_x = -c\cos\alpha \qquad v_y = -c\sin\alpha \qquad v_z = 0 \qquad (19.II)$$

حسب قانون تركيب السرعات

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1-\frac{V}{c^2}v_x} = \frac{-c.cos\alpha - V}{1+\beta cos\alpha} \qquad (20.II)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{V}{c^2}v_x\right)} = \frac{-c.sin\alpha}{\gamma(1+\beta cos\alpha)} \qquad (21.II)$$

ومنه $\tan\alpha_1'$ يكتب كما يلي

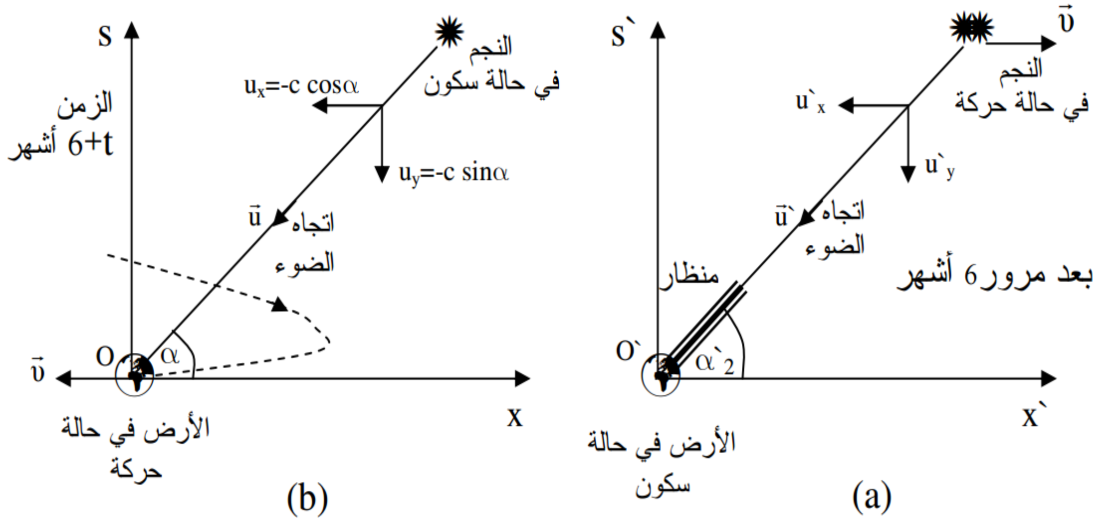
$$\tan\alpha_1' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{sin\alpha\sqrt{1-\beta^2}}{(cos\alpha-\beta)} \qquad ; \qquad \beta = \frac{V}{c}$$

اذا

$$\tan\alpha_1' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\tan\alpha}{1-\beta(\cos\alpha)^{-1}} < \tan\alpha \qquad (22.II)$$

وعليه فان: $\alpha'_1 < \alpha$

- وبعد مرور ستة اشهر تكون الأرض في حالة حركة بالاتجاه المعاكس نسبة الى الشمس، اي سرعة المعلم R' بالنسبة المعلم R هي $-V$ ومنه :



الشكل 5.II (a) *حركة النجم بعد ستة أشهر والأرض ساكنة في المعلم* (R') (b) *النجم ساكن والأرض متحركة بعد ستة أشهر في المعلم* (R)

ومنه $tan\,\alpha_2'$ يكتب كما يلي

$$\tan\alpha_2' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\tan\alpha}{1-\beta(\cos\alpha)^{-1}} \qquad (13.II)$$

اذا $\alpha_2' \neq \alpha$ وهذا يعني انه يجب امالة التلسكوب للرؤية النجم.

اذا كان:

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{3\times10^4}{3\times10^8} = 10^{-4} \ll 1 \qquad \text{يعني هذا} \qquad \gamma \cong 1$$

وبالتالي:

$$\tan\alpha_1' = \tan\alpha - \frac{\beta\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad (24.II)$$

نضع $\Delta\alpha = \alpha_1' - \alpha$

$$\tan\alpha_1' = tan(\Delta\alpha + \alpha) \qquad (25.II)$$

نستعمل نشر تايلور:

$$\tan\alpha_1' \simeq tan(\alpha) + \Delta\alpha\frac{d}{d\alpha}\tan\alpha \qquad (26.II)$$

$$\tan\alpha_1' \simeq tan(\alpha) + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad (27.II)$$

بمقارنة العلاقتين(26.II) و (27.II) نجد:

$$\frac{\Delta\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{\beta \sin\alpha}{cos^2\alpha} \implies \alpha_1{}' = \alpha - \beta \sin\alpha \Rightarrow \alpha_1{}' < \alpha \qquad (28.II)$$

نفس الشيء بعد ستة أشهر يكون:

$$\alpha_2{}' = \alpha + \beta\sin\alpha \Rightarrow \alpha_2{}' > \alpha \qquad (29.II)$$

نستنتج مما سبق انه بسبب حركة الارض حول الشمس فان امالة التلسكوب تكون محصورة بين الزاويتين $\alpha_1{}'$ و $\alpha_2{}'$ حتى يبقى النجم في مجال الرؤية طول السنة.

6.II. فضاء الزمكان لمينكوفسكي (Minkowski Spacetime)

أدرك مينكوفسكي في عام 1907م أن نظرية النسبية الخاصة التي نشرها تلميذه السابق ألبرت آينشتاين في عام 1905م استنادا إلى الأعمال السابقة للورنتز وبوانكاريه، يمكن أن تفهم بشكل أفضل في فضاء رباعي الأبعاد، والمعروف باسم "زمكان مينكوفسكي". هذا الفضاء يمزج بين مفهومي الزمن والمكان ليشكلا معاً هيكلًا واحدًا يُسمى "الزمكان". ويُعتبر هذا التصور ثوريًا لأنه يتخطى المفاهيم التقليدية للمكان والزمن اللذان كانا يُعتبران منفصلين في الفيزياء الكلاسيكية.

- في فضاء مينكوفسكي، يتم تمثيل أي حدث باستخدام إحداثيات رباعية(x, y, z, t) :، حيث:
- المسافة بين نقطتين في فضاء مينكوفسكي تُقاس باستخدام ما يُسمى بـ "المتر المكاني الزماني"، وهو مختلف عن المسافة في الفضاء التقليدي.
- يُعبَّر عن الفارق بين حدثين في الزمكان باستخدام المسافة المينكوفسكية، والتي تُحسَب كما يلي:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \qquad (30.II)$$

باستخدام المخطط الزمكاني يمكن تقسيم مجمل الزمكان إلى ما هو:

- فضاء شبه الزمانيةlike-Time يمثل عالم يشبه عالمنا حيث تكون الحوادث فيه مرتبطة سببيا فتنتقل الإشارات بسرع أقل من سرعة الضوء. وهو الذي تكون فيه:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 > 0 \qquad (31.II)$$

- فضاء شبه مكاني like-space تكون الحوادث فيه غير مرتبطة سببيا وتنتقل إشارة الحوادث فيه بسرع أكبر من سرعة الضوء. العالم الذي نعرفه جيدا ونعيش فيه هو العالم شبه الزماني، أما العالم شبه المكاني فليس متصلا بعالمنا بشكل مباشر. وتكون فيه:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 < 0 \qquad (32.II)$$

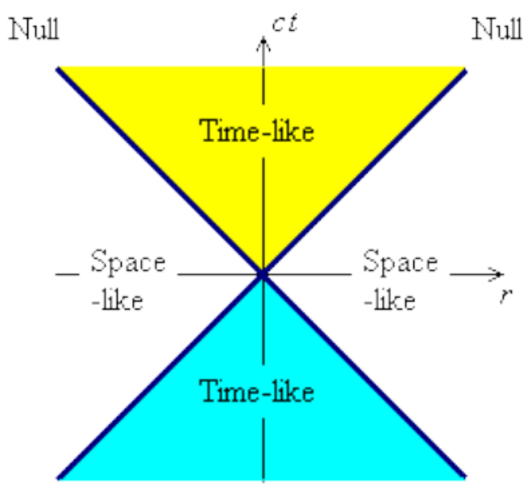
- الفضاء صفريا (شبه ضوئية) like-null ويمثل هذا العالم مسار الضوء نفسه وأيةً أشعة كهرومغناطيسية في الزمكان، حيث تكون المسافة الزمكانية صفر يمكنً ان نعبر عنه:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0 \qquad (33.\text{II})$$

هذا الفضاء يسمح لنا بفهم العديد من الظواهر المرتبطة بسرعات عالية وقوى جاذبية قوية بشكل رياضي دقيق، ويُعتبر الأساس الذي قامت عليه نظرية النسبية الخاصة. فضاء مينكوفسكي ليس فقط نموذجًا مجردًا، بل هو أداة قوية لفهم بنية الكون عند التعامل مع السرعات العالية والأبعاد الزمانية والمكانية بشكل مترابط.

7.II. المخروط الضوئيLight Cone

يؤلف العالم شبه الزماني مخروط أسفل يمثل أحداث الماضي ومخروط أعلى يمثل حوادث المستقبل تفصلهما لحظة الحاضر وكما مبين في الشكل 6.II ويوجد على طرفي هذين المخروطين مساحة الفضاءات الشبه مكانية التي تكون فيها الحوادث السببيةcausal-non وتتواصل مع بعضها بسرعة أكبر من سرعة الضوء. وفي واقع الامر فإن الفضاءات الشبه مكانية غير مفهومة بالقدر الذي نفهم فيه الفضاءات شبه الزمانية. إن جميع الحوادث التي هي داخل مخروط الماضي تكون قد حصلت ومضت. وجميع الحوادث التي في مخروط المستقبل لم تحصل بعد، وملتقى أرس المخروطين هو لحظة الحاضر المتحركة دوما.



الشكل 6.II: المخروط الضوئي

للمخططات الزمكانية والمخاريط الضوئية فائدة في تكوين صورة عن تفاعلات الجسيمات الاولية وتحولاتها والقوى الفاعلة كما هو الحال في مخططات فينمان

diagrams Feynmanالتي تستخدم في علوم الالكتروديناميك الكمومي ونظرية المجال الكمي.

8.II. الاشعة الرباعية

فضاء الزمكان هو فضاء متجه رباعي الأبعاد، كل نقطة في هذا الفضاء تمثل "حدثًا" تقابل ثلاثة إحداثيات مكانية وأخرى زمنية، يمكن اعتبار الحدث الذي احداثياته (ct, x, y, z)على انه شعاع رباعي ينتمي الى معلم زمن-مكان رباعي الابعاد مركباته تكتب بالشكل $x^{\mu}, \mu = 0,1,2,3$

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \qquad (34.\text{II})$$

الشعاع الرباعي لموضع هذا الحدث يكتب كما يلي:

$$\overrightarrow{R^{\mu}} = \begin{cases} x_0 = ict \\ x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \qquad \text{اذن} \qquad \overrightarrow{R^{\mu}} = (ict, \vec{R}) \qquad (35.II)$$

يمكن التعبير عن تحويلات لورنتز بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$\overrightarrow{R'^{\mu}} = (\mathcal{L})\overrightarrow{\mathrm{R}^{\mu}} \qquad (36.\text{II})$$

حيث $\mathcal{L}$ هي مصفوفة لورنتز ونكتب:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{(V)} & -\beta\gamma_{(V)} & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_{(V)} & \gamma_{(V)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

وعليه نكتب:

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma_{(V)}(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma_{(V)}(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \qquad (37.\text{II})$$

1.8.II. خواص الاشعة الرباعية ومترية منكوفسكي

- التركيب الخطي للأشعة الرباعية هو شعاع رباعي
- جداء شعاع رباعي بمعامل ثابت هو شعاع رباعي
- الجداء السلمي لشعاعين رباعيين هو:

$$v.w = w.v = (v^{\mu}e_{\mu})(w^{\nu}e_{\nu}) = v^{\mu}w^{\nu}e_{\mu}e_{\nu} = g_{\mu\nu}v^{\mu}w^{\nu} = v^{\mu}w_{\mu} = v_{\mu}w^{\mu} = g^{\mu\nu}v_{\mu}w_{\nu} \qquad (38.\text{II})$$

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu \qquad (39.II)$$

- الشعاعان و متعامدان اذا كان $v.w = 0$

$g_{\mu\nu}$هي مركبات مصفوفة المترية وهي مصفوفة متناظرة:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

- قانون تحويل مركبات مترية من قاعدة الى قاعدة اخرى هو:

$$g'_{\mu\nu} = e'_\mu e'_\nu = \left(\Lambda_\mu^\alpha e_\alpha\right)\left(\Lambda_\nu^\beta e_\beta\right) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta} \qquad (40.II)$$

- المصفوفة العكسية للمترية تحقق العلاقة التالية:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \qquad (41.II)$$

المسقط العمودي للشعاع الرباعي يحقق:

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu \qquad , v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu \qquad (42.II)$$

- هذه المركبات تتحول بتغيير القاعدة كما يلي:

$$v'_\mu = \Lambda_\mu^\nu v_\nu \qquad (43.II)$$

- مترية منكوفسكي التي تحكم كل النسبية الخاصة لها الشكل التالي

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{v})$$

$$v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3) = g_{\mu\nu} v^\nu = g_{\mu\nu}(v^0, v^1, v^2, v^3) = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3)$$

$$= (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{v})$$

الجداء السلمي يمكن كتابته كما يلي:

$$v.w = v^\mu w_\mu = v^0.w^0 - v^1.w^1 - v^2.w^2 - v^3.w^3 = v^0.w^0 - \vec{v}.\vec{w}$$

$$v.v = (v^0)^2 - \vec{v}^2 \qquad (44.II)$$

2.8.II. الشعاع الرباعي للسرعة

في الفضاء الزمكان يعطى الشعاع الرباعي للسرعة بالمركبات $\overrightarrow{v^\mu} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$. وهو مشتق شعاع الموضع الرباعي بالنسبة للزمن الذاتي.

$$\overrightarrow{v^{\mu}} = \frac{d\overrightarrow{R^{\mu}}}{d\tau} \quad , d\tau = \frac{dt}{\gamma_{(v)}} \text{ الزمن الذاتي} \tag{45.II}$$

وبالتالي:

$$\overrightarrow{v^{\mu}} = \begin{cases} v_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \gamma_{(v)} \frac{d(ict)}{dt} = ic\gamma_{(v)} \\ v_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \gamma_{(v)} \frac{dx}{dt} = \gamma_{(v)} v_x \\ v_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \gamma_{(v)} \frac{dy}{dt} = \gamma_{(v)} v_y \\ v_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma_{(v)} \frac{dz}{dt} = \gamma_{(v)} v_z \end{cases} \tag{46.II}$$

وعليه يكون:

$$\overrightarrow{v^{\mu}} = (ic\,\gamma_{(v)}, \gamma_{(v)}\vec{v}) = (v_0, \vec{v}) \tag{47.II}$$

باستعمال تحويلات لورنتز يكون قانون تحويل السرعة الرباعية بين المعالم هو :

$$\overrightarrow{v'^{\mu}} = (\mathcal{L})\overrightarrow{v^{\mu}} = \begin{cases} v'_0 = ic\gamma'_{(v)} = \gamma_{(v)}\gamma_{(V)}(ic - \beta v_x) \\ v'_1 = \gamma'_{(v)}v'_x = \gamma_{(v)}\gamma_{(V)}(v_x - ic\beta) \\ v'_2 = \gamma'_{(v)}v'_y = \gamma_{(v)}v_y \\ v'_3 = \gamma'_{(v)}v'_z = \gamma_{(v)}v_z \end{cases} \tag{48.II}$$

من العلاقة الأولى نجد: $\frac{\gamma_{(v)}}{\gamma'_{(v)}} = \frac{1}{\gamma_{(V)}(1-\frac{Vv_x}{c^2})} \quad , \beta = \frac{V}{c}$

V هي السرعة النسبية بين معلمين مرجعين.

v هي سرعة الجسيم المتحرك.

وبالتالي يصبح:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)}$$

وهي نفس مركبات السرعة المتحصل عليها سابقا. ونلاحظ ان $\overrightarrow{v'}^2 = \vec{v}^2 = -c^2$ وهي قيمة سلمية لا متغايرة.

3.8.II. الشعاع الرباعي للتسارع

يعرف الشعاع الرباعي للتسارع على أنه مشتق السرعة الرباعية بالنسبة للزمن الذاتي ويعطى بالمركبات $\overrightarrow{a^{\mu}} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{a}^{\mu} = \frac{d\vec{v}^{\mu}}{d\tau} = (a_0, \vec{a}) \qquad (49.II)$$

$$\overrightarrow{a^{\mu}} = \begin{cases} a_0 = \dfrac{dv_0}{d\tau} = \gamma_{(v)}\dfrac{d(ic\gamma_{(v)})}{dt} \\ a_1 = \dfrac{dv_1}{d\tau} = \gamma_{(v)}\dfrac{d(\gamma_{(v)}v_x)}{dt} \\ a_2 = \dfrac{dv_2}{d\tau} = \gamma_{(v)}\dfrac{d(\gamma_{(v)}v_y)}{dt} \\ a_3 = \dfrac{dv_3}{d\tau} = \gamma_{(v)}\dfrac{d(\gamma_{(v)}v_z)}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \gamma^4 \frac{\vec{v}\,.\vec{\varphi}}{c} \\ \vec{a} = \gamma_{(v)}\vec{\varphi} + \gamma^4 \frac{(\vec{v}\,.\vec{\varphi})\vec{v}}{c^2} \end{cases} \qquad (50.II)$$

حيث $\vec{\varphi} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ هو تسارع المتحرك.

قانون تحويل التسارع الرباعي بين المعالم هو:

$$\begin{cases} a'_0 = \gamma(a_0 + \vec{\beta}\vec{a}) \\ \overrightarrow{a'}_{\parallel} = \gamma(\vec{a}_{\parallel} + \beta a_0) \\ \vec{a}'_{\perp} = \vec{a}_{\perp} \end{cases} \qquad (51.II)$$

9.II. تطبيق: مفعول دوبلر النسبي

ان التجارب المهمة التي اجريت في الفيزياء الذرية كان بعضها يتضمن دراسة عن الاشعاعات المنبعثة من ذرات او نوى في حالة حركة. فلوحظ ان التردد الظاهري لهذه الاشعاعات يعتمد على الحركة النسبية بين المصدر والمشاهد.

نعتبر معلم R' يتحرك بالسرعة V بالنسبة للمعلم R و المقاتيتين المرتبطتين بالمعلمين تبدءان عد الزمن عندما يكون المبدأين منطبقان . هناك منبع ضوئي وحيد اللون ثابت في المعلم R' في النقطة O' يصدر موجة مستوية بتواتر ν' في الاتجاه $\vec{u}'$ من المستوي $x'o'y'$ مشكلا الزاوية θ' مع المحور x'، انتشار الضوء يمكن ان يعبر عنه في المعلمين كما يلي:

$$\psi = Ae^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad (27.II)$$

$$\psi' = Ae^{i(\vec{k}'.\vec{r}'-\omega' t')}$$

$k = \frac{\omega}{c}$هو شعاع الموجة طويلته $\vec{k} = k\vec{u}$

الطور $\left(\vec{k}.\vec{r} - \omega t\right)$هو صامد في كل المعالم العطالية ومنه

$$\vec{k}'.\vec{r}' - \omega' t' = \vec{k}.\vec{r} - \omega t$$

بحساب الجداء السلمي نجد

$$\omega' t' - (k' \cos\theta')x' - (k' \sin\theta')y' = \omega t - (k\cos\theta)x - (k\sin\theta)y$$

نستعمل الان تحويلات لورنتز

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\frac{\omega'}{c}\gamma(ct - \beta x) - (k'\cos\theta')\gamma(x - \beta ct) - (k'\sin\theta')y$$
$$= \omega t - (k\cos\theta)x - (k\sin\theta)y$$

$$\left(\frac{\omega'}{c}\gamma - \frac{\omega}{c} + \gamma(k'\cos\theta')\beta\right)ct + \left(k\cos\theta - \gamma k'\cos\theta' - \frac{\omega'}{c}\gamma\beta\right)x$$
$$+ (k\sin\theta - k'\sin\theta')y = 0$$

هذه المعادلة محققة من اجل كل x، y ، z و t

$$\frac{\omega'}{c}\gamma = \frac{\omega}{c} - \gamma(k' \cos\theta')\beta \qquad (28.II)$$

$$\frac{\omega'}{c}\gamma\beta = k\cos\theta - \gamma k' \cos\theta' \qquad (29.II)$$

$$k\sin\theta = k'\sin\theta' \qquad (30.II)$$

نضرب المعادلة $(29.II)$ في β ثم نطرح منها المعادلة $(28.II)$ فنجد

$$\frac{\omega'}{c}\gamma(1-\beta^2) = \frac{\omega}{c} - \beta k\cos\theta$$

ولدينا $k = \frac{\omega}{c}$ ومنه

$$\omega' = \omega\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (31.II)$$

حيث $\omega = 2\pi\nu$ فان

$$\nu' = \nu\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (32.II)$$

وهي عبارة مفعول دوبلر النسبي

المعادلتان $(30.II)$ و $(32.II)$ يعطيان العبارة

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta} \qquad (33.II)$$

نلاحظ النقاط التالية

- لدينا $\nu \neq \nu' \Longrightarrow \theta \neq \theta'$ بالنسبة للملاحظ المتحرك بالنسبة للمنبع هناك دائما تغير في التواتر (تغير في طول الموجة) وكذلك في اتجاه الموجة.
- اذا كان الشعاع الضوئي في الاتجاه $ox \parallel \vec{V} \Longrightarrow \theta = 0$ ومنه

$$\nu' = \nu\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Longrightarrow \nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu'$$

ومن المعادلة $(33.II)$ لدينا $\cos\theta' = 1 \Longrightarrow \theta' = 0$ اذا في هذه الحالة لايوجد تغير في اتجاه الموجة لكن

1- هناك زيادة في قيمة التوتر $\nu' > \nu$ اذا كان $\beta < 0$ معناه الملاحظ يقترب من المنبع

2- هناك نقصان في قيمة التوتر $\nu' < \nu$ اذا كان $\beta > 0$ معناه الملاحظ يبتعد عن المنبع

- في حالة مفعول دوبلر العمودي (الطولي) $oy \perp \vec{V} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ومنه من المعادلة (6) لدينا :

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

في هذه الحالة المعادلة (*32.II*) تعطي $\cos\theta' = -\beta$ ومنه يوجد تغير في اتجاه الموجة وزيادة في التوتر $\nu' > \nu$ في الحالتين لما الملاحظ يقترب او يبتعد من المنبع وهذا النوع من مفعول دوبلر الطولي لايوجد في حالة الدراسة الكلاسيكية وهو ناتج من ظاهرة تمدد الطول

10.II. الزمن الذاتي (الصحيح)time-Proper

نظرا الى اختلاف قياس الزمن الإحداثي Δt بحسب المرجع الذي يقاس منه فإن من الضروري تعريف زمن قياسي يكون صحيحا بالنسبة إلى جميع المراجع الحركية القصورية أيا كانت سرعتها. وقد سمي هذا الزمن الذاتيproper time يسمى هذاً أيضا زمن الساعة اليدوية wristwatch time أنه الزمن الذي يجده كل مشاهد فيً مرجعه الذي هو فيه أي يمكن القول إنه هو الزمن المحليlocal timeوإن كانت هذه التسمية غير متداولة كثير.

يعرف الزمن الصحيح $\Delta\tau$ بدلالة المسافة الزمكانية Space Time ΔS بالعلاقة:

$$\Delta S = ic\Delta\tau$$

$$(\Delta\tau)^2 = -\frac{(\Delta S)^2}{c^2} \qquad (34.II)$$

من جهة أخرى المسافة الزمكانية تعطى بالعلاقة:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \qquad (35.II)$$

وعليه بعد التعويض يكون:

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{c^2}[c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2\_(\Delta z)^2] \qquad (36.II)$$

نلاحظ ان المقدار $\Delta\tau$ لا يعتمد على الحالة الحركية للمرجع، ويمكن استخراج علاقته بالزمن Δt كما يلي:

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{(\Delta t)^2}{c^2}\left[1 - \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta t)^2}\right] \qquad (37.II)$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (38.II)$$

نلاحظ انه إذا استخدمنا هنا علاقة تباطؤ الزمن فإننا نحصل على $\Delta\tau = \Delta t'$

أسئلة الفصل الثاني

س 1- ما هي فروض نظرية النسبية الخاصة؟

س2 - ما الذي تغير في وصف الكميات الفيزيائية وبالأخص في انحفاظها بعد طرح نظرية النسبية الخاصة؟

س3 - ما انكماش الطول وما تباطؤ الزمن وما هي الكمية اللاتغيرية في هذه الحالة؟

س 4- ما هي المتجهات الرباعية وما ضرورتها؟

س 5- ما هو الزمن الذاتي time proper وما ضرورته؟

س 6- ما هو المخروط الضوئي وكيف يتغير بحسب تغير السرعة النسبية؟

س 7- عندما يكون معامل لورنتز يساوي 1. كيف تكون العلاقة بين السرعة وسرعة الضوء c؟.

س 8- اكتب عبارة مفعول دوبلر النسبي واستنتج الطول الموجي لدوبلر النسبي؟.

تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول:

لدينا جسيمات البيون ذات طاقة عالية تنتج من تصادم بين النوترونات والبروتونات وتتحل هذه الجسيمات في معلمها الذاتي حسب قانون الانحلال التالي

$$N(t) = Ne^{-t/t_0}$$

حيث مدة حياتها المتوسطة هي $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8}s$

حزمة من جسيمات البيون تنتج في المسرع ولوحظ انه يبقى ثلث عددها على بعد 20 متر من المنبع

1- كم من الزمن يستغرق لتقطع جسيمات البيون 20 متر اذا كانت سرعتها $c \simeq v$

2- في اطار نسبية غاليلي كم يبقى من جسيمات البيون قبل وصولها لهذه المسافة

3- استنتج من الحساب السابق المعامل γ

4- ماهي سرعة جسيمات البيون

التمرين الثاني:

صاروخ طوله على الأرض 10m. جد مقدار النقص في طوله أثناء الطيران بسرعة 0.6C بالنسبة لمراقب على الأرض. ثم جد الوقت الذي يجب ان يمضي ليكون الفرق بين الزمن في الصاروخ والزمن على الأرض ثانية واحدة.

التمرين الثالث:

مكعب يتحرك بسرعة نسبية منتظمة v باتجاه أحد اضلاعه. اثبت ان حجمه V وكلته الحجمية ρ تعطى بالعلاقتين :

$$V = V_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{و} \qquad \rho' = \rho_0/(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

التمرين الرابع:

مسطرة مترية موجودة في المعلم R تصنع زاوية °37 مع المحور ox. كم يجب ان تكون سرعة مراقب باتجاه ’xx في المعلم ’R لكي تظهر له زاوية ميل المسطرة °45. وما هو طول المسطرة الذي يقيسه هذا المراقب؟

التمرين الخامس:

تتحرك سفينة فضائية هاربة مبتعدة عن الأرض بسرعة 0.8C وتلحقها سفينة فضائية بسرعة 0.9C بالنسبة للأرض. احسب سرعة تجاوز السفينة اللاحقة للسفينة الهاربة كما يقيسها طاقم السفينة اللاحقة؟

حلول تمارين الفصل الثاني

حل التمرين الأول:

الزمن الذي تستغرقه الجسيمات لتقطع مسافة 20متر هو

$$t = \frac{x}{v} = \frac{20}{3 \times 10^8} = \frac{20}{3} \times 10^{-8} s$$

في اطار نسبية غاليلي عدد جسيمات البيون الذ ي يبقى قبل وصولها لمسافة 20 متر هو

$$N(t) = Ne^{-t/t_0} \Rightarrow \frac{N(t)}{N(0)} = e^{-t/t_0} \Rightarrow \frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\frac{\frac{20}{3}\times 10^{-8}}{2.6\times 10^{-8}}} = e^{-\frac{20}{3\times 2,6}}$$

استنتاج من الحساب السابق المعامل γ

لدينا من معطيات التمرين انه بعد المسافة 20 متر يبقى فقط ثلث عددها الاول ومنه

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{-t/t_0} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-t}{t_0} = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{t}{t_0} = \ln 3 \Rightarrow t_0 = \frac{t}{\ln 3} \Rightarrow t_0$$
$$= \frac{\frac{20}{3} \times 10^{-8}}{\ln 3} \Rightarrow t_0 = \frac{6,66}{1,098} \times 10^{-8} \Rightarrow t_0(V) = 6,065 \times 10^{-8}$$

هذا الزمن مقاس في المعلم الارضي ومنه فهو زمن غير ذاتي وحسب العلاقة بين الزمن الذاتي وغير الذاتي نجد

$$t_0(V) = \gamma t_0(0) \Rightarrow \gamma = \frac{t_0(V)}{t_0(0)} = \frac{6,065 \times 10^{-8}}{2,6 \times 10^{-8}} = 2,33$$

سرعة جسيمات البيون

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{V^2}{c^2} \Rightarrow V = \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)}$$

$$V = \sqrt{(3 \times 10^{-8})^2 \left(1 - \frac{1}{(2,33)^2}\right)}$$

$$V = \sqrt{(3 \times 10^{-8})^2 (1 - 0,18)}$$

$$V = 2,71 \times 10^{-8} ms^{-1}$$

حل التمرين الثاني:

1- إيجاد النقص في الطول

لدينا:

$$\Delta L = L - L' = L - L\gamma = L(1-\gamma) = L\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

ت ع:

$$\Delta L == 10.\left(1 - \sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}\right)$$

$$\Delta L = 2m$$

2- إيجاد فرق الزمن:

من المعطيات لدينا:

$$\Delta t = 1s \iff t' = t + 1$$

حسب قانون تمدد الزمن:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

بمطابقة المعادلتين نجد:

$$t + 1 = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ت ع:

$$t=\frac{\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}}=4s\Rightarrow t'=5s$$

حل التمرين الثالث:

حسب الميكانيك الكلاسيكي الكتل m_0 تبقى ثابتة في المعالم العطالية على عكس الميكانيك النسبي فان الكتل m تتغير حسب تغير سرعتها ولذلك فان : $m=\gamma m_0$

1- اثبات ان حجم المكعب يكتب من الشكل $V=V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$V=L_x.L_y.L_z=L_0.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.L_0.L_0=L_0{}^3.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=V_0.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

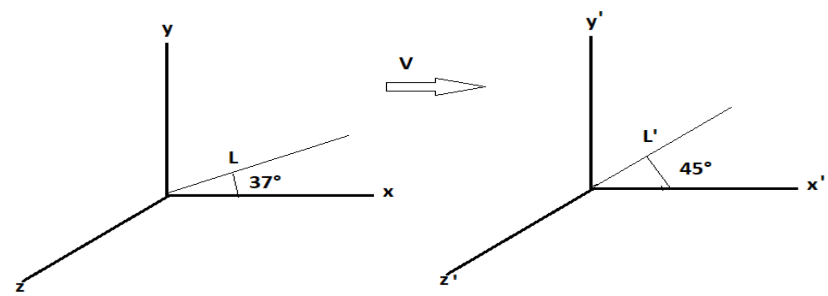
2- اثبات ان حجم المكعب يكتب من الشكل $\rho=\rho_0\,/\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$

بالتعريف:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{V_0.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{V_0}/\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\rho_0\,/\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

حل التمرين الرابع:

1- إيجاد سرعة المراقب



لدينا:

$$\tan 37° = \frac{L_y}{L_x}$$

$$\tan 45° = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{L_y}{\frac{L_x}{\gamma}} = \gamma \tan 37° = \frac{tan37°}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow v = c.\sqrt{1-\frac{(tan37°)^2}{(tan45°)^2}} = 0.66c$$

2- إيجاد طول المسطرة بالنسبة للمراقب المتحرك

$$\tan 45° = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{L_y}{L'_x} \Rightarrow L'_x = L_y.tan45° = (0.602).tan45° = 0.851m$$

حل التمرين الخامس:

نفترض ان R هي الأرض ،

’R هي السفينة الهاربة،

v سرعة السفينة الهاربة بالنسبة للأرض،

v_x سرعة السفينة اللاحقة بالنسبة،

v'_x سرعة السفينة اللاحقة بالنسبة للسفينة الهاربة.

وعليه:

$$v'_x = \frac{v_x\_V}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$$

$$v'_x = \frac{0.9c\_0.8c}{1-\frac{0.8c}{c^2}0.9c} = 0.357c$$