Pour un niveau de signification $0 < \alpha < 1$ donné, Neyman-Pearson ont défini la région de rejet du test par

$$W_k := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})}{L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})} \geq k \right\},$$

où $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$ avec $k = k_\alpha$ est une constante telle que $\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}(W_k) = \alpha$. On note par $\delta_k = I_{W_k}$ le test qui correspond à W_k et δ celui qui correspond à une région de rejet W quelconque, telle que $\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}(W) \leq \alpha$. Nous allons montrer que δ_k est plus puissant que δ, c'est-à-dire

$$1 - \beta(\theta_1, \delta_k) \geq 1 - \beta(\theta_1, \delta).$$

Nous avons

$$1 - \beta(\theta_1, \delta_k) = \mathbf{P}_{\theta=\theta_1}(W_k) = \int_{W_k} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

et

$$1 - \beta(\theta_1, \delta) = \mathbf{P}_{\theta=\theta_1}(W) = \int_{W} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Nous devons montrer que

$$\int_{W_k} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq 0.$$

On note

$$W_k^* := W_k / W^* = W_k \cap \overline{W}$$

et

$$W^* := W / W_k = W \cap \overline{W}_k,$$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire d'un ensemble A. Il est clair que

$$W_k = W_k^* \cup (W_k \cap W) \text{ et } W = W^* \cup (W_k \cap W),$$

et que W_k^*, W^* et $W_k \cap W$ sont disjoints deux à deux. Il est évident que

$$\int_{W_k} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{W_k^*} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{W_k \cap W} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

et

$$\int_{W} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{W^*} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{W_k \cap W} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_{W_k} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ = & \int_{W_k^*} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W^*} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dans W_k, on a

$$L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x}) \geq k L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x}),$$

et en dehors de W_k nous avons

$$L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x}) < k L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x}).$$

Comme $W_k^* \subset W_k$ et $W^* \subset \overline{W}_k$, alors

$$\int_{W_k^*} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W^*} L_{\theta=\theta_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq \frac{1}{k}\left(\int_{W_k^*} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W^*} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right).$$

Remarquons que le coté de droite de cette inégalité égale à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}\left(\int_{W_k^*} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W^*} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right) \\ &+\frac{1}{k}\left(\int_{W_k \cap W} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W_k \cap W} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right), \end{aligned}$$

qui peut être réécrit sous la forme

$$\frac{1}{k}\left(\int_{W_k} L_{\theta=\theta_0}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{W} L_{\theta=\theta_o}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right) = \frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}(W_k) - \mathbf{P}_{\theta=\theta_0}(W)\right).$$

Rappelons que $\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}(W_k) = \alpha$ et $\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}(W_k) \leq \alpha$, donc la dernière quantité est ≥ 0, ce qu'il fallait démontrer.