Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2024/2025

Solution de l'exercices 5 de la Série N°**2**

Exercice 5.

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'une population X normale centrée de variance σ^2. A partir d'un échantillon de taille 10, construire le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification $\alpha = 0.05$, des hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 \leq 1 \\ H_1 : & \sigma^2 > 1 \end{cases}.$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.

****

Solution. Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance croissant (monotone)*. Soit $\sigma_1 > \sigma_2$ et écrivons

$$\frac{L_{\sigma_1}}{L_{\sigma_2}} = \frac{\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_1^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_1}\right)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_2}\right)^2\right\}} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{10} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right\}.$$

On pose $t := \sum_{i=1}^{10} x_i^2$, $b := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)$ et $d := \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{10}$, ainsi on a une fonction $t \to \frac{L_{\sigma_1}}{L_{\sigma_2}}(t) = d \exp bt$, croissante en t, car $\sigma_1 > \sigma_2$ implique $b > 0$. Alors la loi de X possède un rapport de vraisemblance croissant en $t = \sum_{i=1}^{10} x_i^2$. Donc en appliquant la proposition 3, on obtient le test upp:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq c \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 < c \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}_{\sigma=1}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq c\right) = \alpha = 0.05$, c'est a dire $\mathbf{P}_{\sigma=1}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \leq c\right) = 1 - 0.05 = 0.95$. Par hypothèse l'échantillon est gaussien centré. D'un autre coté la probabilité $\mathbf{P}_{\sigma=1}$ est calculée en $\sigma = 1$, donc l'échantillon est gaussien centré-réduit. Par conséquent $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \rightsquigarrow \chi_{10}^2$ une qui-deux à 10 degré de liberté. De la table statistique des quantiles de la loi de qui-deux on trouve $c = 18.30$. La forme explicite du test upp est

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq 18.30 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 < 18.30 \end{cases}$$

La fonction puissance du test est

$$\pi(\sigma) = \mathbf{P}_\sigma\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 18.30 \mid \sigma > 0\right).$$

En d'autres termes

$$\pi(\sigma) = 1 - \mathbf{P}_\sigma \left(\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \leq \frac{18.30}{\sigma^2} \right).$$

Comme les X_i sont centrées alors les $Z_i := X_i/\sigma$ sont centrées-réduites, ainsi $\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_{10}$. Donc

$$\pi(\sigma) = 1 - \mathbf{F}_{10} \left(\frac{18.30}{\sigma^2} \right), \text{ pour } \sigma > 0,$$

où $\mathbf{F}_{10}$ est la fonction de répartition de χ^2_{10}. Le graphe de la fonction puissance est donné par la figure Fig.4.

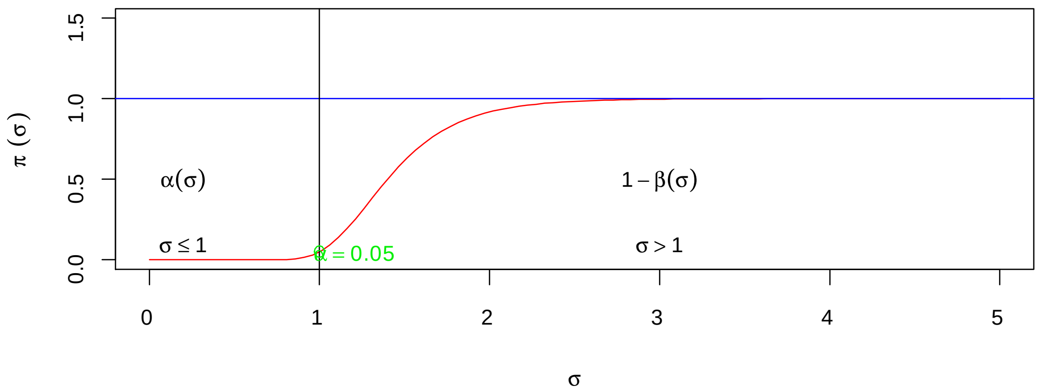

Fig.4