Mohamed Khider University of Biskra — *Academic Year: 2024/2025*
Department of Material Sciences — *The date : 24/11/2024*
Module: Mathematics I

Guided Work Series Number 4 سلسلة الأعمال الموجهة رقم
Vector Spaces الفضاءات الشعاعية

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

1) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

We provide the set $\mathbb{R}$ with the internal composition law $\bigstar$ defined as follows:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \bigstar y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

أثبت أن $\bigstar$ تبديلي وليس تجميعي وأن 1 هو العنصر الحيادي.

Prove that $\bigstar$ is commutative, not additive, and that 1 is the neutral element.

2) نزود المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

We provide the set $\mathbb{R}_+^*$ with the internal composition law $\bigstar$ defined as follows:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : x \bigstar y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A) أثبت أن $\bigstar$ تبديلي و تجميعي وأن 0 هو العنصر الحيادي.

Prove that $\bigstar$ is commutative and additive and that 0 is the neutral element.

B) أثبت أنه لايوجد في $\mathbb{R}_+^*$ أي عنصر نظير بالنسبة للعملية $\bigstar$.

Prove that there is no element in $\mathbb{R}_+^*$ that is an opposite with respect to the operation $\bigstar$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

ليكن $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ و $\bigstar$ القانون المعرف في G كما يلي:

Let $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ and $\bigstar$ be the law defined in G as follows:

$$(x, y) \bigstar (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1) أثبت أن $(G, \bigstar)$ زمرة ليست تبديلية.

Prove that $(G, \bigstar)$ is a non-commutative group.

2) أثبت أن $(]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \bigstar)$ زمرة جزئية من $(G, \bigstar)$.

Prove that $(]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \bigstar)$ is a sub-group of $(G, \bigstar)$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

نزود المجموعة $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقانونين المعرفين كما يلي:

We provide the set $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ with the two laws defined as follows:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{and} \quad (x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$$

1) أثبت أن $(A,+)$ زمرة تبديلية. — *Prove that $(A,+)$ is a commutative group.*

2) أثبت أن — *Prove that*

A) القانون $*$ تبديلي. — *The law $*$ is commutative.*

B) القانون $*$ تجميعي. — *The law $*$ is associative.*

C) اوجد العنصر الحيادي بالنسبة للقانون — *Find the neutral element with respect to the law $*$*

D) أثبت أن $(A,+,*)$ تشكل حلقة تبديلية. — *Prove that $(A,+,*)$ forms a commutative ring.*

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

أوجد معادلات الفضاءات الشعاعية التي تم إنشاؤها بواسطة الأشعة التالية:

Find the equations of the victor spaces created by the following rays:

- $u_1=(1,2,3)$
- $u_1=(1,2,3)$ *and* $u_2=(-1,0,1)$
- $u_1=(1,2,0)$ ، $u_2=(2,1,0)$ *and* $u_3=(1,0,1)$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

أوجد الأشعة المولدة للفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$:

Find the generated rays of the following subspaces of $\mathbb{R}^3$:

- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$
- $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \ \text{ and } \ 2x-y-z=0\}$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

ليكن في $\mathbb{R}^4$ الأشعة — *Let be in $\mathbb{R}^4$ the vectors*

$$v_1=(1,2,3,4) \quad \text{and} \quad v_2=(1,-2,3,-4).$$

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,y,1)\in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟

Can we find x and y where $(x,1,y,1)\in Vect\{v_1,v_2\}$?

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,1,y)\in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟

Can we find x and y where $(x,1,1,y)\in Vect\{v_1,v_2\}$?