المحور الخامس: أشكال دوال الإنتاج

I. **تعريف دالة الإنتاج**: تعرف دالة الإنتاج بـأنها العلاقة الفنية بين الإنتاج وعناصر الإنتاج، أي العلاقة الكمية التي تربط بين كمية الموارد الداخلة في العملية الإنتاجية وبين ما ينتج من سلع وخدمات خلال فترة زمنية معينة .وعليه يمكن التعبير عن دالة الإنتاج بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$\mathbf{Q = (L, K, T, G)}$$

حيث يمثل :Q الناتج الكلي أو كمية الإنتاج

(K راس المال، L العمل، T الأرض، G التنظيم) وكلها عناصر الإنتاج المستخدمة.

ودالة الإنتاج توضح وجود علاقة طردية بين الكميات المستخدمة من عناصر الإنتاج (متغيرات مستقلة) وحجم الإنتاج النهائي (متغير تابع)،

$$\mathbf{Q = (L, K)}$$

II. تحليل دالة الإنتاج في المدى القصير:

تتميز هذه الفترة بعدم قدرة المنتج من إحداث تغييرات على جميع عوامل الإنتاج وتصبح دالة الإنتاج في الفترة القصيرة على الشكل التالي:

$$\mathbf{Q = (L)}$$

ويمكن التمييز في المدى القصير بين ثلاثة أنواع للإنتاج: الناتج الكلي $(\mathbf{TP_L})$، الناتج المتوسط $(\mathbf{AP_L})$، الناتج الحدي $(\mathbf{MP_L})$ ، وتم دراستهم في المحور السابق (الثالث).

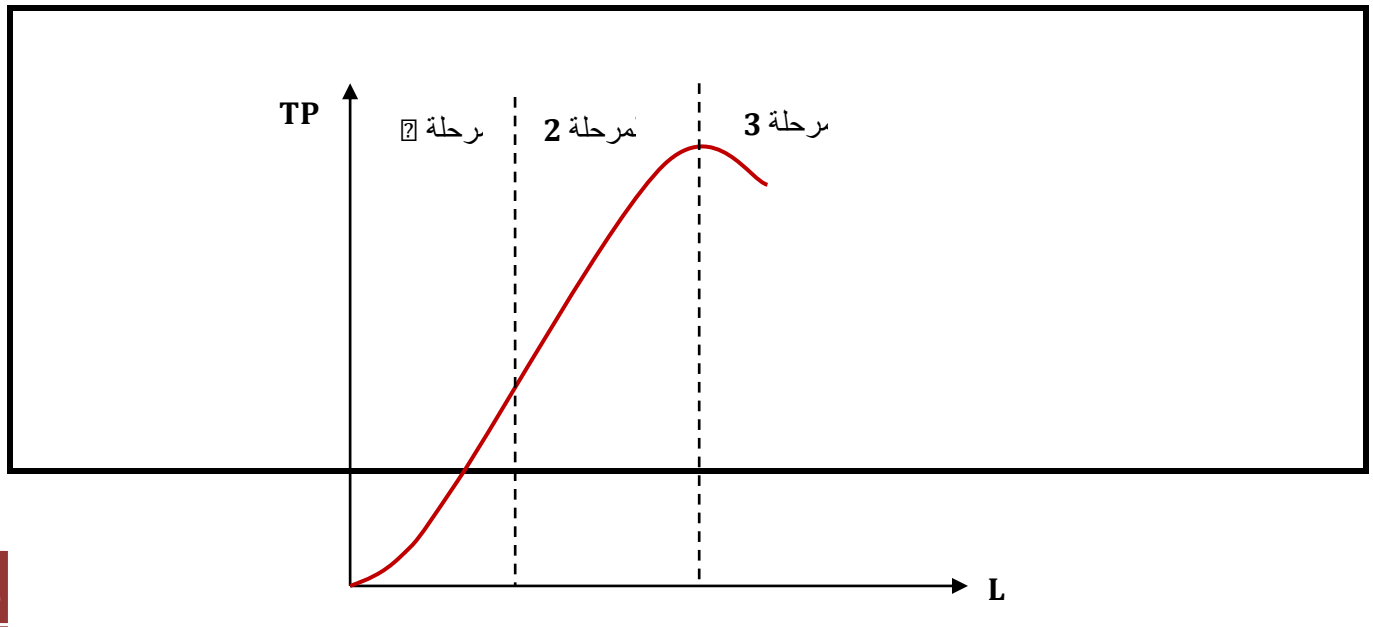
1. قانون تناقص الغلة:

يصور قانون تناقص الغلة العلاقة بين الزيادة في كمية أحد عناصر الإنتاج المتغيرة، عندما تبقى العناصر الإنتاجية الأخرى ثابتة. وينص هذا القانون على أنه "إذا ما ازدادت الكمية المستخدمة من أحد عناصر الإنتاج بكميات متساوية خلال فترة زمنية معينة، مع بقاء الكمية المستخدمة من العناصر الإنتاجية الأخرى ثابتة دون تغيير فإن الناتج الكلي سيزداد، ولكن بعد حد معين فإن الزيادة في الناتج تصبح أقل فأقل، ومعنى ذلك أن كل من الناتج الحدي والناتج المتوسط لعنصر الإنتاج المتغير في النهاية سوف يأخذان في التناقص." وبما أن هذا القانون يتعلق بمستوى نشاط المنشأة في الفترة القصيرة، ويساعد متخذي القرار فيها على اختيار المزيج الأمثل من عناصر الإنتاج المتغيرة وتحديد مستوى الإنتاج الأمثل في الفترة القصيرة،

2. مراحل الإنتاج

لغرض دراسة سلوك المنتج في الفترة القصيرة باستخدام قانون تناقص الغلة، سوف نتتبع تأثير التغير في عدد العمال على الإنتاج الكلي، عندما تكون باقي عوامل الإنتاج ثابتة. وعند تتبع التغير في الإنتاج المصاحب للتغير في عنصر العمل نجد أن الإنتاج يمر بثلاث مراحل ويمكن توضيح ذلك من خلال الرسم البياني أدناه الذي يبين الناتج الكلي والمتوسط والحدي والعلاقة بينهم:

الشكل رقم (01): الناتج الكلي، (TP_L)، الناتج المتوسط (AP_L)، الناتج الحدي (MP_L)



- **مرحلة تزايد الغلة**: تؤدي إضافة وحدات من العمل في هذه المرحلة إلى زيادة الناتج الكلي بمعدل متزايد،
- تبدأ هذه المرحلة من نقطة الصفر وتنتهي عند النقطة العظمى لمنحنى الناتج المتوسط لعنصر العمل، وهي النقطة التي يقطع فيها منحنى الناتج الحدي منحنى الناتج المتوسط. وخلال هذه المرحلة يكون تزايد الناتج الحدي بدرجة أسرع من تزايد الناتج المتوسط، ومن مصلحة المنتج هنا الاستمرار في زيادة وحدات إضافية من عنصر العمل لأنها تؤدي إلى زيادة الإنتاج، ومن ثم زيادة الإيرادات والإسهام في تخفيض التكاليف في الوقت ذاته بسبب تزايد الناتج المتوسط لعنصر العمل، وبالتالي تزايد الأرباح.
- **مرحلة تناقص الغلة**: تؤدي إضافة وحدات من العمل في هذه المرحلة إلى زيادة الناتج الكلي بمعدل متناقص،
- تمتد هذه المرحلة من النقطة العظمى لمنحنى الناتج المتوسط لعنصر العمل إلى غاية النقطة العظمى لمنحنى الناتج الكلي (النقطة التي يكون فيها الناتج الحدي لعنصر العمل مساويا للصفر.) وخلال هذه المرحلة يتزايد الناتج الكلي (بمعدل متناقص) ليصل إلى أقصاه، كما يتناقص كل من الناتج المتوسط والناتج الحدي، إلا أن الناتج الحدي يتناقص بدرجة أسرع من تناقص الناتج المتوسط.
- **مرحلة التناقص المطلق للغلة**: وهي مرحلة غير اقتصادية لأن الغلة فيها تكون سالبة، واستخدام المزيد من وحدات من العمل في هذه المرحلة لا يسهم في أي زيادة في الناتج الكلي، بل يؤدي في الواقع إلى تناقص الناتج الكلي عن نهايته العظمى.

  تمثل المرحلة التي يكون فيها منحنى الناتج الكلي متناقصا (والناتج الحدي لعنصر العمل سالبا).

3. العلاقة بين الناتج المتوسط (AP_L)، الناتج الحدي (MP_L): .

$MP_L > AP_L$ المرحلة الأولى: تزايد الغلة

$MP_L < AP_L$ المرحلة الثانية تناقص الغلة

$MP_L = AP_L$ النقطة العظمى للناتج المتوسط

العلاقة بين الناتج الكلي (TP_L)، الناتج الحدي (MP_L):

الناتج الحدي **متزايد**.....**تزايد** الناتج الكلي بمعدل **متزايد**

الناتج الحدي **متناقص**..... **تزايد** الناتج الكلي بمعدل **متناقص**

الناتج الحدي **معدوم**.....وصول الناتج الكلي **للنقطة العظمى** $TP_L MAX$

الناتج الحدي **سالب** ..... **تناقص** الناتج الكلي

III. تحليل دالة الإنتاج في المدى الطويل:

تشير الفترة الطويلة إلى قابلية جميع عناصر الإنتاج إلى التغيير، وهذا يعني أن دالة الإنتاج في هذه الفترة تنظر في العلاقة بين الإنتاج الكلي والتغير في كميات عناصر الإنتاج مجتمعة. وعليه يمكن التعبير عن دالة الإنتاج بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$Q = (L, K)$$

1. قانون غلة الحجم:

يدرس قانون غلة الحجم نسبة زيادة الإنتاج الكلي نتيجة للزيادة المماثلة في جميع عناصر الإنتاج، أي درجة استجابة الإنتاج للزيادة المتناسبة مع جميع عناصر الإنتاج، وقد تكون نسبة الزيادة في الإنتاج مماثلة لنسبة الزيادة في عناصر الإنتاج، كما قد تكون أكبر أو أقل. فالأمر هنا يختلف باختلاف نوع النشاط الإنتاجي، ولنفس النشاط تبعا للتقنية المستخدمة في الإنتاج. ويميز قانون غلة الحجم بين ثلاثة حالات:

- **غلة حجم ثابتة** :وتكون فيها نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي مماثلة تماما لنسبة الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية.
- **غلة حجم متزايدة** :تكون فيها نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أكبر من نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية. وتتحقق هذه الحالة بسبب المزايا الناتجة عن التخصص وتقسيم العمل،
- **غلة حجم متناقصة** :تكون فيها نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أقل من نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية.

وتحديد غلة الحجم **رياضيا** يعتمد على ما يعرف **بالدوال المتجانسة،** حيث تسمح درجة تجانس دوال الإنتاج بمعرفة نوعية غلة الحجم. ويمكن القول أن دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة (n) اذا تحققت العلاقة الآتية :

$$\boldsymbol{f(tK, tL) = t^n \, f(L, K)}$$

t عدد موجب، وهو مقدار مضاعفة عنصري الإنتاج العمل(L) ورأس المال(K).

t^n مقدار مضاعفة الإنتاج الكلي.

n درجة تجانس الدالة، وتعبر عن مرونة الإنتاج بالنسبة لعناصر الإنتاج

وهذا يعني أن مضاعفة عنصري الإنتاج العملL ورأس المال K بمقدار العدد t سوف يؤدي إلى مضاعفة الإنتاج الكلي بالمقدار t^n

- **n=1**:نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي مساوية تماما لنسبة الزيادة في عناصر الإنتاج، وبالتالي غلة الحجم ثابتة.
- **n>1**:نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أكبر من نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج، وبالتالي غلة الحجم متزايدة.
- **n<1**:نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أقل من نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج، وبالتالي غلة الحجم متناقصة.

2. دالة الإنتاج كوب- دوغلاس *Cob–Douglass*

تعتبر هذه الدالة من أكثر الدوال استخداما في التحليل الاقتصادي الجزئي والكلي، حيث تستخدم لقياس مدى مساهمة العمالة ورأس المال في الإنتاج فضلا عن أن هذه الدالة تعتبر الأداة التي مكنت الاقتصاديين من بناء نماذج واكتشاف دوال أخرى أدت إلى إحداث تطور واضح في أساليب التحليل الاقتصادي في عصرنا هذا وتأخذ هذه الدالة الشكل الآتي:

$$\boldsymbol{Q = b\, L^{\alpha} + K^{\beta}}$$

$\boldsymbol{Q}$ الناتج الكلي

$\boldsymbol{\alpha}$ مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل، β مرونة الإنتاج بالنسبة لراس المال،

$1 > \alpha, \beta > 0$

$\boldsymbol{b}$ معلمة كفاءة استخدام عوامل الانتاج في الإنتاج وهو معيار بعدي مثل التكنولوجيا فكلما كانت كبيرة كلما ارتفع حجم الإنتاج.

$0 < b$

L, K الكميات المستخدمة من عنصري الانتاج العمل وراس المال

1-2 خصائص دالة الإنتاج كوب- دوغلاس *Cob–Douglass*: تتمثل في مايلي:

أ. **غلة الحجم ودرجة التجانس**: تبين غلة الحجم كما ذكرنا سابقا نسبة الزيادة في حجم الإنتاج الناتجة عن الزيادة في عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الانتاجية بنسبة معينة **t**

$$\mathbf{f(tK, tL) = t^{\alpha+\beta}Q}$$

إن الدالة متجانسة من الدرجة $(\alpha+\beta)$، وهذا ما يعني انه إذا زاد حجم النشاط لنسبة t فان حجم الإنتاج الكلي سيرتفع بنسبة $(\alpha+\beta)$.

ب. مـــــرونة عوامل الإنتاج

- **مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل** :وتحسب وفقا للعلاقة الآتية:

$$\mathbf{E_L} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L}{Q} = \alpha$$

- **مرونة الإنتاج بالنسبة لراس المال** :وتحسب وفقا للعلاقة الآتية:

$$\mathbf{E_L} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K}{Q} = \beta$$

ج. **المعدل الحدي للاحلال التقني**:MRTS

The Marginal Rate of Technical Substitution

المعدل الحدي للإحلال التقني لعنصر العمل مقابل راس المال هو:

$$\text{MRTS} = \frac{\mathbf{MP_L}}{\mathbf{MP_k}} = \frac{\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{L}}}{\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{K}}}$$

$$\mathbf{MRTS} = \frac{\boldsymbol{\alpha K}}{\boldsymbol{\beta L}}$$

حيث:

$$\beta = (1 - \alpha)$$

د. مرونة الإحلال: (The Elasticity of Substitution)

تحدد كيفية الإحلال بين العمل ورأس المال وتحسب وفقا للعلاقة الآتية:

$$\frac{\text{التغير النسبي في عنصري الانتاج}}{\text{التغير النسبي في الانتاجية الحدية لعناصر الانتاج}}$$

$$\boldsymbol{\partial} = \frac{\Delta\%\left(\frac{K}{L}\right)}{\Delta\%MRTS} = \frac{\frac{\delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}}{\frac{\delta MRTS}{MRTS}} = \frac{\delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\delta MRTS} \times \frac{MRTS}{\left(\frac{K}{L}\right)}$$

ويمكن كتابة :

$$\partial = \frac{\delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\delta MRTS} \times \frac{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} = \frac{\delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\delta MRTS} \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\boldsymbol{\partial = 1}$$

3. دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة: Constant Elasticity Of Substitution (CES)

تعرف دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة بأنها دالة متجانسة غير خطية وتأخذ المعادلة الشكل التالي:

$$\mathbf{Q = A[\alpha L^{P} + (1-\alpha)k^{P}]^{\frac{1}{P}}}$$

ويمكن كتابة الدالة بالشكل التالي:

$$\mathbf{Q} = \left[\alpha L^{-P} + \beta\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{L}}k^{-P}\right]^{\frac{-1}{P}}$$

$$A > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad P > -1$$

A معامل كفاءة الانتاجية ويعكس كفاءة استخدام عناصر الانتاج وتتوقع النظرية ان يكون هذا المعامل موجبا.

α معامل التوزيع النسبي للعمل.

P معامل مرونة الاحلال وهي تقيس قدرة المنتج على احلال عناصر الانتاج محل بعضها البعض .

جيث $\beta = 1 - \alpha$

1-3 خصائص الدالة:

أ. الإنتاج الحدي للعمل وراس المال:

الإنتاج الحدي للعمل:

$$\mathbf{MP_L} = \frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{L}} = \frac{1}{P} A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}\left(\frac{\delta(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)}{\delta \mathbf{L}}\right)$$

$$\mathbf{MP_L} = \frac{1}{P} A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}\,(\alpha P L^{P-1})$$

$$\mathbf{MP_L} = A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}\alpha L^{P-1}$$

الإنتاج الحدي لراس المال:

$$\mathbf{MP_K} = \frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{K}} = \frac{1}{P} A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}\left(\frac{\delta(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)}{\delta \mathbf{K}}\right)$$

$$\mathbf{MP_K} = \frac{1}{P} A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}\,P(1-\alpha)K^{P-1}$$

$$\mathbf{MP_K} = A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}(1-\alpha)K^{P-1}$$

ب. المعدل الحدي للإحلال التقني MRTS: يمثل المعدل النسبة بين الإنتاجية الحدية للعمل والإنتاجية الحدية لراس المال ويكتب كما يلي:

$$\text{MRTS} = \frac{\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{L}}}{\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{K}}} = \frac{A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}\alpha L^{P-1}}{A\,(\alpha L^P + (1-\alpha)k^P)^{\frac{1}{P}-1}(1-\alpha)K^{P-1}}$$

$$\text{MRTS} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{L}{K}\right)^{P-1} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{1-P}$$

ج. مرونة الإحلال: ∂

$$\partial = \frac{\frac{\delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}}{\frac{\delta MRTS}{MRTS}} = \frac{\delta \ln \frac{K}{L}}{\delta \ln MRTS} = \frac{\delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\delta MRTS} \times \frac{MRTS}{\left(\frac{K}{L}\right)}$$

$$\boldsymbol{\partial = \frac{1}{(1-P)}}$$

مثال: لتكن لديك الدالة على الشكل الاتي:

$$Q = \left(0.5L^{\frac{1}{2}} + 0.5k^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

المطلوب:

1. احسب الإنتاجية الحدية للعمل والإنتاجية الحدية لراس المال؟
2. احسب المعدل الحدي للإحلال التقني
3. احسب مرونة الإحلال؟

1. توازن المنتج:

إن هدف المنتج هو الوصول إلى أعلى منحنى ناتج ممكن، بحيث يحصل على توليفة من عنصري الإنتاج العمل(L) (ورأس المال(K) التي تحقق له أقصى إنتاج ممكن باستخدام ميزانيته المحدودة وفي ظل أسعار عناصر الإنتاج السائدة في السوق.

من الشكل رقم 02 أدناه يتبين أن نقطة توازن المنتج هي نقطة تماس خط التكلفة مع أعلى منحنى ناتج ممكن وعليه تكون التوليفة من عنصري الإنتاج هي التوليفة المثلى التي تحقق توازن المنتج، حيث تحقق له أكبر إنتاج ممكن في حدود ميزانيته وفي ضوء أسعار عناصر الإنتاج السائدة في السوق.

ملاحظة: منحنى الناتج المتساوي هو ذلك المنحنى الذي يمر بجميع التوليفات الممكنة من عنصرين إنتاجيين متغيرين

يعرف خط التكلفة المتساوية بأنه المحل الهندسي لمختلف توليفات عناصر الإنتاج التي يمكن أن يحصل عليها المنتج بتكلفة نقدية معينة، وعند أسعار محددة لعناصر الإنتاج. ومعادلة التكلفة بالنسبة للمنتج نعطى بالعلاقة التالية:

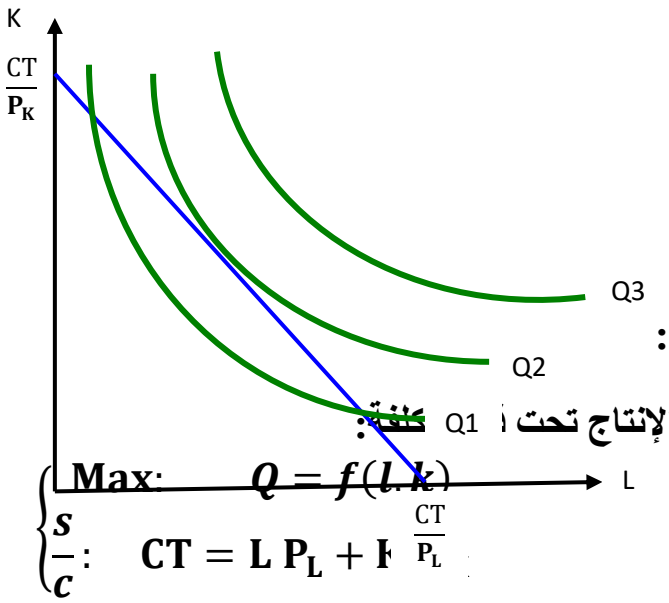
$$\mathbf{CT = L \cdot P_L + K \cdot P_K}$$

ومن معادلة التكلفة يمكن استخراج معادلة خط التكلفة المتساوية التي تكتب على الشكل الآتي:

$$\mathbf{K = \frac{CT}{P_K} - \left(\frac{P_L}{P_K}\right) L}$$

تمثل معادلة خط التكلفة المتساوية خط مستقيم سالب الميل، وميله $\left(\frac{\mathbf{P_L}}{\mathbf{P_K}}\right) -$

الشكل رقم (02): توازن المنتج بيانيا



توازن المنتج رياضيا :

الحالة الأولى: تعظيم الإنتاج تحت [illegible] **كلفة:**

$$\begin{cases} \mathbf{Max:} & \boldsymbol{Q = f(l.k)} \\ \boldsymbol{s/c:} & \mathbf{CT = L\,P_L + K\,P_K} \end{cases}$$

ولحل هذه المشكلة (إيجاد التوليفة المثلى التي تعظم الإنتاج) يتم أولا تشكيل دالة لاغرانج على الشكل الآتي:

$$\boldsymbol{L = f(l,k) + \lambda\,(CT - L \cdot P_L - K \cdot P_K)}$$

وليتم تحديد التوليفة المثلى يجب تحقق الشرطين الآتيين:

- ✓ **الشرط اللازم :** أن تكون المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج (بالنسبة لكل من K، Lو λ) مساوية للصفر. ومن جملة المعادلات المستخرجة والمشتقة نحصل على عدد وحدات العمل و رأس المال التي تعظم الإنتاج .
- ✓ **الشرط الكافي:** للتحقق من صحة النتائج نقوم بحساب المشتقات الجزئية الثانية لمضاعف لاغرانج، ونحسب محدد المصفوفة الهيسي H الذي يجب أن يكون موجبا .أن يكون المحدد الهيسي أكبر من الصفر.

الحالة الثانية: تدنية التكلفة تحت قيد الإنتاج

$$\begin{cases} \text{Min:} & \mathbf{CT = L\,.\,P_L + K\,.\,P_K} \\ \frac{s}{c}: & \boldsymbol{Q = f(l,k)} \end{cases}$$

ولحل هذه المشكلة يتم أولا تشكيل دالة لاغرانج على الشكل الآتي:

$$\boldsymbol{L = L\,.\,P_L + K\,.\,P_K + \lambda\,(Q - f(l,k))}$$

وليتم تحديد التوليفة المثلى يجب تحقق الشرطين الآتيين:

الشرط اللازم :أن تكون المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج (بالنسبة لكل من K، Lو λ(مساوية للصفر).

الشرط الكافي :أن يكون المحدد الهيسي أقل من الصفر.