Chapitre III : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

III.1. Normes et produits scalaires :

Définition 1 : E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$; vérifiant :

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$).
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (EVN).

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$: $\|x\| = |x|$

  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un EVN.

- Dans $\mathcal{C}([a,b])$: $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

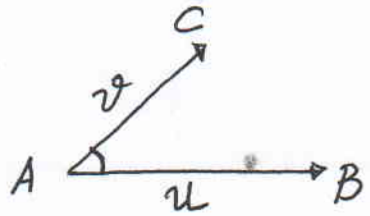
- Dans $\mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ (Norme vectorielle)

- Dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$:

  $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ (Norme matricielle).

Définition 2 : Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est le nombre réel définit par :

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(u, v).$$



Propriétés :

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $u \cdot (kv) = k\, u \cdot v \; ; \; k \in \mathbb{R}$

Définition 3 : On dit que deux vecteurs u et v sont orthogonaux si : $u \cdot v = 0$.

Remarque : Si le repère est orthonormé, le produit scalaire de $u(x, y)$ et $v(x', y')$ est donné par :

$u \cdot v = x x' + y y'$; c'est-à-dire : $u \cdot u = \|u\|^2$.

III.2. Généralités sur les méthodes indirectes :

Lorsque n est grand, la résolution d'un système d'ordre n par les méthodes directes devient assez compliquée. Alors on utilise les méthodes itératives sous réserve de convergence.

Cela consiste à définir une suite de vecteurs $(x^{(k)})$ converge vers la solution x.

Considérons A une matrice régulière de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Supposons qu'on peut écrire A sous la forme : $A = M - N$; où M est une matrice facile à inverser (Diagonale, triangulaire).

L'idée d'une méthode itérative est d'écrire le système $Ax = b$ sous forme d'un point fixe. Alors :

$$Ax = b \iff (M - N)x = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

Une méthode itérative est :
$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \quad k \geq 0 \\ \phantom{x^{(k+1)}} = \mathcal{B}x^{(k)} + C \end{cases}$$

Il reste maintenant à choisir M et N. Généralement, on décompose A de la manière suivante :
$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F.$$

avec : • D : diagonale ; ($D_{ii} = a_{ii}$).

• E : triangulaire inférieure stricte ($E_{ij} = 0$ pour $i \leq j$ et $E_{ij} = -a_{ij}$ si $i > j$)

• F : triangulaire supérieure stricte ($F_{ij} = 0$ si $i \geq j$ et $F_{ij} = -a_{ij}$ si $i < j$)

C'est-à-dire :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad -E = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

III.3. Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Méthode de Jacobi

$M = D$ et $N = E + F$

L'écriture matricielle

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{J} x^{(k)} + D^{-1} b$$

J : matrice de Jacobi

L'écriture linéaire

à partir d'un vecteur initial donné : $x^{(0)}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) ; \; i \geq 1$$

Méthode de Gauss-Seidel

$M = D - E$ et $N = F$

- **L'écriture matricielle**

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D-E)^{-1} F}_{G} x^{(k)} + (D-E)^{-1} b$$

G : matrice de Gauss-Seidel

- **L'écriture linéaire**

à partir d'un vecteur initial $x^{(0)}$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\Big(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)}\Big)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)$$

Remarque 1 : Dans l'algorithme, on utilise le critère d'arrêt suivant : $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$;

où ε est une précision imposée à l'avance.

Remarque 2 : Comme l'inverse de $(D-E)$ peut être compliquée à calculer, on préfère écrire le système comme suit :

$$(D-E)\, x^{(k+1)} = F x^{(k)} + b \iff D x^{(k+1)} = F x^{(k)} + E x^{(k+1)} + b$$

$$\iff x^{(k+1)} = D^{-1}\left[F x^{(k)} + E x^{(k+1)} + b\right].$$

III.4. Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel :

On propose les suites : $x^{(k+1)} = J x^{(k)} + D^{-1} b$ et $x^{(k+1)} = G x^{(k)} + (D-E)^{-1}$

pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.

1. Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel Convergent si et seulement si : les rayon spectrals $\rho(J) < 1$ et $\rho(G) < 1$

($\rho(J) = \max |\lambda_i|$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: les valeurs propres de J)

---

2. Si A est à diagonale strictement dominante $\left(|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}|\right)$ alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel cv.

3. Si A est symétrique et définie positive (toutes les valeurs propres de A sont strictement positives), donc la méthode de Gauss-Seidel Converge.

III.5. Méthode de relaxation :

Dans cette méthode, on a :

$$A = D - E - F = D - E - F + \frac{1}{w}D - \frac{1}{w}D$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{w}D - E\right)}_{M} - \underbrace{\left(\frac{1}{w}D - D + F\right)}_{N} \text{ ; donc :}$$

- **L'écriture matricielle :**

$$x^{(k+1)} = \left(\frac{1}{w}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1}{w}D - D + F\right)x^{(k)} + \left(\frac{1}{w}D - E\right)^{-1} b$$

L : matrice de relaxation

w : facteur de relaxation.

$$\left(\frac{1}{w}D - E\right)x^{(k+1)} = \left(\frac{1}{w}D - D + F\right)x^{(k)} + b$$

$$Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} - wDx^{(k)} + wFx^{(k)} + wb + wEx^{(k+1)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (1-w)x^{(k)} + wD^{-1}\left(b + E.x^{(k+1)} + Fx^{(k)}\right)$$

- **L'écriture linéaire :**

$$x_i^{(k+1)} = (1-w)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Remarques : ① La méthode de relaxation converge si $w \in]0,2[$ et A est définie positive.

② • $w > 1 \rightarrow$ sur-relaxation • $W = 1 \rightarrow$ Gauss-Seidel

• $w < 1 \rightarrow$ sous-relaxation.