Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2020/2021

Interrogation: Tests Statistiques

Examen noté sur 10

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'une population normale X de moyenne μ et d'écart-type 2. A partir d'un échantillon de taille 12, on veut tester, au niveau de signification $\alpha = 0.02$, les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \leq 1 \\ H_1 : & \mu > 1 \end{cases}$$

1. Quelle est la statistique du test associée au test uniformément le plus puissant? $(1.5pts)$
2. Quelle est la région critique associée à ce test? $(2pts)$
3. Donner la forme du test uniformément le plus puissant, noté δ. $(1/2pt)$
4. Déduire des questions précédentes, la valeur de $\mathbf{E}_{\mu=1}[\delta]$ et quelle est, dans ce cas, la loi de probabilité de δ? $(1pts)$
5. Déterminer l'expression de $\mathbf{E}_{\mu}[\delta]$, pour $\mu \in \mathbb{R}$. Que représente cette quantité? $(2pts)$
6. Déterminer le risque de première espèce. $(1/2pt)$
7. Quelle est la relation entre le risque de première espèce et le seuil de signification α, en justifiant la réponse? $(1pt)$
8. Tracer "soigneusement" le graphe de la fonction puissance. $(1.5pts)$

* *

Solution

1) Nous allons appliquer le principe du rapport de vraisemblance monotone. Soient $\mu_2 > \mu_1$ on a

$$\frac{L_{\mu_2}}{L_{\mu_1}} = \frac{L_{\mu_2}(x_1, ..., x_{12})}{L_{\mu_1}(x_1, ..., x_{12})} = \frac{\prod_{i=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_2}{2}\right)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_1}{2}\right)^2\right\}}.$$

Après la simplification on trouve

$$\frac{L_{\mu_2}}{L_{\mu_1}} = \exp\left\{\frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1)\, t + \frac{3}{2}\left(\mu_1^2 - \mu_2^2\right)\right\},$$

où $t = t(x_1, ..., x_{12}) = \sum_{i=1}^{12} x_i$. Il est clair que, puisque $\mu_2 - \mu_1 > 0$, la fonction

$$t \to \exp\left\{\frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1)(t - 6\mu_1 - 6\mu_2)\right\}$$

est croissante. Donc l'hypothèse du rapport de vraisemblance monotone est vérifiée. On en déduit que, la statistique associée au test uniformément le plus puissant est

$$T = t(X_1, ..., X_{12}) = \sum_{i=1}^{12} X_i.$$

2) La région critique associée à ce test est

$$W=\left\{(x_1,...,x_{12})\in\mathbb{R}^{12}\mid\sum_{i=1}^{12}x_i\geq k\right\},$$

où k est une constante telle que

$$P_{\mu=1}\left(\sum_{i=1}^{12}X_i\geq k\right)=0.02.$$

Cette probabilité peut être réécrite sous la forme

$$P_{\mu=1}\left(\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{2^2/12}}\leq c\right)=1-0.02=0.98,$$

où

$$c=\sqrt{3}\,(k/12-1)\,. \tag{1}$$

Comme $Z:=\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{2^2/12}}\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1)$, donc

$$c=\Phi^{-1}(0.98)=2.05. \tag{2}$$

Ce qui implique de l'équation (1) que $k=26.20$, et par conséquent

$$W=\left\{(x_1,...,x_{12})\in\mathbb{R}^{12}\mid\sum_{i=1}^{12}x_i\geq 26.20\right\}.$$

3) Le test uniformément le plus puissant associé à W est

$$\delta=\delta(x_1,...,x_n)=\begin{cases}1 \text{ si } \sum_{i=1}^{12}x_i\geq 26.20\\ 0 \text{ si } \sum_{i=1}^{12}x_i<26.20\end{cases}$$

4) Nous avons $\mathbf{E}_{\mu=1}[\delta]=\mathbf{P}_{\mu=1}(W)=0.02$. Il est clair que la v.a δ suit la loi de Bernoulli de paramètre 0.02. En effet la v.a. $\delta=\delta(X_1,...X_n)$ prend deux valeurs $\{0,1\}$, tel que

$$\mathbf{P}_{\mu=1}(\delta=1)=\mathbf{P}_{\mu=1}(W)=0.02$$
$$\mathbf{P}_{\mu=1}(\delta=0)=\mathbf{P}_{\mu=1}\left(\overline{W}\right)=1-0.02=0.98.$$

5) Pour $\mu\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\mathbf{E}_\mu[\delta]=\mathbf{P}_\mu(W)=\mathbf{P}_\mu\left(\sum_{i=1}^{12}X_i\geq 26.20\right),$$

ce qui égale à

$$\mathbf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{2^2/12}}\geq\frac{26.20/12-\mu}{\sqrt{2^2/12}}\right).$$

Comme $Z^*:=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{2^2/12}}\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1)$, alors cette dernière est équivalente à

$$\mathbf{P}_\mu(Z^*\geq 3.78-1.73\mu)=1-\mathbf{P}_\mu(Z^*\leq 3.78-1.73\mu)\,,$$

par conséquent

$$\mathbf{E}_\mu[\delta]=1-\Phi(3.78-1.73\mu)\,,\ \mu\in\mathbb{R},$$

elle n'est autre que la fonction puissance du test δ, notée $\pi(\mu;\delta)$.

6) Le risque de première espèce est définit par $\alpha(\mu)=\pi(\mu;\delta)$, pour $\mu\leq 1$, c'est à dire

$$\alpha(\mu)=1-\Phi(3.78-1.73\mu)\,,\ \text{pour } \mu\leq 1.$$

7) La relation entre le risque de première espèce $\alpha(\mu)$ est le seuil de signification $\alpha=0.02$, est telle que

$$\alpha=\sup_{\mu\leq 1}\alpha(\mu)\,.$$

En effet, comme la fonction $\mu \rightarrow 1-\Phi\,(3.\,78-1.\,73\mu)$ est croissante alors le supremum de $\alpha\,(\mu)$ atteint la borne la valeur $\mu=1$ dans l'intervalle $\mu\leq 1$, en $1-\Phi\,(3.\,78-1.\,73)=1-\Phi\,(2.\,05)$. D'après l'équation (2) , on sait déjà que $\Phi\,(2.\,05)=0.98$, donc $1-0.98=0.02$ ce qui correspond exactement à la valeur du seuil de signification α.

8) Graphe de la fonction puissance du