الفصل الثالث

الفضاءات الشعاعية $Vector\ Spaces$

فهرس الفصل

3.1 البنى الجبرية *Algebraic structures* 138
3.1.1 العملية الداخلية Internal composition 138
3.1.2 الزمرة Group 139
3.1.3 الحلقة The ring 142
3.1.4 الجسم أو الحقل Field 144
3.2 الفضاء الشعاعي *Vector space* 146
3.2.1 جداء الفضاءات الشعاعية Product of vector spaces 151
3.2.2 الحساب في الفضاءات الشعاعية Calculus in vector spaces 152
3.2.3 الفضاءات الشعاعية الجزئية Partial vector spaces 153
3.2.4 المزج الخطية Linear combination 155
3.2.5 الإرتباط والإستقلال الخطي Linear correlation and independence 156
3.2.6 القاعدة أو الأساس The base or basis 160
3.2.7 بعد فضاء شعاعي Dimension of a vector space 163
3.2.8 المجموع المباشر Direct sum 167
3.3 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 3* 171

يعتبر هذا الجزء من أهم الفصول التي تُبنى عليها نظريات الجبر الخطي، إذ أنه يمثل الجزء

الأساسي لما سيأتي بعده من مفاهيم، مثل التطبيقات الخطية، المصفوفات، المحددات، كما يُعد تكملة للدرس السابق المجموعات.

This chapter is considered one of the most important sections that form the foundation of linear algebra theories. It serves as a fundamental part for subsequent concepts like linear applications, matrices, determinants, and is also a continuation of the previous lesson on sets.

1.3 *Algebraic structures* البنى الجبرية

1.1.3 Internal composition العملية الداخلية

1.1.3 : Definition - تعريف

لتكن E مجموعة بحيث $E \neq \emptyset$.

Let E be a set such that $E \neq \emptyset$.

نسمي قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية كل تطبيق معرف على $E \times E$ ويأخذ قيمه في E.

We call an internal composition law or internal composition every application defined on $E \times E$ and taking its values in E.

ونرمز له عادة بالرموز: $\star$ ، Δ، $\perp$ ... فنكتب مثلا:

We usually symbolize it with the symbols: $\star$, Δ, $\perp$ ..., so we write, for example:

$$\boxed{\star : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x, y) \to x \star y \end{array}}$$

وتكون العملية $\star$ داخلية في E إذا تحقق ما يلي:

The operation $\star$ is Internal composition to E if the following is true:

$$\boxed{\forall x, y \in E : x \star y \in E}$$

أي أن نقول إن العملية الداخلية $\star$ مستقرة في E.

that is, we say that the internal composition $\star$ is stable in E

1.1.3 : Example - مثال

لكن المجموعة $E = \{0, 1, 6, 9, 8\}$ ومنه $+$ ليست عملية داخلية في E. لأن $9 + 8 = 17 \notin E$

Let the set $E = \{0, 1, 6, 9, 8\}$ from which $+$ is not an internal composition in E. Because $9 + 8 = 17 \notin E$

2.1.3 : Example - مثال

$(+)$ عملية داخلية في $\mathbb{R}$.

$(+)$ *is an internal composition in* $\mathbb{R}$.

To prove that $(+)$ is an internal composition in $\mathbb{R}$, we need to show that for all $a, b \in \mathbb{R}$, their sum $a + b$ is also in $\mathbb{R}$.
In other words, we need to demonstrate that the set of real numbers is closed under addition. Since $\mathbb{R}$ represents the set of all real numbers, it includes both rational and irrational numbers. Addition of two real numbers results in another real number, regardless of whether they are rational or irrational. This property is a fundamental characteristic of real numbers, and it follows that $(+)$ is indeed an internal composition in $\mathbb{R}$.

2.1.3 الزمرة Group

تعتبر الزمرة إحدى البنى الجبرية الأساسية والمهمة في الجبر المجرد لكونها ضرورية من أجل فهم واستيعاب البنى الجبرية المجردة الأخرى: كالحلقات والحقول والفضاءات وتستخدم نظرية الزمر في تصنيف جمل النقاط منتظمة المواقع في الفضاء وتعتبر هذه المسألة من أبرز المسائل المهمة في علم البلورات إضافة إلى دورها الفعال في استكشاف قانون الربط بين جزيء المادة وزمرة معينة. وفي الوقت الحاضر يصعب علينا تصور أي تطور لبنية نظرية الجزيئات دون مساعدة نظرية الزمر.

Groups are considered one of the fundamental and important algebraic structures in abstract algebra. They are essential for understanding and grasping other abstract algebraic structures, such as rings, fields, and vector spaces. Group theory is used in classifying sets of regularly arranged points in space, making it crucial in the field of crystallography. Additionally, it plays a significant role in exploring the relationship between the molecular structure of matter and a specific group. Nowadays, it is challenging to envision any advancement in the theoretical structure of molecules without the assistance of group theory.

2.1.3 : Definition - تعريف

نقول أن $(G,\star)$ تشكل زمرة حيث G مجموعة مزودة بعملية داخلية $\star$ إذا تحققت الشروط الأربعة التالية:

We say that $(G,\star)$ forms a group, where G is a set equipped with an internal operation $\star$, if the following four conditions are satisfied:

1) $(\star)$ قانون داخلي

$(\star)$ *Internal law*

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y \in G.$$

2) $(\star)$ قانون تجميعي

$(\star)$ *Associated law*

$$\forall x, y, z \in G, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

3) $\star$ قانون يقبل عنصر حيادي وحيد

$(\star)$ *A law that accepts a single neutral element*

$$\exists! e \in G, \quad \forall x \in G, x \star e = x \quad \text{and} \quad e \star x = x,$$

4) لكل عنصر من G نظير بالنسبة للعملية $\star$

Each element of G has an opposite with respect to the law $(\star)$

$$\forall x \in G, \quad \exists x' \in G : \quad x \star x' = x' \star x = e.$$

x' يسمى بمقلوب x ويرمز له بالرمز x^{-1}.

x' is called the opposite of x and is represented by x^{-1}.

إذا أضفنا الشرط

If we add the condition

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y = y \star x,$$

نقول أن $(G,\star)$ تشكل زمرة تبديلية

we say that $(G,\star)$ forms a commutative group

3.1.3 : Example - مثال

المجموعة $(\mathbb{R},+)$ تشكل زمرة تبديلية

The set $(\mathbb{R},+)$ forms a commutative group

To prove that the set $(\mathbb{R}, +)$ forms a commutative group, we need to show that it satisfies the four group axioms: closure, associativity, identity element, and inverse element.
Additionally, for commutativity, we need to demonstrate that the operation $(+)$ is commutative.
Let's go through each axiom:
Closure: For any two real numbers a and b, their sum $a + b$ is also a real number, so closure is satisfied.
Associativity: For all real numbers a, b, and c, the addition operation is associative, meaning $(a + b) + c = a + (b + c)$. This property holds in $\mathbb{R}$.
Identity Element: There exists an identity element, denoted as 0, such that for any real number a, $a + 0 = 0 + a = a$. In this case, the identity element is 0.
Inverse Element: For each real number a, there exists an inverse element, denoted as $-a$, such that $a + (-a) = (-a) + a = 0$. This property holds because every real number has an additive inverse in $\mathbb{R}$.
Commutativity: The operation of addition is commutative in $\mathbb{R}$, meaning that for any real numbers a and b, $a + b = b + a$.
Since all five properties are satisfied, the set $(\mathbb{R}, +)$ forms a commutative group.

4.1.3 : Example - مثال

لتكن المجموعة $E \neq \emptyset$ و $\mathscr{L}(E)$ مجموعة التطبيقات التقابلية المزودة بعملية التركيب

Let the set $E \neq \emptyset$ and $\mathscr{L}(E)$ be the set of bijective applications with the composition operation

$$\circ : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (f, g) \to f \circ g \end{array}$$

المجموعة $(E, \circ)$ تشكل زمرة ليست تبديلية

The set $(E, \circ)$ forms a non-commutative group

Let $(G, \star)$ be a group.		لتكن $(G, \star)$ زمرة.

3.1.3 : Definition - تعريف

Let $H \subset G$ be a subgroup of G if:		لتكن $H \subset G$ زمرة جزئية من G إذا كان :

$e \in H$		• $e \in H$

- من أجل كل $x, y \in H$ فإن $x \star y \in H$. *For every $x, y \in H$ then $x \star y \in H$.*
- من أجل كل $x \in H$ فإن $x^{-1} \in H$. *For every $x \in H$ then $x^{-1} \in H$.*

3.1.3 الحلقة The ring

الحلقة هي هيكل جبري مهم يتألف من مجموعة من العناصر وعمليتين داخليتين، يجب أن تكون هذه العمليتين مغستقرتين في المجموعة، مما يعني أن نتيجة العمليتين لأي عنصرين من المجموعة هي أيضا عنصر في المجموعة. بالإضافة إلى ذلك، يجب أن تكون هناك عنصر محايد لأحد العمليات وعنصر عكسي لكل عنصر في المجموعة.

A rings is an important algebraic structure composed of a set of elements and two internal operations. These operations must be closed within the set, meaning that the result of applying these operations to any two elements in the set must also be an element within the set. Additionally, there should exist a neutral element for one of the operations and an inverse element for each element in the set.

4.1.3 : Definition - تعريف

نقول أن $(A, \Delta, \star)$ المزودة بالعمليتين الداخليتين $\star$ و Δ أنها تشكل حلقة إذا تحققت ما يلي:

We say that $(A, \Delta, \star)$ with the two internal law $\star$ and Δ forms a ring if the following is true:

1) $(A, \star)$ زمرة تبديلية — *$(A, \star)$ is a commutative group*

2) Δ تجميعية — *Δ is associative*

$$\forall x, y, z \in A : \quad (x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z).$$

3) $\star$ توزيعية على Δ — *$\star$ is distributive on Δ*

$$\forall x, y, z \in A : \quad x \star (y \Delta z) = (x \star y) \Delta (x \star z).$$

إذا تحقق الشرط — *If the condition is met*

$$\exists! e \in A : \quad \forall x \in A, x \Delta e = e \Delta x = x,$$

نقول أن الحلقة $(A, \Delta, \star)$ حلقة واحدية.

we say that the ring $(A, \Delta, \star)$ is a unit ring.

If the condition is met إذا تحقق الشرط

$$\forall x, y \in A : \quad x\Delta y = y\Delta x,$$

نقول أن الحلقة $(A, \Delta, \star)$ حلقة تبديلية.

we say that the ring $(A, \Delta, \star)$ is a commutative ring.

5.1.3 : Example - مثال

المجموعة $(\mathbb{R}, +, \times)$ تشكل حلقة تبديلية واحدية.

The set $(\mathbb{R}, +, \times)$ forms a unit commutative ring.

To prove that the set $(\mathbb{R}, +, \times)$ forms a unit commutative ring, we need to show that it satisfies all the properties of a unit commutative ring:

1) Closure under addition: For all real numbers a and b, $a + b$ is a real number, which satisfies closure under addition.

2) Closure under multiplication: For all real numbers a and b, $a \cdot b$ is a real number, which satisfies closure under multiplication.

3) Associativity of addition and multiplication: Addition and multiplication of real numbers are both associative operations, so this property holds.

4) Commutativity of addition and multiplication: Addition and multiplication of real numbers are both commutative operations, so this property holds.

5) Existence of additive identity (unit element): The real number 0 serves as the additive identity since for all real numbers a, we have $a + 0 = 0 + a = a$.

6) Existence of multiplicative identity (unit element): The real number 1 serves as the multiplicative identity since for all real numbers a, we have $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

7) Existence of additive inverses: For every real number a, there exists an additive inverse $-a$ such that $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

8) Distributive property: The distributive property holds for multiplication over addition in the set of real numbers, i.e., for all real numbers a, b, and c, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Since all these properties are satisfied by the set $(\mathbb{R}, +, \times)$, it forms a unit commutative ring.

4.1.3 الجسم أو الحقل Field

الحقل في الرياضيات هو هيكل جبري أكثر تعقيدا من الحلقة. الحقل يتكون من مجموعة من العناصر مع تعريفين على الأقل للعمليات الرياضية: الجمع والضرب. هذه العمليات يجب أن تكون مستقرة داخل المجموعة وتلبي مجموعة من الشروط. وأمثلة على حقول تشمل الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية والأعداد العقدية كمثال. هذه الهياكل الجبرية تلعب دورا أساسيا في العديد من فروع الرياضيات والعلوم.

A field in mathematics is a more complex algebraic structure than a ring. It consists of a set of elements with at least two defined mathematical operations: addition and multiplication. These operations must be closed within the set and meet a set of conditions. Examples of fields include real numbers, rational numbers, and complex numbers, among others. These algebraic structures play a fundamental role in various branches of mathematics and the sciences.

5.1.3 : Definition - تعريف

نقول أن المجموعة $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K} \neq \phi$ أنها جسم أو حقل المزودة بالعمليين الداخليين $\star$ و Δ إذا تحققت ما يلي:

We say that the set $\mathbb{K}$ where $\mathbb{K} \neq \phi$ is a field endowed with the two internal laws $\star$ and Δ if the following statements is true:

1) $(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ حلقة

$(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ *is a ring.*

2) $(\mathbb{K}_{-\{e\}}, \Delta)$ زمرة، حيث $\{e\}$ هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية Δ

$(\mathbb{K}_{-\{e\}}, \Delta)$ *is a group, where $\{e\}$ is the neutral element with respect to the internal operation Δ*

إذا تحقق الشرط

If the condition holds.

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : \quad x \Delta y = y \Delta x,$$

نقول أن الجسم $(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ تبديلي.

We say that the structure $(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ is a commutative field.

6.1.3 : Example - مثال

المجموعة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ تشكل جسم تبديلي.

The set $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forms a commutative field.

To prove that the set $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forms a commutative field, we need to show two things: $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group (commutative group) under addition. $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ is an abelian group (commutative group) under multiplication, where $\mathbb{Q} \setminus 0$ is the set of nonzero rational numbers. Let's prove these two properties:

1) $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group:

   Closure: For any two rational numbers a and b in $\mathbb{Q}$, $a + b$ is also a rational number, so closure under addition holds.

   Associativity: Addition is associative for all rational numbers. That is, for any $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   Identity Element: The identity element for addition is 0, as $a + 0 = 0 + a = a$ for all $a \in \mathbb{Q}$.

   Inverse Element: For every $a \in \mathbb{Q}$, the additive inverse (negative) of a is $-a$, and $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

   Commutativity: Addition is commutative, meaning $a + b = b + a$ for all $a, b \in \mathbb{Q}$.

   Therefore, $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group.

2) $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ is an abelian group:

   Closure: For any two nonzero rational numbers a and b, $a \cdot b$ is also a nonzero rational number, so closure under multiplication holds.

   Associativity: Multiplication is associative for all nonzero rational numbers. That is, for any $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus 0$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Identity Element: The identity element for multiplication is 1, as $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for all $a \in \mathbb{Q} \setminus 0$.

Inverse Element: For every nonzero rational number a, the multiplicative inverse (reciprocal) of a is $\frac{1}{a}$, and $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Commutativity: Multiplication is commutative, meaning $a \cdot b = b \cdot a$ for all $a, b \in \mathbb{Q} \setminus 0$.

Therefore, $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ is an Abelian group.

Since both conditions are satisfied, the set $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forms a commutative field.

2.3 الفضاء الشعاعي *Vector space*

يعتبر هذا الجزء من أهم الفصول التي تُبنى عليها نظريات الجبر الخطي، إذ أنه يمثل الجزء الأساسي لما سيأتي بعده من مفاهيم، مثل التطبيقات الخطية، المصفوفات، المحددات... الخ، كما أنه يُعد تكملة لدروس الفصول الماضية مثل فصل المجموعات والبُنى الجبرية...

This part is one of the most important chapters upon which linear algebra theories are built. It represents the fundamental part for what will follow in terms of concepts, such as linear applications, matrices, determinants, etc. It also serves as a continuation of the lessons from previous chapters, such as the chapter on sets and algebraic structures...

6.2.3 : Definition - تعريف

نقول أن المجموعة $E \neq \emptyset$ أنها فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ إذا كانت مزودة بمايلي:

We say that the set $E \neq \emptyset$ is a vector space on the commutative field $\mathbb{K}$ if it has the following:

- قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية أي التطبيق المعرف من $E{\times}E$ نحو E حيث:

  The law of an internal structure or internal operation, i.e. the application defined from $E{\times}E$ towards E where:

$$\begin{array}{rcl} E{\times}E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

- قانون تركيب خارجي أو عملية خارجية أي التطبيق المعرف من $\mathbb{K}{\times}E$ نحو E حيث:

The law of an external structure or external operation, i.e. the defined application from $\mathbb{K}\times E$ *towards* E *where:*

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u\end{array}$$

الذي يحقق الشروط التالية:
which fulfills the following conditions:

1) $$\forall u, v \in E : u + v = v + u.$$

2) $$\forall u, v, w \in E : u + (v + w) = (u + v) + w.$$

3) يوجد عنصر حيادي $0_E \in E$ حيث
There is a neutral element $0_E \in E$ *where*

$$\forall u \in E : u + 0_E = u.$$

4) كل عنصر $u \in E$ يقبل عنصر نظير u' حيث
Every element $u \in E$ *accepts an opposite element* u' *where*

$$u + u' = 0_E.$$

نرمز للنظير u' بالرمز $(-u)$.
we denote the opposite element u' *by* $-u$.

5) $$\forall u \in E : 1 \cdot u = u,$$

6) $$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E : \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u.$$

7) $$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

8) $$\forall u \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

في ما بعد، و حتى نهاية الفصل:

From now on, and until the end of the chapter:

- **كل حقل نصادفه هو حقل تبديلي.**

Every field we encounter is a commutative field.

- **عناصر الفضاء الشعاعي تسمى أشعة وعناصر الحقل تسمى سلميات.**

The elements of the vector space are called rays, and the elements of the field are called scalars.

- كل فضاء شعاعي يشتمل على الاقل على الشعاع المعدوم و ومنه من غير الممكن ان يكون خاليا.

Every vector space contains at least the zero ray, and it cannot be empty.

- إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، نقول عن E أنه فضاء شعاعي حقيقي (على حقل الأعداد الحقيقية).

If $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, we say that E is a real vector space (over the field of real numbers).

- إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{C}$، نقول عن E أنه فضاء شعاعي تخيلي (على حقل الأعداد التخيلية).

If $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, we say that E is an imaginary ray space (over the field of complex numbers).

7.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathbb{R}^2$ الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل $\mathbb{R}$، أي : نضع $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ و $E=\mathbb{R}^2$. ومنه

Let $\mathbb{R}^2$ be the vector space defined on the field $\mathbb{R}$, that is: we set $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ and $E=\mathbb{R}^2$. Then

كل عنصر $u\in E$ هو الزوج (x,y) حيث x عنصر من $\mathbb{R}$ و y عنصر من $\mathbb{R}$. ونكتب

Each element $u\in E$ is a pair (x,y) where x is an element of $\mathbb{R}$ and y is an element of $\mathbb{R}$, and we write

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}.$$

- نعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون الداخلي $(+)$

We define on $\mathbb{R}^2$ the internal law denoted by $(+)$

ليكن (x,y) و (x',y') عنصرين من $\mathbb{R}^2$ ومنه:

Let (x,y) and (x',y') be two elements of $\mathbb{R}^2$, then:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y').$$

- نعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون الخارجي $(\cdot)$

We define on $\mathbb{R}^2$ the external law denoted by $(\cdot)$

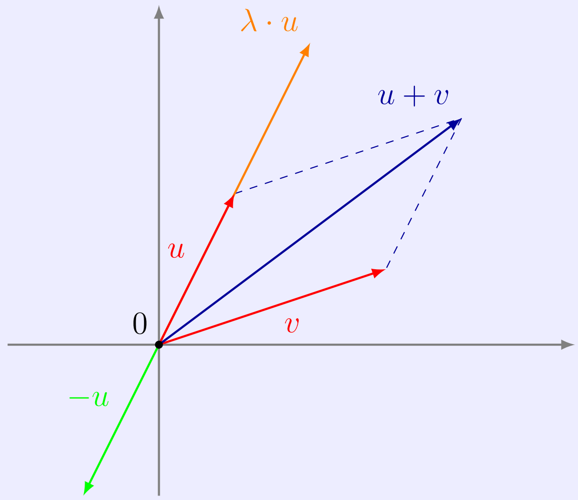
ليكن (x,y) عنصر من $\mathbb{R}^2$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه:

Let (x,y) be an element of $\mathbb{R}^2$ and λ be an element of $\mathbb{R}$, then:

$$\lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,\lambda y).$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية الجمع هو الشعاع المعدوم $(0,0)$. والعنصر النظير لكل عنصر (x,y) هو العنصر $(-x,-y)$ الذي قد نرمز له أيضا بالرمز $-(x,y)$.

The neutral element for the internal additive operation is the null vector $(0, 0)$. The opposite element of each element (x, y) is the element $(-x, -y)$, which we may also denote by $-(x, y)$.



8.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathbb{R}^n$ الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن n عدد طبيعي أكبر من 1. نضع $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ و $E = \mathbb{R}^n$.

Let $\mathbb{R}^n$ be the vector space defined on the field $\mathbb{R}$, and let n be a natural number greater than 1. We set $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ and $E = \mathbb{R}^n$.

كل عنصر $u \in E$ هو إذا الشعاع $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر من $\mathbb{R}$. ونكتب

Each element $u \in E$ is then the vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ where $x_1, x_2, \dots, x_n$ are elements of $\mathbb{R}$, and we write:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ...\}.$$

- نعرف على $\mathbb{R}^n$ القانون الداخلي $(+)$

We define on $\mathbb{R}^n$ the internal law $(+)$

ليكن $(x_1, \dots, x_n)$ و $(x'_1, \dots, x'_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$ ومنه:

Let $(x_1, \dots, x_n)$ and $(x'_1, \dots, x'_n)$ be two elements of $\mathbb{R}^n$, then:

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n).$$

- نعرف على $\mathbb{R}^n$ القانون الخارجي $(\cdot)$

We define on $\mathbb{R}^n$ the external law $(\cdot)$

ليكن $(x_1,\dots,x_n)$ عنصر من $\mathbb{R}^n$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه:

Let $(x_1,\dots,x_n)$ be an element of $\mathbb{R}^n$ and λ be an element of $\mathbb{R}$, then:

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية الجمع هو الشعاع المعدوم $(0,0,\dots,0)$. والعنصر النظير لكل عنصر $(x_1,\dots,x_n)$ هو العنصر $(-x_1,\dots,-x_n)$ الذي قد نرمز له أيضا بالرمز $-(x_1,\dots,x_n)$.

The neutral element for the internal additive process is the null vector $(0,0,\dots,0)$. The opposite element of each element $(x_1,\dots,x_n)$ is the element $(-x_1,\dots,-x_n)$, which we may also denote by the symbol $-(x_1,\dots,x_n)$.

بنفس المنوال يمكن إنشاء الفضاء $\mathbb{C}$ و $\mathbb{C}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

In the same way, the space $\mathbb{C}$ and $\mathbb{C}^n$ can be constructed on the field $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

9.2.3 : Example - مثال

الفضاء الشعاعي للدوال المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

The vector space of functions defined from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$.

لتكن $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. نزودها ببنية الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}$ كما يلي:

Let $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ be the set of functions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. We provide it with the vector space structure $\mathbb{R}$ as follows:

- نعرف على $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ القانون الداخلي $(+)$

We define on $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ the internal law $(+)$

لتكن f و g عنصرين من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ومنه $f+g$ معرف كما يلي:

Let f and g be elements of $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Then $f+g$ is defined as follows:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

- نعرف على $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ القانون الخارجي$(\cdot)$

We define on $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ the external law$(\cdot)$

لتكن f دالة من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه نعرف جداء دالة بسلمي كما يلي:

Let f be a function of $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ and λ an element of $\mathbb{R}$, then we define the product of a *scalar with function as follows:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

أو بكل بساطة نكتب

Or simply write

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- نعرف العنصر الحيادي بالنسبة للجمع بأنه الدالة المعدومة المعرفة كما يلي:
We define the neutral element with respect to the addition as the zero function as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

يمكن أن نرمز لها بالرمز $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

We can denote it as $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

- العنصر النظير للدالة f من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هو الدالة g المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:
The opposite function of the function f in $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ is the function g defined from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -f(x).$$

نرمز لنظير f بالنسبة للجمع بالرمز $(-f)$.

We denote the opposite function of f for addition by $(-f)$.

1.2.3 جداء الفضاءات الشعاعية Product of vector spaces

7.2.3 : Definition - تعريف

ليكن $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا وليكن $E_1, E_2, \ldots, E_n$ فضاءات شعاعية على الحقل $\mathbb{K}$. نعرف على $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ العمليتين الداخليتين $(+)$ و $(\cdot)$ كما يلي:

Let $\mathbb{K}$ be a commutative field and let $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be vector spaces on the field $\mathbb{K}$. We *define by* $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *the two internal operations* $(+)$ *and* $(\cdot)$ *as follows:*

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E : \\
&1)\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\
&2)\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n).
\end{aligned}$$

عندئذ $(E, +, \cdot)$ يمثل فضاء شعاعي يسمى فضاء الجداء. يكون العنصر الحيادي في هذا الفضاء هو شعاع العناصر الحيادية لكل فضاء ونكتب

Then $(E, +, \cdot)$ *represents a vector space called the product space. The neutral element in this space is the ray of the neutral elements of each space, and we write:*

$$0_E = \left(0_{E_1}, 0_{E_2}, \ldots, 0_{E_n}\right).$$

2.2.3 الحساب في الفضاءات الشعاعية Calculus in vector spaces

قضيـة - Proposition : 1.2.3

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$. وليكن $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$. ومنه لدينا:

Let E *be a vector space on the field* $\mathbb{K}$*. Let* $u \in E$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Then, we have:*

$$0 \cdot u = 0_E \tag{1}$$

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E \tag{2}$$

$$(-1) \cdot u = -u \tag{3}$$

$$u = 0_E \ \text{ where } \ \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \tag{4}$$

$$\lambda \cdot u = 0_E \Longrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}}) \vee (u = 0_E) \tag{5}$$

6) العملية التي ترفق بـ (u, v) الصورة $u + (-v)$ نسمي الطرح، ويرمز للشعاع $u + (-v)$ بالرمز $u - v$. ومنه لدينا الخواص التالية:

The operation that attaches to (u, v) *the image* $u + (-v)$ *is called subtraction, and the vector*

$u + (-v)$ *is denoted by* $u - v$*. Then, we have the following properties:*

$$\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v \ \text{ and } \ (\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u.$$

3.2.3 الفضاءات الشعاعية الجزئية Partial vector spaces

لتكن الثلاثية $(E, \Delta, \star)$ فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$.

Let the triple $(E, \Delta, \star)$ be a vector space on the commutative field $\mathbb{K}$.

تعريف - Definition : 8.2.3

نقول عن الجزء غير الخال F من E إنه فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق الشرطان:

We say that the non-empty part F of E is a partial vector space of E if the following conditions are satisfied:

1) (F, Δ) زمرة جزئية من الزمرة التبديلية (E, Δ).

(F, Δ) is a subgroup of the commutative group (E, Δ).

2) $\lambda \cdot x \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F :$.

أو يمكننا استعمال التعريف التالي:

Or we can use the following definition:

تعريف - Definition : 9.2.3

لتكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E.

Let E be a vector space over the field $\mathbb{K}$ and F a non-empty subset of E.

نقول عن F أنها فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق ما يلي:

We say that F is a subspace of E if the following conditions hold:

1) $0_E \in F$

$0_E \in F$

2) من أجل كل $u, v \in F$ لدينا $u + v \in F$

For every $u, v \in F$ we have $u + v \in F$

3) من أجل كل $\lambda \in \mathbb{K}$ و كلاً $u \in F$ لدينا $\lambda \cdot u \in F$

For every $\lambda \in \mathbb{K}$ and every $u \in F$ we have $\lambda \cdot u \in F$.

10.2.3 : Example - مثال

1) من أجل كل فضاء شعاعي E، فإن $\{0_E\}$ هو دوما فضاء شعاعي جزئي من E.
For every vector space E, $\{0_E\}$ is always a vector subspace of E.

2) مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية التي درجاتها أقل أو تساوي n، $\mathscr{P}_n[x]$ هي فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ ،
The set of polynomials with real coefficients whose degrees are less than or equal to n, $\mathscr{P}_n[x]$ is a vector space on $\mathbb{K}$,
ولدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن: $\mathscr{P}_m[x]$ هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathscr{P}_n[x]$ حيث $n < m$.
and we have $\forall n \in \mathbb{N}^*$ then: $\mathscr{P}_m[x]$ is a vector subspace of $\mathscr{P}_n[x]$ where $n < m$.

1.2.3 : Corollary - نتيجة

لتكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E.
Let E be a vector space on the field $\mathbb{K}$ and F a non-empty subset of E.
لكي يكون F فضاء شعاعي جزئي من E يكفي أن يتحقق الشرط التالي:
To have F be a partial subspace of E, it is sufficient for the the following conditions hold:

$$\boxed{\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda x + \mu y \in F.}$$

1.2.3 : Remark - ملاحظة

- كل فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي على حقل تبديلي، هو أيضا فضاء شعاعي على نفس الحقل.
Every sub-vector space of a vector space on a commutative field is also a vector space on the same field.

- كل فضاء شعاعي على حقل تبديلي ما، هو أيضا فضاء شعاعي جزئي من نفسه على نفس الحقل.
Every vector space on some commutative field is also a sub-vector space of itself on the same field.

4.2.3 المزج الخطية Linear combination

10.2.3 : Definition - تعريف

نفترض أن $n \geq 1$ عدد صحيح، ولتكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ ، n شعاع من E. كل شعاع من الشكل:

Let $n \geq 1$ be an integer, and let $v_1, v_2, \dots, v_n$, n be a vector from E. Each ray of the form:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ سلميات من الحقل $\mathbb{K}$) يسمى مزج خطي للأشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$.

(where $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are ladders of the field $\mathbb{K}$) It is called linear mixing of rays $v_1, v_2, \dots, v_n$.

السلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تسمى معاملات المزج الخطي.

The scales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are called linear mixing coefficients.

2.2.3 : Remark - ملاحظة

إذا كان $n = 1$، ومنه $u = \lambda_1 v_1$ و نقول أن u على علاقة خطية مع v_1.

If $n = 1$, then $u = \lambda_1 v_1$, and we say that u is in a linear relationship with v_1.

11.2.3 : Example - مثال

1) في الفضاء $\mathbb{R}^3$، الشعاع $(3, 3, 1)$ هي مزج خطي للشعاعين $(1, 1, 0)$ و $(1, 1, 1)$ لأن:

In the space $\mathbb{R}^3$, the ray $(3, 3, 1)$ is a linear combination of the two rays $(1, 1, 0)$ and $(1, 1, 1)$ because:

$$(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1).$$

2) في الفضاء $\mathbb{R}^2$، الشعاع $u = (2, 1)$ ليس مرتبط خطيا مع الشعاع $v_1 = (1, 1)$ لأنه لا يوجد λ حقيقي حتى يكون $u = \lambda v_1$ الذي يكافئ $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$.

In the space $\mathbb{R}^2$, the vector $u = (2, 1)$ is not linearly related to the vector $v_1 = (1, 1)$ because there is no real λ until $u =$ lambdav$_1$ which is equivalent to $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$.

3) ليكن $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية، وليكن f_0، f_1، f_2 و f_3 دوال معرفة بمايلي:

Let $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be the space of real functions, and let f_0, f_1, f_2 and f_3 be functions *defined by:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = 1, \ \ f_1(x) = x, \ \ f_2(x) = x^2, \ \ f_3(x) = x^3.$$

ومنه الدالة f المعرفة بـ

then the function f defined by

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

هي مزج خطي للدوال f_0, f_1, f_2, f_3 لأن

it is a linear combination of the functions f_0, f_1, f_2, f_3 because

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$

4) في فضاء المصفوفات $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ لتكن المصفوفة

In the matrix space $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

نستطيع كتابة A على شكل مزج خطي لمصفوفات تحتوي على أصفار في كل مكوناتها إلا واحدة فقط مثلا:

We can express matrix A as a linear combination of matrices that contain zeros in all their components except one, for example:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2.3 الإرتباط والإستقلال الخطي Linear correlation and independence

11.2.3 : Definition - تعريف

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نقول عن عائلة $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ أنها مستقلة خطيا أو إنها جملة حرة، إذا كان من أجل كل عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{i\leq n} \in \mathbb{K}$ لدينا:

Let $n \in \mathbb{N}^*$ be a natural number. We say that a family $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ of elements in the *vector space E over the field $\mathbb{K}$ is linearly independent or a free family if, for every family of scalars $\{\lambda_i\}_{i\leq n} \in \mathbb{K}$, the following condition holds:*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$$

حيث تكون جميع معاملاتها معدومة، أي:

where all its coefficients are zero, i.e.:

$$\lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}, \quad \lambda_2 = 0_{\mathbb{K}}, \quad \cdots \quad \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

0_E و $0_{\mathbb{K}}$ يمثلان صفر الفضاء الشعاعي E وصفر الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ على الترتيب.

0_E *and* $0_{\mathbb{K}}$ *represent the zero of the vector space E and the zero of the commutative field $\mathbb{K}$, respectively.*

12.2.3 : Example - مثال

لنعتبر في الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^3$ الأشعة

Let us consider in real vector space $\mathbb{R}^3$ the rays

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه، الشعاع b هو مزج خطي للأشعة $\{a_1, a_2, a_3\}$ و لدينا:

Hence, the ray b is a linear mixture of the rays $\{a_1, a_2, a_3\}$ and we have:

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 - a_2 + a_3. \end{aligned}$$

3.2.3 : Remark - ملاحظة

- نقول عن أية عائلة من عناصر الفضاء الشعاعي، إن لم تكن مستقلة خطيا أنها مرتبطة خطيا.
  We say of any family of vector space elements, if they are not linearly independent, that they are linearly dependent.

- المجموعة الخالية مستقلة خطيا في أي فضاء شعاعي.

The empty set is linearly independent in any vector space.

13.2.3 : Example - مثال

كثيرات الحدود

The polynomials

$$P_1(X) = 1 - X, P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2 \quad and \quad P_3(X) = 1 + 3X - X^2.$$

تشكل جملة خطية مترابطة في فضاء كثيرات الحدود $\mathscr{P}_n[X]$ لأن:

form a linearly dependent set in the polynomial space $\mathscr{P}_n[X]$ because:

إذا فحصنا معاملات كثيرات الحدود هذه، فسنلاحظ أن المعادلة

If we examine the coefficients of these polynomials, we can observe that the equation

$$aP_1(X) + bP_2(X) + cP_3(X) = 0.$$

لها حل غير معدوم مما يعني وجود ثوابت a، b، و c، لا تساوي جميعها صفرا، مما يجعل هذه المعادلة تساوي صفرا.

has a non-trivial solution, which means there exist constants a, b, and c, not all equal to zero, that make this equation equal to zero.

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

لذلك، فإن كثيرات الحدود مرتبطة خطياً في فضاء كثيرات الحدود.

Therefore, the polynomials are linearly dependent in the polynomial space.

14.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية، ولتكن الجملة $\{\cos, \sin\}$. لنبرهن أن هذه الجملة مستقلة خطيا: نفرض أن

Let $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be the space of real functions, and let the statement be $\{\cos, \sin\}$. To prove that this set is linearly independent: We assume that

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0$$

يكافئ أن

That equivalent to

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

من أجل $x = 0$ هذه المساوات تعطينا: $\lambda = 0$.

For $x = 0$ these equations give us: $\lambda = 0$.

ومن أجل $x = \frac{\pi}{2}$ تعطينا $\mu = 0$. أي أن الجملة $\{\cos, \sin\}$ مستقلة خطيا.

For $x = \frac{\pi}{2}$ it gives us $\mu = 0$. That is, the set $\{\cos, \sin\}$ is linearly independent.

من ناحية أخرى ، الجملة $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ مرتبطة خطيا لأنه لدينا العلاقة المثلثية التالية:

On the other hand, the set $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ is linearly related because we have the following trigonometric relationship:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 - 1 = 0.$$

هنا عوامل المزج الخطي كلها غير معدومة حيث لدينا:

Here, all the linear combination factors are non-zero because we have:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

2.2.3 : Corollary - نتيجة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نقول عن عائلة $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ أنها مرتبطة خطيا إذا وجدت عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{i \leq n} \in \mathbb{K}$ ليست كلها معدومة معا، تحقق:

Let $n \in \mathbb{N}^*$ we say about the family $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ of vector space elements E on The commutative field $\mathbb{K}$ is linearly dependent if there exists a family of scalers $\{\lambda_i\}_{i \leq n} \in \mathbb{K}$ that are not all null together, check:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E.$$

15.2.3 : Example - مثال

من المثال السابق لاحظ أن الجملة

From the previous example notice that the vectors

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

مرتبطة خطيا

linearly dependent

$$a_1 - a_2 + a_3 - b = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

أي

so

$$\exists \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1 : \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 b = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

ليست كلها معدومة معا.

Not all are zero together.

6.2.3 القاعدة أو الأساس The base or basis

القاعدة هي مفهوم أساسي في الجبر الخطي ولها تطبيقات وأهمية كبيرة. عندما يكون لديك قاعدة للفضاء الشعاعي، يمكنك تمثيل وفهم العناصر في هذا الفضاء بشكل أكثر فهما وسهولة، ويمكنك أيضا إجراء عمليات مختلفة مثل التحويلات الخطية وحساب المعاملات بسهولة باستخدام هذه القاعدة.

A basis is a fundamental concept in linear algebra and holds significant applications and importance. When you have a basis for a vector space, you can represent and understand the elements in that space more comprehensively and easily. You can also perform various operations, such as linear transformations and coefficient calculations, with ease using this basis.

تعريف - Definition : 12.2.3

لتكن $v_1, \cdots, v_n$ أشعة من الفضاء الشعاعي E، نقول عن الجملة $\{v_1, \cdots, v_n\}$ أنها جملة مولدة للفضاء الشعاعي E إذا كان كل شعاع من E يكتب على شكل مزج خطي في الأشعة $v_1, \cdots, v_n$. ونكتب

Let $v_1, \cdots, v_n$ be rays from the vector space E, we say of the set $\{v_1, \cdots, v_n\}$ that it is a generating set for the vector space E if every ray of E can be expressed as a linear *combination of the rays $v_1, \cdots, v_n$. We write:*

$$\forall v \in E, \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} : \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

و نقول أيضا أن الجملة $\{v_1, \cdots, v_n\}$ مولدة للفضاء E. أي مرتبطة بمفهوم الفضاء الشعاعي الجزئي المولد إذا وفقط إذا كان :

We also say that the set $\{v_1, \cdots, v_n\}$ generates the space E. This is also associated with the concept of the span generator if and only if:

$$E = Vect(v_1, \cdots, v_n).$$

16.2.3 : Example - مثال

Take, for example, the following rays **لتكن على سبيل المثال الأشعة التالية**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad and \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad of \quad E = \mathbb{R}^3.$$

الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مولدة لـ $\mathbb{R}^3$ لأن كل شعاع $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ من $\mathbb{R}^3$ يكتب

The set $\{v_1, v_2, v_3\}$ is generating $\mathbb{R}^3$ because each ray $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ from $\mathbb{R}^3$ writes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Here the factors are **هنا العوامل هي**

$$\lambda_1 = x, \lambda_2 = y, \lambda_3 = z.$$

17.2.3 : Example - مثال

Let the following rays be **لتكن الأشعة التالية**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad of \quad E = \mathbb{R}^3.$$

الأشعة $\{v_1, v_2\}$ لا تشكل جملة مولدة لـ $\mathbb{R}^3$. مثلا الشعاع $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ لاينتمي للفضاء الشعاعي $Vect(v_1, v_2)$.

The rays $\{v_1, v_2\}$ do not form a generative set for $\mathbb{R}^3$. For example, the vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ does not belong to the vector space $Vect(v_1, v_2)$.

فإذا كان فعلا فسوف نجد $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ حيث $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. والذي يكتب أيضا:

If it is true, we will find $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ where $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Who also writes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

it gives us the following linear equations: يعطينا الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

which has no solution. التي ليس لها حل.

18.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathscr{P}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة $\leq n$ الحقيقية ذات المعاملات الحقيقية. ومنه جملة كثيرات الحدود $\{1, X, X^2 \cdots, X^n\}$ تشكل جملة مولدة للفضاء $\mathscr{P}_n[X]$.

Let $\mathscr{P}_n[X]$ be the real vector space of polynomials of degree $\leq n$ with real coefficients. Then, the polynomial set $\{1, X, X^2 \cdots, X^n\}$ forms a generating set for the space $\mathscr{P}_n[X]$.

2.2.3 : Proposition - قضية

لتكن $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ جملة مولدة لـ E. ومنه $\mathscr{F}' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_q\}$ هي أيضا جملة مولدة لـ E إذا وفقط إذا كتب كل شعاع من $\mathscr{F}'$ على شكل مزج خطي في الجملة $\mathscr{F}$.

Let $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ be a generative set of E. Hence $\mathscr{F}' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_q\}$ is also a generative set of E if and only if every vector of $\mathscr{F}'$ is written as a linear mixture in the set $\mathscr{F}$.

13.2.3 : Definition - تعريف

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$. نقول أن الجملة $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ من E تشكل أساس للفضاء E إذا كانت:

Let E be a vector space on $\mathbb{K}$. We say that the set $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ of E forms a basis for the space E if:

1) $\mathcal{B}$ جملة مولدة لـ E.

$\mathcal{B}$ is a generating set for E.

2) $\mathcal{B}$ جملة مستقلة خطيا.

$\mathcal{B}$ is a linear independent set.

1.2.3 : Theorem - نظرية

لتكن $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ أساس للفضاء الشعاعي E.

Let $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ be a basis of the vector space E.

كل شعاع $v \in E$ يكتب على شكل كتابة وحيدة كمزج خطي في عناصر المجموعة $\mathcal{B}$. أي يوجد سلميات $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ وحيدة حيث:

Each vector $v \in E$ is written as a single linear combination in the elements of the set $\mathcal{B}$. That is, there are single scalers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ where:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

4.2.3 : Remark - ملاحظة

1) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ نسمى إحداثيات الشعاع v في الأساس $\mathcal{B}$.

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ are called the coordinates of v in the basis $\mathcal{B}$.

2) التطبيق من الشكل

The application of form

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

هو تقابل من الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}^n$ نحو الفضاء الشعاعي E.

It is a bijection from the vector space $\mathbb{K}^n$ to the vector space E.

7.2.3 بعد فضاء شعاعي Dimension of a vector space

البُعد في الفضاء الأشعة يُشير إلى عدد الشعاعات (أو الأبعاد) الفرعية التي يتكون منها هذا الفضاء. يمكن أن يكون البُعد مفهوما مهما في مجموعة متنوعة من السياقات، بما في ذلك الرياضيات والفيزياء.

The dimension in vector space refers to the number of subspaces (or dimensions) that compose this space. Dimension can be an important concept in various contexts, including mathematics and physics.

في السياق الرياضي، يمكن تمثيل الفضاء الشعاعي باستخدام مجموعة من الأسس (أو الأشعة) التي تتيح تمثيل أي نقطة في هذا الفضاء. البُعد في هذا السياق يُشير إلى عدد الأشعة الأساسية اللازمة لتمثيل أي نقطة في الفضاء بشكل فريد. على سبيل المثال، الفضاء الثنائي ($2D$) يتطلب شعاعين أساسيين لتمثيل نقطة، بينما الفضاء الثلاثي ($3D$) يتطلب ثلاث أشعة أساسية.

In a mathematical context, a vector space can be represented using a set of basis vectors (or rays) that allows unique representation of any point in that space. Dimension in this context indicates the number of fundamental rays required to uniquely represent any point in the space. For example, a two-dimensional space (2D) requires two basis rays to represent a point, while a three-dimensional space (3D) requires three basis rays.

في الفيزياء وعلوم الهندسة، البُعد في الفضاء الشعاعي يُشير إلى عدد الإتجاهات المختلفة التي يمكن أن يتحرك فيها شيء معين. على سبيل المثال، الكرة في الفضاء الثلاثي الأبعاد تتحرك في ثلاث إتجاهات مختلفة، وبالتالي، لديها ثلاثة أبعاد.

In physics and engineering, dimension in vector space refers to the number of different directions in which a particular object can move. For example, a ball in three-dimensional space can move in three different directions, and thus, it has three dimensions.

البُعد في الفضاء الشعاعي يكون أساسيا لتحليل وفهم الخصائص والسلوك في مجموعة متنوعة من السياقات الرياضية والعلمية.

The dimension in vector space is fundamental for analyzing and understanding properties and behaviors in various mathematical and scientific contexts.

14.2.3 : Definition - تعريف

إذا كان للفضاء الشعاعي E أساس $\mathcal{B}$ ذو عدد منته n من العناصر فإن الفضاء الشعاعي E ذو بعد منته ونكتب

If the vector space E has a basis $\mathcal{B}$ with a finite number of elements n, then the vector space

E has a finite dimension, and we write:

$$\dim(E) = Card(\mathcal{B}) = n.$$

5.2.3 : Remark - ملاحظة

الفضاء المعدوم $\{0\}$ ذو بعد معدوم أي $\dim(\{0\}) = 0$.

The zero space $\{0\}$ has a zero dimension, i.e. $\dim(\{0\}) = 0$.

19.2.3 : Example - مثال

1) الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^2$ هو:

The canonical basis for the space $\mathbb{R}^2$ is:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ومنه بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ هو 2.

Hence the dimension of space $\mathbb{R}^2$ is 2.

2) الأشعة

The vectors

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

تشكل أيضا أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ و أي أساس لـ $\mathbb{R}^2$ آخر فإنه يحتوي على نفس عدد العناصر.

It also forms the basis of the space $\mathbb{R}^2$, and any other basis of the space $\mathbb{R}^2$ contains the same number of elements.

3) بصفة عامة الفضاء $\mathbb{K}^n$ ذو بعد n لأن كل أساس له $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ يحوي n عنصر.

In general, the space $\mathbb{K}^n$ has n dimensions because each basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ contains n elements.

4) $(\dim \mathscr{P}_n[X] = n+1)$ لأن أساس الفضاء $\mathscr{P}_n[X]$ هو $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ الذي يحوي $n+1$ عنصر.

$(\dim \mathscr{P}_n[X] = n+1)$ *because the basis of the space $\mathscr{P}_n[X]$ is $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ which contains $n+1$ elements.*

2.2.3 : Theorem - نظرية

في فضاء شعاعي ذو البعد المنته n لدينا:

In a vector space with finite dimension n, we have:

- كل جملة مستقلة خطيا بها n عنصر كحد أقصى،

  Each linearly independent set has a maximum of n elements,

- كل جملة مستقلة خطيا مكونة من n عنصر فهي أساس،

  Every linearly independent set consisting of n elements is a basis,

- كل جملة مولدة فهي مكونة من n عنصر على الأقل،

  Every generative set is composed of at least n elements,

- كل جملة مولدة مكونة من n عنصر فهي أساس.

  Every generated set consisting of n elements is a basis.

15.2.3 : Definition - تعريف

نسمي رتبة جملة أشعة، بعد الفضاء الشعاعي الذي تولده.

We call the range of a set of rays, the dimension of the vector space they generate.

6.2.3 : Remark - ملاحظة

الملاحظات التالية هي نتائج سهلة للنظرية السابقة:

The following observations are easy consequences of the previous theorem:

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع على الأكثر n.

  The range of a set consisting of n rays, at most is n.

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع هي n إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة مستقلة خطيا.

  The range of a ray system consisting of n rays is n if and only if this system is linearly independent.

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع هي n إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة تشكل أساسا للفضاء الشعاعي الذي تولده.

  The range of a ray system consisting of n rays is n if and only if this system forms the *basis of the vector space it generates.*

8.2.3 المجموع المباشر Direct sum

المجموع المباشر هو مصطلح يستخدم في الرياضيات والجبر الخطي للإشارة إلى العملية التي تجمع بين فضائين من نوعين مختلفين دون تداخل بينهما. إذا كان لديك فضاءين منتهيين (على سبيل المثال، فضاءين جزئيين)، يمكنك دمجهما معا لإنشاء مساحة أكبر تسمى المجموع المباشر.

The direct sum is a term used in mathematics and linear algebra to refer to the operation that combines two distinct types of spaces without any overlap between them. If you have two finite spaces (for example, two subspaces), you can merge them together to create a larger space known as the direct sum.

استخدام المجموع المباشر يكون مفيدا في الجبر الخطي والرياضيات حيث تكون هناك حاجة لدمج مساحات نوعية مختلفة أو لتوسيع الأبعاد.

The use of the direct sum is valuable in linear algebra and mathematics when there is a need to combine different types of spaces or to expand dimensions.

16.2.3 : Definition - تعريف

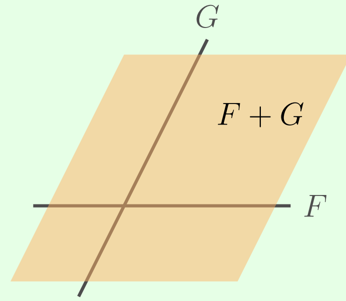
ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E.

Let F and G be two sub-vector spaces of E.

مجموعة جميع العناصر $u+v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G نسمى مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين F و G. ونرمز له بالرمز $F+G$. ومنه نكتب:

The set of all elements $u+v$ where u is an element of F and v is an element of G is called the sum of the vector subspaces F and G. We denote it with $F+G$. Then we write:

$$F+G=\{u+v \mid u\in F, v\in G\}.$$



3.2.3 : Proposition - قضيـة

لِيَكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. فإن:

Let F and G be two sub-vector spaces of E. Then:

1) $F+G$ فضاء شعاعي جزئي من E.

$F+G$ is a sub-vector space of E.

2) $F+G$ هو أقل فضاء شعاعي جزئي يحوي في نفس الوقت F و G.

$F+G$ is the minimal sub-vector space that simultaneously contains F and G.

17.2.3 : Definition - تعريف

لِيَكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. نقول أن F و G في جمع مباشر في E نرمز له بالرمز $F \oplus G = E$ إذا كان:

Let F and G be two sub-vector spaces of E. We say that F and G are in direct sum in E, which we denote by $F \oplus G = E$ if:

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F + G = E$.

إذا كان F و G في جمع مباشر نقول أن F و G فضاءان شعاعيان جزئيان متكاملان في E.

If F and G are in direct sum, we say that F and G are two complementary sub-vector spaces in E.

4.2.3 : Proposition - قضيــة

نقول أن F و G متكاملان في E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب بطريقة وحيدة لعنصر من F وعنصر من G.

We say that F and G are complementary in E if and only if each element of E is written in as a unique way for an element of F and an element of G.

7.2.3 : Remark - ملاحظة

1) نقول أن w من E يكتب على شكل كتابة وحيدة لعنصر من F وعنصر من G يعني أن $w = u + v$ حيث $u \in F$ و $v \in G$ و كتابة أخرى من الشكل $w = u' + v'$ حيث $u' \in F$، $v' \in G$ فإنه حتما $u = u'$ و $v = v'$.

We say that w of E is written as a single writing of an element of F and an element of G, which means that $w = u + v$ where $u \in F$, $v \in G$, and another writing From the form $w = u' + v'$ where $u' \in F$, $v' \in G$ it is inevitable that $u = u'$ and $v = v'$.

2) إذا كان لدينا $F \oplus G = E$. فإننا نقول أن الفضاء الشعاعي الجزئي F مكمل للفضاء الشعاعي الجزئي G و العكس.

If we have $F \oplus G = E$. We say that the sub-vector space F is complementary to the sub-vector space G and vice versa.

3) وجود الفضاءات الشعاعية الجزئية المتكاملة يكون فقط في فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية.

The presence of complimentary sup-vector spaces occurs only in finite-dimensional vector spaces.

4) إذا كان لدينا $F \oplus G = E$. فإن　　　*e have $F \oplus G = E$. Then*

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

20.2.3 : Example - مثال

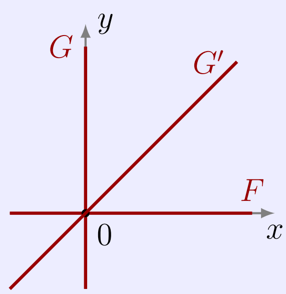
1) ليكن　　　*Let*

$$F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad and \quad G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

أثبت أن — *Prove that*

$$F \oplus G = \mathbb{R}^2.$$

لدينا $F \cap G = \{(0,0)\}$ وبما أن $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ فإن $F + G = \mathbb{R}^2$. أو يمكن أن نرى بسهولة أن الكتابة التالية $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ وحيدة.



We have $F \cap G = \{(0,0)\}$ and since $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ then $F + G = \mathbb{R}^2$. Or we can easily see that the following writing $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ is unique.

2) نأخذ F ونضع $G' = \left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$. يمكننا إثبات أيضا أن :

We take F and $G' = \left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$. We can also prove that:

$$F \oplus G' = \mathbb{R}^2$$

A) نثبت أن — *we prove that*

$$F \cap G' = \{(0,0)\}.$$

إذا كان $(x,y) \in F \cap G'$ ومنه من جهة $(x,y) \in F$ أي $y = 0$ و أيضا $(x,y) \in G'$ فإن $x = y$. وبالتالي $(x,y) = (0,0)$.

If $(x,y) \in F \cap G'$ then, from one side $(x,y) \in F$ i.e. $y = 0$ and also $(x,y) \in G'$ then $x = y$. Therefore $(x,y) = (0,0)$.

B) نثبت أن — *we prove that*

$$F + G' = \mathbb{R}^2.$$

لتكن $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. نبحث عن $v\in F$ و $w\in G'$ حيث $u=v+w$. بما أن $v=(x_1,y_1)\in F$ فإن $y_1=0$ و بما أن $w=(x_2,y_2)\in G'$ فإن $x_2=y_2$. إذا نجد x_1 و x_2 حيث

Let $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. We look for $v\in F$ and $w\in G'$ where $u=v+w$. Since $v=(x_1,y_1)\in F$ then $y_1=0$ and since $w=(x_2,y_2)\in G'$ then $x_2=y_2$. So we find x_1 and x_2 where

$$(x,y)=(x_1,0)+(x_2,x_2).$$

ومنه $(x,y)=(x_1+x_2,x_2)$. وبالتالي $x=x_1+x_2$ و $y=x_2$ حيث $x_1=x-y$ و $x_2=y$. نجد

Then $(x,y)=(x_1+x_2,x_2)$. Hence $x=x_1+x_2$ and $y=x_2$ where $x_1=x-y$ and $x_2=y$. We find

$$(x,y)=(x-y,0)+(y,y),$$

مما يثبت أن أي عنصر من عناصر $\mathbb{R}^2$ هو مجموع عنصر من F وعنصر من G'.

Which proves that any element of $\mathbb{R}^2$ is the sum of an element of F and an element of G'.