الفصل الأول

Sets theories نظريات المجموعات

1.1 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 1*

تمرين رقم – Exercise N°– 1

اكتب بالتفصيل (أي بإعطاء كل عناصر المجموعات التالية:

Write in detail (i.e., by providing all elements) the following sets:

1) $A = \{integers\ between\ \ 2\pi$ و $\sqrt{2}$ أعداد صحيحة بين$\}$.

2) $B = \left\{x \in \mathbb{Q};\ \exists(n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ x = \frac{p}{n}\ \ and\ \ 1 \le p \le 2n \le 7\right\}$.

الحــل : Solution

لدينا

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

لكتابة B ، نلاحظ أن

$$1/2 \le n \le 7/2 \Rightarrow n = 1, 2 \text{ أو } 3.$$

لكل قيمة محتملة لـ n ، نكتب القيم المحتملة لـ p ، ونحصل على:

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

نلاحظ أنه لم نكتب عدة مرات 1 ، والتي تم الحصول عليها أيضا بـ $2/2$ و $3/3$ ، ولا عدة مرات 2، والتي حصلنا عليها بـ $2/1$ و $4/2$ و $6/3$.

تمرين رقم – 2 – Exercise N°

إذا كان لدينا $C \subset A \cup B$ فهل : لأن $C \subset A$ أو $C \subset B$ ؟

If we have $C \subset A \cup B$ does that mean $C \subset A$ or $C \subset B$?

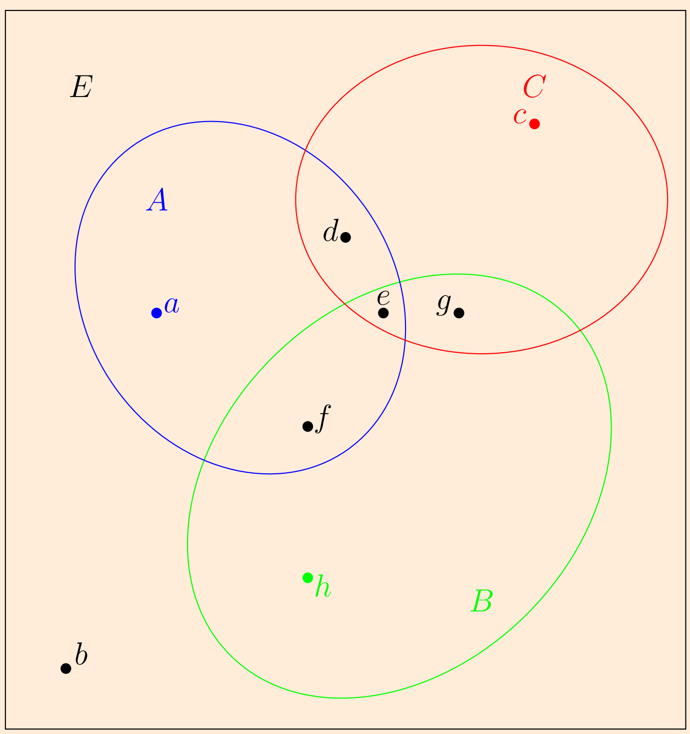
الحـــل : Solution

لا! نأخذ مثلا $A = \{1,2\}$، $B = \{3,4\}$ و $C = \{2,3\}$.

تمرين رقم – 3 – Exercise N°

نأخذ في الاعتبار مخطط فين التالي ، الذي يحتوي على ثلاثة مجموعات جزئية A, B, C من المجموعة E و العناصر a, b, c, d, e, f, g, h من E.

We consider the following Venn diagram, which contains three partial sets A, B, and C of the set E, and the elements a, b, c, d, e, f, g, h from E.



حدد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

Determine whether the following statements are true or false:

1) $g \in A \cap \bar{B}$ **2)** $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$. **3)** $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
4) $f \in \bar{A}$. **5)** $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. **6)** $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
7) $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Solution : الحـــل

1) **خطأ لأن** $g \in B$ **وبالتالي** $g \notin \overline{B}$.

2) **خطأ لنفس السبب.**

3) **صحيح لأن** $g \in \overline{A}$.

4) **خطأ لأن** $f \in A$.

5) **خطأ لأن** $e \in A$.

6) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $h \notin \overline{A} \cap \overline{B}$ **و** $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$: **و هذا خطأ.**

7) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $a \in A \cup C$ **و** $f \in A \cup C$: **و هذا صحيح.**

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن B, A و C ثلاث مجموعات حيث $A \cup B = B \cap C$.

Let B, A and C be three sets where $A \cup B = B \cap C$.

أثبت أن $A \subset B \subset C$.

Prove that $A \subset B \subset C$.

Solution : الحـــل

ليكن $x \in A$. **ومنه** $x \in A \cup B$ **، وبالتالي** $x \in B \cap C$**، أي أن،** $x \in B$ **، وبالتالي** $A \subset B$.
الآن نأخذ $x \in B$. **ومنه** $x \in A \cup B$ **، وبالتالي** $x \in B \cap C$**، أي أن ،** $x \in C$ **، وبالتالي** $B \subset C$.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن B, A و C ثلاثة مجموعات جزئية من المجموعة E. من أجل $X \subset E$ ، نرمز بالرمز X^c إلى متممة X في E.

Let B, A and C be three subsets of the set E. For $X \subset E$, we denote by X^c the complement of X in E.

Prove the following Morgan's laws: أثبت قوانين مورغان التالية:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A^c)^c = A$

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4.** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solution : الحـــل

في كل مرة سنبرهن بالإحتواء المزدوج.

1) **ليكن** $x \in (A \cap B) \cup C$، **ومنه** $x \in A$ **و** $x \in B$ **أو** $x \in C$. **إذا كان** $x \in A$ **و** $x \in B$ ، **فإن** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **ويتم إثبات الإحتواء. بخلاف ذلك ، يكون** $x \in C$ **فقط ، وفي هذه الحالة لدينا أيضا** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$.

بالمقابل ، إذا كان $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **فإننا نميز بين حالتين: إذا كان** $x \in C$ ، **ومنه** $x \in (A \cap B)$ **أو** $x \in C$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$. **خلاف ذلك ،** $x \notin C$. **ولكن ، بما أن** $x \in A \cup C$، **يصبح لدينا** $x \in A$. **وبالمثل، بما أن** $x \in B \cup C$، **فإن** $x \in B$. **هذا يثبت أن** $x \in A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$.

2) **ليكن** $x \in (A^c)^c$. **ومنه** $x \notin A^c$ ، **وبالتالي** $x \in A$. **بالمقابل ، إذا كان** $x \in A$ ، **فإن** $x \notin A^c$ **وبالتالي** $x \in (A^c)^c$.

3) **ليكن** $x \in (A \cap B)^c$. **ثم** $x \notin A \cap B$. **إذن لدينا** $x \notin A$ **أو** $x \notin B$ ، **أي أن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$. **نستنتج أن** $x \in A^c \cup B^c$. **بالمقابل ، ليكن** $x \in A^c \cup B^c$. **إذن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$ ، **أي أن** ، $x \notin A$ **أو** $x \notin B$. **على وجه الخصوص ،** $x \notin A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B)^c$.

4) **يمكننا أيضاً تقديم المنطق السابق في نموذج التكافؤ**

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ و } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ و } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة، A ، B و C ثلاثة عناصر من $\mathscr{P}(E)$. أثبت أن:

Let E be a set, A , B and C three elements of $\mathscr{P}(E)$. Prove that:

1) إذا كان $A \cap B = A \cup B$ ، فإن $A = B$.
If $A \cap B = A \cup B$, then $A = B$.

2) إذا كان $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$ ، فإن $B = C$. هل يكفي أحد الشرطين؟
If $A \cap B = A \cap C$ and $A \cup B = A \cup C$, then $B = C$. Is one of the two conditions sufficient?

Solution : الحـــل

1) من خلال تناظر القضية في A و B، يكفي إثبات أن $A \subset B$.
ليكن $x \in A$ ونفرض أن $x \notin B$. ومنه فإن $x \in A \cup B$ ولكن $x \notin A \cap B$ وبالتالي فإن المجموعتين $A \cap B$ و $A \cup B$ مختلفتان ، وهذا تناقض. لذلك فإن $x \in B$.

2) من خلال تناظر القضية في B و C ، يكفي إثبات أن $B \subset C$.
ليكن $x \in B$. نميز هنا حالتين:

A) إما $x \in A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cap B = A \cap C$ ، وبالتالي $x \in C$.

B) أو $x \notin A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cup B = A \cup C$ وبالتالي $x \in A$ أو $x \in C$. نظراً لأننا في الحالة $x \notin A$ ، فإننا نستنتج أن $x \in C$.

في جميع الحالات ، أثبتنا $x \in C$ ، وبالتالي $B \subset C$. شرط واحد غير كافي.

إذا افترضنا فقط أن $A \cup B \subset A \cup C$ ، علينا فقط أن نأخذ المثال التالي لكي نبرهن ضرورة الشرطين معا.
ليكن $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$.
لدينا $A \cup B \subset A \cup C$ ، لكن ليس لدينا $B \subset C$.

إذا افترضنا فقط أن $A \cap B \subset A \cap C$ ، علينا أن نأخذ فقط كمثال $A = C = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

اوجد مجموعة أجزاء المجموعة
Find the set of parts of the set

$$E = \{a, b, c, d\} .$$

Solution : الحـــل

المجموعة $P(E)$ **لأجزاء مجموعة** $E = a, b, c, d$ **تحتوي على جميع المجوعات الجزئية الممكنة للمجموعة** E**، بما في ذلك المجموعة الخالية والمجموعة نفسها. إليك جميع المجموعات الجزئية:**

The set $P(E)$ of parts of the set $E = \{a, b, c, d\}$ includes all possible subsets of E, including the empty set and the set itself. Here are all the subsets:

$$\begin{aligned} P(E) = \{&\phi, \\ &\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ &E\} \end{aligned}$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن E و F مجموعتين و لتكن A و C مجموعتين جزئيتين من E و B، D مجموعتين جزئيتين من F .

Let E and F be two sets, and let A and C be two subsets of E and B , D be two subsets of F .

Prove that أثبت أن

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Solution : الحـــل

سنبرهن الإحتواء المزدوج.

لتكن $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. **ومنه** $(x, y) \in A \times B$ **وبالتالي** $x \in A$ ، $y \in B$.

لدينا أيضا $(x, y) \in (C \times D)$، **وبالتالي** $x \in C$ **و** $y \in D$. **لذا** ، $x \in A \cap C$ **و** $y \in B \cap D$.

هذا يثبت أن $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

بالمقابل ، لتكن $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ **يعني أن** $x \in A \cap C$ **وبالتالي** $x \in A$ **و** $x \in C$.

وبالمثل، $y \in B \cap D$ ، **لذا** $y \in B$ **و** $y \in D$. **إذن** ، $(x, y) \in A \times B$ **و** $(x, y) \in C \times D$.

نستنتج أن $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة و A و B مجموعتين جزئيتين من E.

Let E be a set, and A and B be two subsets of E.

أثبت أن $A\Delta B = B$ (الفرق التناظري) إذا وفقط إذا كانت $A = \varnothing$.

Prove that $A\Delta B = B$ (symmetric difference) if and only if $A = \varnothing$.

Solution : الحــل

تذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$\boxed{A\Delta B = (A\cap \bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)}$$

حيث $\bar{A}$ تمثل متمم المجموعة A في E.

هناك إحتواء سهل:

إذا كان $A=\phi$ ، فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا $A\cap B = B$ و لأن $A=\phi$ و $\bar{A}\cap B = B$.

بالمقابل ، إذا كان $A\cap B = B$ ، يجب أن نثبت أن $A=\phi$.

سنقسم الإثبات إلى قسمين:

أولا: نثبت أن $A\cap B=\phi$.

ليكن $x\in B$، و على وجه الخصوص $x\in A\cap B$ ، و يعني حتما أن $x\in A\cap\bar{B}$ أو $x\in\bar{A}\cap B$.

الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x\in B$) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح $x\in\bar{A}\cap B$.

وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A\cap B=\phi$.

سنثبت أيضا أن $A\cap\bar{B}=\phi$.

في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A\cap\bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A\cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A=\phi$.

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

حدد ما إذا كانت العلاقات التالية انعكاسية ، تناظرية ، ضد تناظرية أو متعدية:

Determine whether the following relations are reflexive, symmetric, anti-symmetric, or transitive:

$$E=\mathbb{Z} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff x=-y \quad (1)$$

$$E=\mathbb{R} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff \cos^2 x+\sin^2 y=1 \quad (2)$$

$$E=\mathbb{N} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff \exists p,q\geq 1,\ y=px^q \quad (3)$$

حيث p و q أعداد طبيعية.

where p and q are natural numbers.

Solution : الحــل

(1) العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $-1 \neq 1$.

العلاقة تناظرية ، لأن $x=-y \iff y=-x$.

العلاقة ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1\neq -1$.

العلاقة ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة

ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

Exercise N°– 11 – تمرين رقم

نعرف في $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\mathscr{R}$ كما يلي:

In $\mathbb{R}^2$ we define the relationship $\mathscr{R}$ as follows:

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff x=x'.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ.

Prove that $\mathscr{R}$ is an equivalence relation.

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Find the equivalence class of the element $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Solution : الحــل

العلاقة $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ لأنها:

(1) إنعكاسية لأن $x=x$ مهما يكن x ومنه $(x,y)\mathscr{R}(x,y)$

(2) تناظرية: إذا كان $(x,y)R(x',y')$ فإن $x=x'$ الذي يمكن كتابته أيضا $x'=x$ الذي يكافئ $(x',y')\mathscr{R}(x,y)$.

(3) متعدية: إذا كان $(x,y)R(x',y')$ و $(x',y')R(x'',y'')$ فإن $x=x'$ من جهة و $x'=x''$ من جهة أخرى، يعني $x=x''$ الذي ينتج لنا $(x,y)R(x'',y'')$.

نبحث الآن عن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) أي تحديد الثنائيات (x, y) التي تحقق $(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0)$.

لدينا

$$(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0) \Longrightarrow x = x_0.$$

ونستطيع أن نقول أيضا أن x يجب أن يساوي x_0 أما y يكون أي قيمة.
نستنتج أن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) هو المجموعة

$$\{(x_0, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

تمرين رقم – 12 – Exercise N°

نعرف على المجموعة $\mathbb{R}$ العلاقة التالية — *We define the following relation on the set $\mathbb{R}$*

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ. — *Prove that $\mathscr{R}$ is an equivalence relation.*

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر x من $\mathbb{R}$. — *Find the equivalence class of the element x of $\mathbb{R}$.*

(3) كم يوجد من عنصر في هذه الفئة؟ — *How many elements are there in this category?*

الحل : Solution

(1) نلاحظ أن

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y \iff f(x) = f(y)$$

حيث $f : x \mapsto x^2 - x$ ، من السهل بعد ذلك التحقق من خلال هذا التطبيق أن $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ ، أي أنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

(2) ليكن $x \in \mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.

لذلك يجب علينا حل المعادلة (في y)

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

باستعمال

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \iff (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

(3) حلول المعادلة هي $y = x$ و $y = 1 - x$. وبالتالي فإن صنف تكافؤ x هو المجموعة $\{x, 1 - x\}$. وهي مكونة من عنصرين.
إذا كان $x = 1 - x \Longrightarrow x = 1/2$. في هذه الحالة ، صنف تكافؤ العنصر x هو المجموعة $\{1/2\}$.

Let's prove each of these properties:

(a) Reflexivity: For any $x \in \mathbb{R}$, we have:

$$x^2 - x = x - x \quad \text{(Subtracting } x \text{ from both sides)} \quad x^2 - x = 0.$$

This shows that $x\mathscr{R}x$ since $x^2 - x = 0$.

(b) Symmetry: Let $x, y \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$. This means:

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

We can rearrange this equation by adding y to both sides:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + y &= x - y + y \\ x^2 - y^2 + y &= x. \end{aligned}$$

Now, we have shown that $x\mathscr{R}y$ implies $x = x^2 - y^2 + y$. Similarly, if we start with $y\mathscr{R}x$, we will arrive at the same conclusion: $y = x^2 - y^2 + y$. Therefore, $\mathscr{R}$ is symmetric.

(c) Transitivity: Let $x, y, z \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$ and $y\mathscr{R}z$. This means:

$$x^2 - y^2 = x - y \quad \text{and} \quad y^2 - z^2 = y - z.$$

We can add these two equations together:

$$(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (x - y) + (y - z).$$

Now, we can simplify each side of the equation:

$$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \; x^2 - z^2 \qquad = x - z.$$

This shows that $x\mathscr{R}z$, and therefore, $\mathscr{R}$ is transitive.

Since $\mathscr{R}$ satisfies all three properties (reflexivity, symmetry, and transitivity), it is indeed an equivalence relation.

(2) To find the equivalence class of the element $x \in \mathbb{R}$, we need to determine all elements $y \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$.

From the definition of $\mathscr{R}$, we have:

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

Let's simplify this equation:

$$x^2 - y^2 = x - y \ (x-y)(x+y) \qquad\qquad = x - y.$$

Now, we have two cases:

Case 1: $x - y = 0$. This implies $x = y$.

Case 2: $x - y \neq 0$. In this case, we can divide both sides by $(x - y)$:

$$x + y = 1.$$

Now, we have two equations:

(i) $x = y$ from Case 1.

(ii) $x + y = 1$ from Case 2.

Therefore, the equivalence class of x consists of all real numbers y such that $y = x$ or $y + x = 1$.

(3) To determine how many elements are in this equivalence class, let's analyze the possibilities:

(a) If $y = x$, then there is only one element in the equivalence class, which is $x = 1/2$
(b) If $y \neq x$, then there is only two elements in the equivalence class, which is $\{x, 1-x\}$

Exercise N°– 13 – تمرين رقم

1) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto x^2$ و لتكن $A = [-1, 4]$. أوجد:

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *where* $x \mapsto x^2$ *and let* $A = [-1, 4]$. *Find:*

A) الصورة المباشرة للمجموعة A بواسطة التطبيق f

The direct image of the set A *by application* f.

B) الصورة العكسية للمجموعة A بواسطة التطبيق f.

The inverse image of the set A *by the application* f.

2) لتكن الدالة $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Let the function be $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A) ماهي الصورة المباشرة بواسطة $\sin$ للمجموعة $\mathbb{R}$؟ و $[0, 2\pi]$؟ و $[0, \pi/2]$؟

What is the direct image by $\sin$ *of the set* $\mathbb{R}$? *And* $[0, 2\pi]$? *And* $[0, \pi/2]$?

B) ماهي الصورة العكسية بواسطة $\sin$ للمجموعة $[0, 1]$؟ و $[3, 4]$؟ و $[1, 2]$؟

What is the inverse image by $\sin$ *of the set* $[0, 1]$? *And* $[3, 4]$? *And* $[1, 2]$?

Solution : الحــل

1) A) **نبحث عن جميع القيم المأخوذة بواسطة** x^2 **عندما** $x \in [-1, 4]$ **فبين** -1 **و** 0 **، يتم أخذ جميع القيم من** 0 **إلى** 1 **، وبين** 0 **و** 4 **، جميع القيم بين** 0 **و** 16 **لذلك ،** $f(A) = [0, 16]$.

We are looking for all the values taken by x^2 when x$\in [-1, 4]$. Between -1 and 0, all values are taken from 0 to -1, and between 0 and 4, all values are taken from 0 to 16. Therefore, $f(A) = [0, 16]$.

B) **لدينا** $x \in f^{-1}(A)$ **إذا وفقط إذا كانت** $x^2 \in [-1, 4]$ **بالطبع تم استبعاد القيم السالبة ، ولكي تكون** x^2 **في** $[0, 4]$ **، فمن الضروري والكافي أن** $x \in [-2, 2]$ **إذن لدينا** $f^{-1}(A) = [-2, 2]$.

We have $x \in f-1(A)$ if and only if $x^2 \in [-1, 4]$, of course, excluding negative values. To have x^2 in $[0, 4]$, it is necessary and sufficient for x to be in $[-2, 2]$. So, we have $f^{-1}(A) = [-2, 2]$.

2) **الصورة المباشرة لـ** $\mathbb{R}$ **اعتبارا من** $[0, 2\pi]$ **هي**$[-1, 1]$.

الصورة المباشرة لـ $[0, \pi/2]$**هي** $[0, 1]$.

لتحديد الصورة المقلوبة لـ $[0,1]$، نبحث عن الأعداد الحقيقية x مثل $\sin(x) \in [0,1]$. و منه، القيم الحقيقية التي يمكن كتابتها هي $u + k2\pi$ مع $u \in [0,\pi]$ و $k \in \mathbb{Z}$. بإمكاننا كتابة المجموعة

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

لا يوجد عدد حقيقي جبه في $[3,4]$ وبالتالي فإن الصورة العكسية لـ $[3,4]$ هي المجموعة الفارغة.

أخيرا، الصورة العكسية لـ $[1,2]$ مطابقة للصورة العكسية لـ $\{1\}$ ، وهي تساوي $\{\pi/2 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercise N°– 14 – تمرين رقم

لتكن f و g الدوال المعرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ المعرفة كما يلي $f(x) = 2x$ و

Let f and g be the functions defined from $\mathbb{N}$ towards $\mathbb{N}$ defined as follows $f(x) = 2x$ and

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{if } x \text{ an even number} \\ 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

Find $g \circ f$ and $f \circ g$.

أوجد $g \circ f$ و $f \circ g$.

هل الدوال f و g متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

Are the functions f and g Injectionts? surjections? bijections?

Solution : الحـــل

1) لنجد أولاً التركيب $g \circ f$ و $f \circ g$:

Let's first find the compositions $g \circ f$ and $f \circ g$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = x.$$

On the other hand:

من جهة أخرى:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(x/2) = x & \text{if } x \text{ an even number} \\ f(0) = 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

In particular, we have:

بصفة خاصة، لدينا:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

because لأن

$$f \circ g(1) = 0 \neq g \circ f(1) = 1.$$

2) الآن دعونا نحلل خصائص الدوال:

Now, let's analyze the properties of the functions:

For the function : من أجل الدالة:

$$f(x) = 2x$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه من أجل كل عددين طبيعيين مخلفين x_1 وx_2، يكون $f(x_1) = 2x_1$ و $f(x_2) = 2x_2$ مختلفين.

Injection: Yes, it's injective because for any two different natural numbers x_1 and x_2, $f(x_1) = 2x_1$ and $f(x_2) = 2x_2$ are different.

الغمور: إنها ليست غامرة لأن الأعداد الفردية ليس لها صور.

Surjection: No, it's not surjective because the odd numbers don't have images.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: No, it's not bijection because it's not surjective.

For the function : من أجل الدالة:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{if } x \text{ an even number} \\ 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لأن $g(3) = g(7) = 0$

Injection: No, it's not injective because it maps different even numbers to the same value (e.g., $g(3) = g(7) = 1$).

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنه يوجد على الأقل عنصر $(y = 1)$ في المجموعة $\mathbb{N}$ ليس لها سابقة في المجموعة $\mathbb{N}$ وهذا ما يعني أن g ليس غامرا.

Surjection: No, it's not surjective because there exists at least one element $(y = 1)$ in the domain $\mathbb{N}$ which is not the image of an element in the domain $\mathbb{N}$ under g, which means that g is not surjective.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة و ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: No, it's not a bijection because it's neither injective nor surjective.

من خلال ما سبق كلا الدالتين f و g ليسا تقابل.

From the above, both functions f and g are not bijective.

Exercise N°– 15 – تمرين رقم

هل الدوال التالية متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

Are the following functions Injectionts? surjections? bijections?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ \ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ \ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Solution : الحــل

لنحلل كل دالة على حدى:

Let's analyze each of the functions:

1) **الدالة:**

The function

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه لكل زوج من الأعداد الصحيحة (n, m) إذا كان $2n = 2m$ فإن $n = m$

Injection: This function is injective because for every distinct pair of integers (n, m) if $2n = 2m$, then $n = m$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f_1(n) = f_1(m) \Longrightarrow 2n = 2m \Longrightarrow n = m$$

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنها لا تغطي جميع الأعداد الصحيحة في المجال. على سبيل المثال، لا يوجد عدد صحيح n حيث $2n = 1$.

Surjection: This function is not surjective because it does not cover all integers in the domain. For example, there is no integer n such that $2n = 1$.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not surjective, it's not a bijection.

2) **الدالة:** The function

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n,$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه لكل زوج من الأعداد الصحيحة (n, m) **إذا كان** $-n = -m$ **فإن** $n = m$

Injection: This function is injective because for every distinct pair of integers (n, m) , if $-n = -m$, then $n = m$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f_2(n) = f_2(m) \Longrightarrow -n = -m \Longrightarrow n = m$$

الغمور: هذه الدالة غامرة لأنها تغطي جميع الأعداد الصحيحة في المجموعة $\mathbb{Z}$**. من أجل كل عدد صحيح** m **في** $\mathbb{Z}$**، يوجد عدد صحيح** n **حيث** $-n = -m$.

Surjection : This function is surjective because it covers all integers in the domain $\mathbb{Z}$. For any integer m in $\mathbb{Z}$, there exists an integer n such that $-n = -m$.

التقابل: نظرا لأنها متباينة و غامرة فهي تقابل.

Bijection: Since it's both injective and surjective, it is a bijection.

3) **الدالة:** The function

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لأنه و على سبيل المثال، $f_3(-2) = 4$ **و** $f_3(2) = 4$**، لذا فهي ليست متباينة.**

Injection : This function is not injective because for example, $f_3(-2) = 4$ and $f_3(2) = 4$, so it's not injective.

الغمور:هذه الدالة غامرة لأنها تغطي كافة الأعداد الحقيقية في المجموعة $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي y، يوجد عدد حقيقي x حيث $x^2 = y$.

Surjection : This function is surjective because it covers all real numbers in the domain $\mathbb{R}$. For any real number y, there exists a real number x such that $x^2 = y$.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not injective, it's not a bijection.

4) **الدالة:** The function

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2,$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لنفس السبب مثل f_3. ليكن x_1 وx_2 أعداد حقيقية حيث $x_1 = -x_2$. لهما نفس الصورة الموجبة لهذا هي ليست متباينة.

Injection : This function is not injective for the same reason as f_3. It maps distinct real numbers x_1 and x_2 to the same positive value if $x_1 = -x_2$. So, it's not injective.

الغمور: هذه الدالة غامرة لأنها تغطي كافة الأعداد الحقيقية في المجموعة $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي y، يوجد عدد حقيقي x حيث $x^2 = y$.

Surjection: This function is surjective because it covers all positive real numbers in the domain $\mathbb{R}_+$. For any positive real number y, there exists a real number x such that $x^2 = y$.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not injective, it's not a bijection.

5) **الدالة:** The function

$$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2,$$

Injection: This function is not injective because it maps distinct complex numbers z_1 and z_2 to the same value if $z_1 = z_2$. For example, $f_5(-2i) = -4$ and $f_5(2i) = -4$, so it's not injective.

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنها لا تغطي كافة الأعداد في المجموعة $\mathbb{C}$. على سبيل المثال، لا يمكن إيجاد سوابق للأعداد الحقيقية السالبة.

Surjection: This function is not surjective because it doesn't cover all complex numbers in the domain $\mathbb{C}$. For example, it cannot map to negative real numbers.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة وليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's neither injective nor surjective, it's not a bijection.

Exercise N°– 16 – تمرين رقم

Show that 5 divides $n^5 - n$.

بين أن 5 يقسم $n^5 - n$.

Solution : الحـــل

لنثبت أن العدد 5 يقسم $n^5 - n$ من أجل كل الأعداد الطبيعية n باستخدام الإستدلال بالتراجع، سنتبع الخطوات التالية :

To prove that 5 divides $n^5 - n$ for all natural numbers n using mathematical induction, we will follow these steps:

الحالة الأساسية: أولاً، سنتحقق مما إذا كان البيان صحيحاً للحالة الأساسية، والتي عادة ما تكون $n = 1$. بالنسبة لـ $n = 1$، لدينا:

Base Case: First, we'll check if the statement holds for the base case, which is typically $n = 1$. For $n = 1$, we have:

$$1^5 - 1 = 0.$$

نظرا لأن الصفر قابل للقسمة على أي عدد صحيح، بما في ذلك 5، فإن الحالة الأساسية صحيحة.

Since 0 is divisible by any integer, including 5, the base case is true.

الفرضية الاستقرائية: نفترض أن الخاصية التراجعية صحيحة من أجل العدد الطبيعي k، أي نفترض أن 5 تقسم $k^5 - k$.

Inductive Hypothesis: We assume that the statement is true for some positive integer k, i.e., we assume that 5 divides $k^5 - k$.

الخطوة الاستقرائية: علينا أن نثبت أن الخاصية صحيحة لـ $k+1$ استناداً إلى الافتراض الذي قمنا به في الفرضية الاستقرائية.

Inductive Step: We need to prove that the statement is true for $k+1$ based on the assumption made in the inductive hypothesis.

بدءا من الافتراض، لدينا $k^5 - k = 5m$ حيث m عدد صحيح.

Starting with the assumption, we have: $k^5 - k = 5m$, where m is an integer.

Now, we'll consider: **الآن، سننظر إلى :**

$$(k+1)^5 - (k+1):$$

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - (k+1) \\
&= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\
&= 5m + 5\left(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k\right) \\
&= 5 + \left(m + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k\right) \\
&= 5m', m' \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

إذاً، قد أثبتنا أن $(k+1)^5 - (k+1)$ قابل للقسمة على 5.

So, we've shown that $(k+1)^5 - (k+1)$ is divisible by 5.

بموجب مبدأ الاستدلال الرياضي، قد ثبتنا أنه بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n، ٥ يقسم $n^5 - n$.

By the principle of mathematical induction, we have established that for all natural numbers n, 5 divides $n^5 - n$.