Université Mohammed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option: Stat & Proba
2023/2024

Examen de rattrapage

Exercise 1 ***(/5pts)***: Soit f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = e^{-2x} + 2e^{-4x}$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de cette densité.
3. Vérifier que f est une combinaison linéaire de deux densités exponentielle.
4. Proposer un algorithme qui nous permet de générer d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire issue de f.

Exercise 2 ***(/5pts)***: Soit la fonction $f(x) = \sin(2x)$

1. Proposé un simulateur qui nous permet d'estimer la valeur de $I = \int_{\frac{-\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$
2. Proposé un simulateur qui nous permet d'estimer la valeur de la surface délimité par la courbe de f, l'axe des abscisse, la droite $x = \frac{-\pi}{12}$ et la droite $x = \frac{\pi}{8}$.

Exercise 3 ***(/10pts)***: Une particule se trouve à l'instant $t = 0$ au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). Figure explicative à chaque instant, elle fait un bond de +1 avec la probabilité p ($0 < p < 1$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant t_n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. Écrire une fonction Marche(a, N, p) qui simule cette marche aléatoire et qui:
   (a) retourne l' endroit où la particule sort du segment (0 ou N).
   (b) Le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête
2. On note p_a (respectivement p_N) la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0 (respectivement en N). Proposer une fonction qui fournit une estimation de p_a, p_N ainsi que le nombre de pas moyen nécessaire pour chacune des deux sorties.