Université Mohammed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option: Stat & Proba
2024/2025

Série d'exercices de TP

Exercice 1 *(Méthode d'inverse) :* En utilisant la méthode d'inverse

1. Écrire un programme MATLAB qui nous permet de générer un échantillon de taille n d'une loi uniforme sur $[a, b]$.
2. Générer un échantillon de taille n d'une loi uniforme sur $[a, b]$ et vérifier graphiquement (présentation de son histogramme) et numériquement (en calculant ses caractéristiques numériques: moyennes, variance,...) que le simulateur génère un échantillon de la loi souhaitée.
3. Revoir les points (1) et (2) dans le cas d'une loi exponentielle de paramètres λ.

Exercice 2 *(Méthode de rejet-acceptation) :* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centré réduite, de densité noté f.

1. Vérifier que
$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x+1}{2}}. \tag{1}$$
2. En exploitant l'inégalité (1), proposé un algorithme qui nous permet de générer un n-échantillon d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.
3. Implémenter l'algorithme précédent sous MATLAB et vérifier graphiquement que l'échantillon généré, par le simulateur conçu, est issu réellement d'une loi normale.

Exercice 3 *(Fiabilité d'un système électrique) :* Soit un système électrique bien déterminée, composée de trois types de composants. Supposons que nous nous intéressons à l'analyse statistique de la durée de vie du système.

Pour cela, soit X la variable aléatoire représentant la durée de vie du système global et X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie de chacun des composants. Les informations dont dispose sur les trois composants sont comme suit :

	composant 1	composant 2	composant 3
Nombre de composants (Nbr)	2	5	3
Loi de X_i	$N(\mu = 10, \sigma^2 = 3^2)$	$Exp(\lambda = 15)$	$wbl(\alpha = 10, \beta = 3)$

1. Donner la forme générale de la densité de X (sans développement) qu'on note f.
2. Implémenter sous MATLAB une fonction qui nous permette de générer un échantillon de taille n dont les paramètres d'entrer sont : Nbr, μ, σ, λ, α, β et la taille de l'échantillon n.
3. Générer un échantillon de taille n (utiliser différentes taille n) et visualiser graphiquement l'*estimateur à noyau* de la densité f (utiliser la fonction ***ksdensity***).
4. En exploitant le programme de simulation implémenté, donner une estimation ponctuelle et par intervalle de confiance de la durée moyenne de vie du système et sa variance.
5. Vérifier la normalité symptomatique de l'estimateur de la moyenne de X.

Exercice 4 *(Formule de Bayes)* Une grippe saisonnière est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous proposer son nouveau vaccin antigrippale dont : si une personne est malade, le test est positif à $1-\alpha = 0.99\%$. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à $\beta = 0.1\%$.

Sachant que ce qui nous intéresse, ce n'est pas vraiment les résultats présentés par le laboratoire, mais plutôt c'est l'efficacité du test c'est-à-dire "la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif", qu'on note $P(E)$.

1. Donner un schéma graphique décrivant toutes les éventualités du résultat du test du vaccin sur une personne.
2. Écrire un programme MATLAB qui permet de simuler le résultat d'un test de ce vaccin sur personne.
3. On introduisant les modifications nécessaires au programme conçu, donner une estimation pour $P(E)$.
4. Présenter graphiquement la variation de $P(E)$ en fonction de β et déduire la valeur maximale de β pour que le vaccin soit efficace au-delà de 20% ($P(E) \geq 0.2$).

Exercice 5 *(Méthode de rejet pour le calcul d'intégrales) :* Implémenter sous Matlab des fonctions qui nous permettent d'estimer ce qui suit.

1. $I = \int_a^b e^{-x^2} dx$ avec $a < b$.
2. $I = \int_a^b ln(sin(x) + cos(x))dx$ avec $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$.
3. la valeur de π.

Exercice 6 *(Processus Markovien et Marche aléatoire) :* Soit une particule qui se déplace d'une manière aléatoire sur une ligne d'une distance d'un centimètre (en avant +1 ou en arrière -1) chaque 2 secondes.

1. Donner un modèle mathématique (processus aléatoire) décrivant le phénomène ainsi que les probabilités de transition d'un état à un autre.
2. Donner un algorithme qui nous permet de simuler ce phénomène.
3. Si la particule est initialement au point x_0 et le déplacement $(+1$ ou $-1)$ se fait d'une manière équiprobable, alors :
   (a) Donner une estimation de la probabilité que la particule soit à l'état i, après 1 minute (et 10 minutes) de mouvement pour différentes point initiales $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3\}$.
   (b) Donner une estimation de la durée moyenne du premier retour de la particule à l'origine $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3\}$.
   (c) la position initiale de la particule a-t-elle une influence sur les probabilités de position de la particule et de la durée moyenne de la première visite de l'état initial ?
4. Revoir la question 3 dans le cas :
   (a) P(déplacer de $+1$)=0.6 et P(déplacer de -1)=0.4
   (b) P(déplacer de $+1$)= P (déplacer de -1)=0.4, et P (déplacer de 0)=0.2.

Exercice 7 *(Modèle de ruine) :* Considérons une compagnie d'assurance dont le fonctionnement de sa liquidité peut être décrit par le modèle de risque suivant :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

où : Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est le processus du nombre de réclamations des sinistrés et Z_i est le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistré avant la date t par conséquence la variable $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ représente le montant cumulé des réclamations à l'instant t. La constante u représente la réserve initiale. La prime est proportionnelle au temps (ct) où $c > 0$ est le taux de prime constant.

Supposons que le modèle (2) est construit selon les hypothèses suivantes :

- Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.
- Les montants des réclamations est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Weibull de paramètres α et β.
- La réserve initiale $u = 1000$ unités monétaires et la prime $c = 20$ unités monétaires.
- Afin d'éviter une ruine certaine, nous supposons que le chargement de sécurité relative $\theta = \frac{c - \lambda\, m}{\lambda\, m} > 0$ avec m le montant moyen des réclamations donné par : $m = \alpha \Gamma\left(1 + \beta^{-1}\right)$ (moyenne de la loi de Weibull).

A l'aide de la simulation, donner une estimation de la probabilité de ruine de cette compagnie à l'horizon $T \in \{100,\ 500,\ 1000,\ 5000\}$ toute en utilisant

1. Approche activité.
2. Approche événement.
3. Comparer vos résultats.

Université Mohamed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module : Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option : Proba & Stat
2024/2025

Enoncé du TP

Position du Problème :
Lors de l'estimation d'une moyenne d'un n-échantillon, trois estimateurs ont été proposés, à savoir :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{3}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{4}$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{X_{max} + X_{min}}{2}; \tag{5}$$

Nous souhaitons analyser la convergence de chacun des trois estimateurs toute en utilisant l'approche simulation.

Travail demandé :

1. Compléter le tableau ci-dessous pour

$$f \in \{Loi\ normale,\ Exponentielle, Uniforme,\ Poisson,\ Binominal\}.$$

2. Présenter graphiquement la variation du biais, Var et MSE en fonction de la taille de l'échantillon.
3. Vérifier graphiquement la convergence en loi (vers la loi normale) des trois estimateurs.
4. Que peut-on conclure ?

f	n	$\hat{\mu}_1$			$\hat{\mu}_2$			$\hat{\mu}_3$		
		$E(\hat{\mu}_1)$	$Var(\hat{\mu}_1)$	$MSE(\hat{\mu}_1)$	$E(\hat{\mu}_2)$	$Var(\hat{\mu}_2)$	$MSE(\hat{\mu}_2)$	$E(\hat{\mu}_3)$	$Var(\hat{\mu}_3)$	$MSE(\hat{\mu}_3)$
f_1	n_1									
	$\vdots$									
	n_k									
$\vdots$	$\vdots$									
f_5	n_1									
	$\vdots$									
	n_k									