Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2024/2025

Solutions des exercices 2 et 3 de la Série N°**2**

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. On suppose que la région de rejet du test

$$\begin{cases} H_0: & \theta \leq 1 \\ H_1: & \theta > 1 \end{cases}.$$

est $W = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \max_{1 \leq i \leq n} x_i \geq 0.9\right\}$. Déterminer la fonction puissance de ce test, puis déduire son niveau de signification.

* * * * * * * * * * * * * * * * **

Solution. La fonction de répartition de X est

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ \frac{x+\theta}{2\theta} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta \\ 1 & x > \theta \end{cases}$$

Nous avons $\mathbf{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x) = [F(x)]^n$. La fonction puissance est définie comme suit:

$$\pi(\theta) = \mathbf{P}_\theta(W) = \mathbf{P}(W \mid \theta \in \Theta) = \begin{cases} \alpha(\theta): & \theta \in \Theta_0 \\ 1 - \beta(\theta): & \theta \in \Theta_1 \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= \mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \geq 0.9\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i < 0.9\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq 0.9\right) \ (X \text{ continue}) \\ &= 1 - [F(0.9)]^n, \ \theta \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

ce qui égale à

$$1 - \begin{cases} 0^n & \text{si } 0.9 < -\theta \\ \left(\frac{0.9+\theta}{2\theta}\right)^n & \text{si } -\theta \leq 0.9 \leq \theta \\ 1^n & \text{si } 0.9 > \theta \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < 0.9 \\ 1 - \left(\frac{0.9+\theta}{2\theta}\right)^n & \theta \geq 0.9 \end{cases}$$

En conclusion la fonction puissance est

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < 0.9 \\ 1 - \left(\frac{0.9+\theta}{2\theta}\right)^n & \theta \geq 0.9 \end{cases}$$

Comme $\alpha(\theta) = \pi(\theta)$, $\theta \in \Phi_0 =]0, 1]$,donc

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < 0.9 \\ 1 - \left(\frac{0.9+\theta}{2\theta}\right)^n & 1 \geq \theta \geq 0.9 \end{cases}.$$

Par définition le niveau de signification est

$$\alpha_0 = \sup_{0<\theta\leq 1} \alpha(\theta) = \sup_{0.9\leq\theta\leq 1} \left\{1 - \left(\frac{0.9+\theta}{2\theta}\right)^n\right\}.$$

On peut vérifier facilement que la fonction $\theta \to 1 - \left(\frac{0.9+\theta}{2\theta}\right)^n$ est croissante, par conséquent

$$\alpha_0 = 1 - (0.95)^n.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Exercice 3. Sur la base d'un échantillon de taille $n = 9$, construire le test le plus puissant, au niveau $\alpha = 0.10$, sur la moyenne μ d'une variable aléatoire normale de variance $\sigma^2 = 2$:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = -1 \end{cases} .$$

Vérifier qu'il est sans biais.

****

Solution. Nous allons appliquer le Lemme de Neyman-Pearson. Le rapport de vraisemblance est

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod_{i=1}^{9} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2}} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - (-1)}{\sqrt{2}} \right)^2}{\prod_{i=1}^{9} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2}} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - 0}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{\exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{(x_i + 1)^2}{2}}{\exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{x_i^2}{2}},$$

ainsi

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp \left\{ -\frac{9}{2}\overline{x} - \frac{9}{4} \right\}.$$

Donc la région de rejet de H_0 (région critique) est

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_9) \in \mathbb{R}^9 : \exp \left\{ -\frac{9}{2}\overline{x} - \frac{9}{4} \right\} \geq k \right\},$$

où k est une constante telle que

$$\mathbf{P}_{\mu=0} \left(\exp \left\{ -\frac{9}{2}\overline{X} - \frac{9}{4} \right\} \geq k \right) = 0.1.$$

Celle-ci peut être réécrite comme suit

$$\mathbf{P}_{\mu=0} \left(\overline{X} \leq c \right) = 0.1,$$

où $c := -\frac{2}{9} \log k - \frac{1}{2}$. Sous H_0, nous avons $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 2/9)$, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mu=0} \left(\overline{X} \leq c \right) &= \mathbf{P}_{\mu=0} \left(\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{2/9}} \leq \frac{c - 0}{\sqrt{2/9}} \right) \\ &= \mathbf{P} \left(Z \leq \frac{c}{\sqrt{2/9}} \right) = 0.1, \text{ avec } Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{c}{\sqrt{2/9}} = \Phi^{-1}(0.1) = -\Phi^{-1}(1 - 0.1) = -\Phi^{-1}(0.90),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite et Φ^{-1} sa fonction inverse. De la table statistique nous avons $\Phi^{-1}(0.90) = 1.28$, ce qui donne $c/\sqrt{2/9} = -1.28$, ainsi $c = -\sqrt{2/9} \times (1.28) = -0.60$. Donc la forme bien déterminer de la région de rejet est

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_9) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \leq -0.60 \right\},$$

ainsi le test le plus puissant correspondant est

$$\delta(x_1, ..., x_9) = \begin{cases} 1 \text{ si } \overline{x} \leq -0.60 \\ 0 \text{ si } \overline{x} > -0.60 \end{cases}$$

Remarque: nous avons $c = -\frac{2}{9} \log k - \frac{1}{2}$ ceci équivalent à dire que $k = 0.63$, par conséquent

$$\begin{aligned} W &= \left\{ (x_1, ..., x_9) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \leq -0.60 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, ..., x_9) \in \mathbb{R}^9 : \exp \left\{ -\frac{9}{2}\overline{x} - \frac{9}{4} \right\} \geq 0.63 \right\}. \end{aligned}$$

Il vaut mieux alors de travailler avec l'événement ayant la forme la moins compliquée, c'est à dire

$$\left\{ (x_1, ..., x_9) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \leq -0.60 \right\}.$$

La puissance du test est
$$1-\beta=\mathbf{P}_{\mu=-1}\left(\overline{X}\leq -0.60\right).$$
Sous H_1, nous avons $\overline{X}\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(-1,2/9\right)$, donc
$$\begin{aligned}1-\beta&=\mathbf{P}_{\mu=-1}\left(\frac{\overline{X}-(-1)}{\sqrt{2/9}}\leq\frac{-0.60-(-1)}{\sqrt{2/9}}\right)\\&=\mathbf{P}\left(Z\leq 0.84\right).\end{aligned}$$
De la table statistique on tire $\mathbf{P}\left(Z\leq 0.84\right)=\Phi\left(0.84\right)=0.80$, donc la puissance du $1-\beta=0.80$. On remarque $0.80>\alpha=0.01$ donc le test δ est en effet sans biais. D'ailleurs, s'il n'est pas sans biais c'est qu'il y a une erreurs dans nos calculs. Car, comme on a déjà dit énoncé au cours, que le test le plus puissant basé sur le rapport de vraisemblance (pour les hypothèses simples) est théoriquement sans biais.