Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2024/2025

Série N°2 : **Construction de tests statistiques**

Exercice 1 *Soit* X *une variable aléatoire exponentielle de paramètre* $\theta > 0$. *On souhaite tester l'hpothèse nulle* $H_0 : \theta = 2$ *contre l'alternative* $H_1 : \theta = 1$ *sur la base d'une seule observation. Déterminer les deux risques associés à la région de rejet* $[1, \infty[$.

Exercice 2 *Soit* X *une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle* $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. *On suppose que la région de rejet du test*

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \leq 1 \\ H_1 : & \theta > 1 \end{cases}.$$

est $W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i \geq 0.9 \right\}$. *Déterminer la fonction puissance de ce test, puis déduire son niveau de signification.*

Exercice 3 *Sur la base d'un échantillon de taille* $n = 9$, *construire le test le plus puissant, au niveau* $\alpha = 0.10$, *sur la moyenne* μ *d'une variable aléatoire normale de variance* $\sigma^2 = 2$:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = -1 \end{cases}.$$

Vérifier qu'il est sans biais.

Exercice 4 *Soit* X *une population normale d'espérance inconnue* μ *et de variance* 4. *On prélève un échantillon de taille* 16 *pour réaliser le test*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases}.$$

1. *Construire le test uniformément le plus puissant au niveau* $\alpha = 0.05$.
2. *Déterminer sa fonction puissance, puis tracer son graphe.*
3. *Si* $\mu = 12$, *calculer le risque de deuxième espèce.*

Exercice 5 *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un échantillon, de taille* $n \geq 1$, *d'une population* X *normale centrée de variance* σ^2. *A partir d'un échantillon de taille* 10, *construire le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification* $\alpha = 0.05$, *des hypothèses*

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 \leq 1 \\ H_1 : & \sigma^2 > 1 \end{cases}.$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.

Exercice 6 *Dans une production il y a une proportion* p *d'articles défectueux. On prélève* 40 *articles pour réaliser le test*

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{cases},$$

au niveau de signification 0.01. *Déterminer le test optimal puis tracer le graphe de sa fonction puissance.*

Exercice 7 *On pélève un échantillon de taille* 64 *d'une population normale d'espérance inconnue* μ *et de variance* 1. *Déterminer le test unifomément le plus puissant, au niveau de signification* 0.10, *pour les hypoyhèses*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases}.$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.