جامعة محمد خيضر(بسكرة)
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

سنة أولى ماستر تسويق
السنة الجامعية 2024- 2025؛ السداسي الأول
مقياس الأساليب الكمية في التسويق 1

سلسلة التمارين رقم (2) محلولة: تحليل الصراع في السوق – نظرية الألعاب-

أسئلة نظرية:

1. ماهو مفهوم نظرية الألعاب؟
2. ماهو المقصود بمصفوفة الدفع، كيف تتشكل؟ أكتب الصيغة الرياضية لها.
3. ماهو الفرق بين اللعب مع الطبيعة واللعب بين شخصين طبيعيين أو معنويين؟
4. ماهو المقصود بقواعد السيطرة؟ وكيف يمكن اختزال مصفوفة الدفع.
5. ماهي أنواع حالات المنافسة؟ كيف تفسر العلاقات الرياضية التالية: $V_1= V_2$ ؛ $V_1\neq V_2$، $V_1+ V_2= 0$

التمرين الأول:

قام مدير التسويق لمؤسسة قائدة A بتحليل الصراع في السوق مع مؤسسة تابعة B، وقد استخلص مصفوفة الدفع التالية:

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	5	-5	4
x_2	7	2	3
x_3	4	-5	0

القائد Leader: هو من يمتلك أكبر حصة من المبيعات في السوق، يسعى للهيمنة على السوق أو الحفاظ على حصته السوقية.

المتحدي Challenger: يقع وراء القائد مباشرة من حيث حصة المبيعات، يتطلع لأخذ مكان القائد، من خلال الاستحواذ على حصة الضعفاء.

التابع Suiveur: يكون مربح بشكل عام لأنه ببساطة يتبع القائد، ولا يبتكر أبدا، بل يقلد ما ينجح فيه للقائد.

المطلوب: 1. اختزل مصفوفة الدفع باستعمال قواعد السيطرة.

2. ماهي طبيعة العلاقة بين قيمتي اللعبة V_1 وV_2 بالنسبة للمؤسستين A وB.

الحل:

1. اختزال مصفوفة الدفع باستعمال قواعد السيطرة:

اختزال الأسطر: المؤسسة (اللاعب) A

اللاعب A هو لاعب تعظيم العوائد (لاعب التكبير)، لذا فإن الإستراتيجية التي تحقق له عوائد أكبر من إستراتيجية أخرى مهما كانت إستراتيجية اللاعب B، تسمى إستراتيجية مسيطرة (لذا تبقى)، والإستراتيجية الأخرى تسمى إستراتيجية مستبعدة (لذا تحذف).

بما أن: $0 \geq 4$، و: $-5 \geq -5$، و: $4 \geq 5$، إذن الصف الأول (الإستراتيجية x_1) مسيطر، والسطر الثالث (الإستراتيجية x_3) مستبعد، ومنه يحذف السطر الثالث (الإستراتيجية x_3).

اختزال الأعمدة: المؤسسة (اللاعب) B

اللاعب B هو لاعب تقليل الخسائر (لاعب التصغير)، لذا فإن الإستراتيجية التي تحقق له خسائر أقل من إستراتيجية أخرى مهما كانت إستراتيجية اللاعب A، تسمى إستراتيجية مسيطرة (لذا تبقى)، والإستراتيجية الأخرى تسمى إستراتيجية مستبعدة (لذا تحذف).

بما أن: $3 \geq 2$، و: $4 \geq -5$، إذن العمود الثاني (الإستراتيجية y_2) مسيطر، والعمود الثالث (الإستراتيجية y_3) مستبعد، ومنه يحذف العمود الثالث (الإستراتيجية y_3).

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	5	-5	4
x_2	7	2	3
~~x_3~~	~~4~~	~~-5~~	~~0~~

وبناء عليه تصبح المصفوفة المختزلة كما يلي:

	y	المؤسسة B	
x		y_1	y_2
المؤسسة A	x_1	5	-5
	x_2	7	2

2. طبيعة العلاقة بين قيمتي اللعبة V_1 وV_2 :

	y	المؤسسة B		
x		y_1	y_2	$\min_j$
المؤسسة A	x_1	5	-5	-5
	x_2	7	2	2
	$\max_i$	7	2	

نتيجة اللعبة بالنسبة للاعب A (ربح) $V_1= \max_i \min_j(a_{ij})= 2$

نتيجة اللعبة بالنسبة للاعبب B (خسارة) $V_2= \min_j \max_i(a_{ij})=2$

إذن: $V_1 = V_2$، توجد نقطة سرج (التقاء أو تعادل)، وبالتالي توجد إستراتيجية مثلى وحيدة لكل لاعب (تسمى خالصة أو صافية لأنه يلعبها بشكل دائم)، وهي الإستراتيجية x_2 بالنسبة للاعب A، والإستراتيجية y_2 بالنسبة للاعب B. ونتيجة اللعبة هي $V= 2$ (ربح 2 للاعب A، وخسارة 2 للاعب B).

التمرين الثاني:

تطرح مؤسستان متنافستان في مجال الألبسة الجاهزة ثلاث أنواع من الألبسة النسائية: بيضاء، سوداء وحمراء، تعطى نتائج تحليل الصراع بينهما عبر مصفوفة الدفع التالية:

الشركة الثانية (اللاعب الثانى)

الشركة الأولى (اللاعب الأول)	البيضاء y_3	الحمراء y_2	السوداء y_1
x_1 / السوداء	2	0	-3
x_2/ البيضاء	-2	10	5
x_3/ الحمراء	-4	8	5

المطلوب: 1. اختزال مصفوفة الدفع إلى أصغر حجم ممكن.

2. حل المشكلة بالطريقة الجبرية. بين عدد مرات المنافسة لكل منهما كي تكون النتيجة أفضل ما يمكن.

الحل:

1. اختزال مصفوفة الدفع: بتطبيق قواعد السيطرة نجد:

بالنسبة للأسطر نلاحظ أن: $5 \geq 5$، $8 \geq 10$، $-4 \geq -2$، إذن الإستراتيجية x_2 تسيطر على الإستراتيجية x_3، ومنه نحذف الإستراتيجية x_3، لأن الإستراتجية x_3 تحقق للشركة A عائد أقل من عائد الإستراتيجية x_2، وهذا مهما كانت إستراتيجية الشركة B.

بالنسبة للأعمدة نلاحظ أن: $0 \leq -3$، $10 \geq 5$، إذن الإستراتيجية y_1 تسيطر على الإستراتيجية y_2، ومنه نحذف الإستراتيجية y_2

الشركة الثانية(اللاعب الثانى)

الشركة الأولى(اللاعب الأول)	البيضاء y_3	الحمراء y_2	السوداء y_1
x_1 / السوداء	2	0	-3
x_2/ البيضاء	-2	10	5
x_3/ الحمراء	-4	8	5

ومنه تصبح مصفوفة الدفع:

الشركة الأولى		الشركة الثانية: السوداء y_1	الشركة الثانية: البيضاء y_3	Min_j
	السوداء / x_1	-3	2	**-3**
	البيضاء /x_2	5	-2	**-2**
	max_i	**5**	**2**	

$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= -2.$

$V_2= Min_j\ max_i\ (a_{ij})= 2.$

نلاحظ أن $V_2+V_1=0$، أو: $V_2 = - V_1$، ومنه لا توجد نقطة سرج (لا توجد إستراتيجية مثلى صافية لكل شركة، لأن الشركة الأولى تخسر 2، والشركة الثانية تخسر 2، مع أن اللعبة ذات مجموع صفري، لذا الأفضل لكل منها البحث عن إستراتيجية مختلطة من الإستراتيجيتين المتبقيتين باحتمالات معينة.

2. البحث عن الإستراتيجيات المختلطة لكل شركة:

الشركة الأولى:

نفرض أن p احتمال تطبيق الإستراتيجية x_1، ومنه: (1- p) احتمال تطبيق الإستراتيجية x_2:

العائد المتوقع أن تحققه الشركة الأولى، إذا استخدمت الشركة الثانية الإستراتيجية y_1:

$-3p +5(1- p)= -3p +5 -5p= 5- 8p$

العائد المتوقع أن تحققه الشركة الأولى، استخدمت الشركة الثانية الإستراتيجية y_3:

$2p -2(1- p) = 2p -2 +2p = -2 + 4p.$

أعلى عائد يمكن أن تحققه الشركة الأولى عندما يكون: $4p +2- =8p -5$، ومنه بحل المعادلة نجد: $p= 7/12$، ومنه: $1- p= 5/12$.

ومنه نتيجة المنافسة بالنسبة للشركة الأولى، في حالة اختيار الشركة الثانية الإستراتيجية y_1:

$V(A/y_1)= -3(7/12) + 5(5/12) = 4/12= 1/3.$

ونتيجة المنافسة بالنسبة للشركة الأولى، في حالة اختيار الشركة الثانية للإستراتيجية y_3:

$V(A/y_3)= 2(7/12) -2(5/12) = 4/12= 1/3.$

نلاحظ أن نتيجة الإستراتيجية المختلطة ربح (1/3)، هي أفضل من نتيجة الإستراتيجية الصافية x_2 التي تحقق خسارة (-2).

إذن عند اللعب 12 مرة مثلا، فإن الشركة الأولى تستخدم الإستراتيجية x_1: 7 مرات، وتستخدم الإستراتيجية الثانية x_2: 5 مرات، وبعبارة أخرى، تستخدم الإستراتيجية x_1 لـ 58.33 % من الوقت، وتستخدم الإستراتيجية x_2 لـ 41.66 % من الوقت، مما يمكنها من تحقيق نتيجة أفضل(عائد 1/3).

الشركة الثانية:

نفرض أن q احتمال تطبيق الإستراتيجية y_1، (1-q) احتمال تطبيق الإستراتيجية y_3:

الخسارة المتوقع أن تحققها الشركة الثانية، إذا استخدمت الشركة الأولى الإستراتيجية x_1:

$-3q +2(1 – q)= -3q + 2 –q= 2- 5q$

الخسارة المتوقع أن تحققها الشركة الثانية، إذا استخدمت الشركة الأولى الإستراتيجية x_2 :

$5q -2(1 – q)= 5q -2 +2q= -2 +7q$

أقل خسارة يمكن أن تتعرض لها الشركة الثانية عندما: $7q +2- =5q -2$، ومنه بحل المعادلة نجد: $q= 4/12= 1/3$، ومنه: $q= 2/3 -1.$

ومنه نتيجة المنافسة بالنسبة للشركة الثانية، في حالة اختيار الشركة الأولى للإستراتيجية x_1:

$V(B/x_1)= -3(1/3) +2(2/3) = 1/3$

ونتيجة المنافسة بالنسبة للشركة الثانية، في حالة اختيار الشركة الأولى للإستراتيجية x_2:

$V(B/x_1)= -3(1/3) +2(2/3) = 1/3$

نلاحظ أن نتيجة الإستراتيجية المختلطة خسارة (1/3)، هي أفضل من نتيجة الإستراتيجية الصافية y_3 التي تحقق خسارة (2).

إذن عند اللعب 6 مرات مثلا، فإن الشركة الثانية تستخدم الإستراتيجية y_1: مرتين، وتستخدم الإستراتيجية الثالثة y_3: 4 مرات، وبعبارة أخرى، تستخدم الإستراتيجية y_1 لـ 33.33 % من الوقت، وتستخدم الإستراتيجية y_3 لـ 66.66 % من الوقت، مما يمكنها من تحقيق خسارة أقل (1/3).

التمرين الثالث:

تعطى مصفوفة الدفع التالية بالنسبة للاعب A:

		اللاعب الثاني B	
		y_1	y_2
اللاعب الأول A	x_1	6	5
	x_2	20	23
	x_3	15	11

المطلوب: باستخدام قواعد السيطرة، حلل هذه اللعبة.

الحل:

اللاعب A:

اللاعب A هو لاعب تعظيم العوائد (لاعب التكبير)، لذا فإن الإستراتيجية التي تحقق له عوائد أكبر من إستراتيجية أخرى مهما كانت إستراتيجية اللاعب B، تسمى إستراتيجية مسيطرة(لذا تبقى)، والإستراتيجية الأخرى تسمى إستراتيجية مستبعدة (لذا تحذف).

بما أن: 6 ≥20، و: 5 ≥23، إذن الصف الثاني(الإستراتيجية x_2) مسيطر، والصف الأول (الإستراتيجية x_1) مستبعد، ومنه يحذف السطر الأول (الإستراتيجية x_1).

بما أن: 15 ≥20، و: 11 ≥23، إذن الصف الثالث (الإستراتيجية x_3) مسيطر، والصف الثاني (الإستراتيجية x_2) مستبعد، ومنه يحذف السطر الثالث (الإستراتيجية x_3).

إذن تبقى في مصفوفة الدفع إستراتيجية واحدة للاعب A، وهي الإستراتيجية x_2.

اللاعب B:

اللاعب B هو لاعب تقليل الخسائر (لاعب التصغير)، لذا فإن الإستراتيجية التي تحقق له خسائر أقل من إستراتيجية أخرى مهما كانت إستراتيجية اللاعب A، تسمى إستراتيجية مسيطرة(لذا تبقى)، والإستراتيجية الأخرى تسمى إستراتيجية مستبعدة (لذا تحذف).

بما أن: 23 ≤20، إذن العمود الثاني (الإستراتيجية y_2) مسيطر، والعمود الأول (الإستراتيجية y_1) مستبعد، ومنه يحذف العمود الثاني(الإستراتيجية y_2).

وبالتالي لا يبقى إلا إستراتيجية واحدة للاعب A، وهي x_2 ، وإستراتيجية واحدة للاعب B، وهي y_1، ونتيجة اللعبة 20(ربح للاعب A وخسارة للاعب B)

		اللاعب الثاني B	
		y_1	y_2
اللاعب الأول A	x_1	6	5
	x_2	**20**	23
	x_3	15	11

التمرين الرابع:

تعطى مصفوفة الدفع التالية:

		اللاعب الثانى B	
		y_1	y_2
اللاعب الأول A	x_1	4	2
	x_2	0	10

المطلوب: باستخدام الإستراتيجية المختلطة، حلل هذه اللعبة.

الحل:

$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= 2.$

$V_2= Min_j\ max_i\ (a_{ij})= 4.$

نلاحظ أن $V_1 \neq V_2$، ومنه لا توجد نقطة سرج(لا توجد إستراتيجية مثلى صافية لكل شركة، لذا الأفضل لكل منها البحث عن إستراتيجية مختلطة من الإستراتيجيتين المطلقتين باحتمالات معينة.

		اللاعب الثانى B		
		y_1	y_2	min_j
اللاعب الأول A	x_1	4	2	**2**
	x_2	0	10	**0**
	max_i	**4**	**10**	

اللاعب الأول:

نفرض أن p احتمال تطبيق الإستراتيجية x_1، و: (1- p) احتمال تطبيق الإستراتيجية x_2:

ومنه: $4p +0(1- p) = 2p + 10(1- p)$، بحل هذه المعادلة نجد: 5/6 =10/12 =p، ومنه: 1/6 =1-p.

نتيجة المباراة بالنسبة للاعب الأول:

$V(A/y_1)= 4(5/6) + 0(1/6)= 10/3 \approx 3\ ,33$

$V(A/y_2) = 2(5/6) + 10(1/6)= 10/3 \approx 3,33$

إذن: إذا لعب اللعب الأول 5 مرات الإستراتيجية الأولى x_1، ومرة واحدة الإستراتيجية الثانية x_2، فإنه يحقق عائد (ربح) 3 ,33، وهو أكبر مما إذا استخدم الإستراتيجية الصافية x_1 طول الوقت، التي تحقق له فقط عائد 2.

اللاعب الثاني:

نفرض أن q احتمال تطبيق y_1، و: 1- q احتمال تطبيق الإستراتيجية y_2:

ومنه: $4q +2(1-q)= 0q + 10(1-q)$، بحل هذه المعادلة نجد: 2/3 =8/12 =q، ومنه: 1/3 =1-q.

نتيجة المباراة بالنسبة للاعب الثاني:

$V(B/x_1)= 4(2/3) + 2(1/3)= 10/3 \approx 3\ ,33$

$V(B/x_2) = 0(2/3) + 10(1/3)= 10/3 \approx 3,33$

إذن: إذا لعب اللعب الثاني مرتين الإستراتيجية الأولى y_1، ومرة واحدة الإستراتيجية الثانية y_2، فإنه يحقق خسارة 3 ,33، وهي أقل مما إذا استخدم الإستراتيجية الصافية y_1 طول الوقت، التي تحقق له أكبر 4.

إذن: نتيجة الإستراتيجية المختلطة أفضل للاعبين من الإستراتيجية الصافية التي تعطيها قاعدتي Maximin وMinimax.

التمرين الخامس:

تعطى مصفوفة الدفع (2×2) التالية:

		اللاعب الثانى B	
		y_1	y_2
اللاعب الأول A	x_1	10	6
	x_2	-12	2

المطلوب: حدد نتيجة هذه اللعبة.

الحل:

اختبار وجود نقطة سرج(استراتيجيات صافية) بتطبيق القاعدة: $\text{Max}_i \min_j(a_{ij}) = \text{Min}_j \max_i(a_{ij})$

$V_1 = \text{Max}_i \min_j(a_{ij}) = 6$; $V_2 = \text{Min}_j \max_i(a_{ij}) = 6$

بما أن: $V_1 = V_2$؛ توجد نقطة سرج، ونتيجة اللعبة $V = 6$(ربح للاعب الأول A تساوي 6، وخسارة للاعب الثاني B تساوي 6، أي أنه توجد حالة مثلى، هي أن يلعب A إستراتيجية وحيدة صافية بشكل دائم هي x_1، محققا ربح 6، ويلعب B إستراتيجية وحيدة صافية بشكل دائم هي y_2، محققا خسارة 6.

		اللاعب الثاني B		
		y_1	y_2	$\min_j$
اللاعب الأول A	x_1	10	6	**6**
	x_2	-12	2	**-12**
	$\max_i$	**10**	**6**	

التمرين السادس:

تعطى مصفوفة الدفع التالية:

		اللاعب الثاني B	
		y_1	y_2
اللاعب الأول A	x_1	8	4
	x_2	2	20

المطلوب: حدد الإستراتيجية المثلى في الجدول التالي باستخدام الطريقة المختلطة.

الحل:

اختبار وجود نقطة سرج (استراتيجيات صافية):

$V_1 = \text{Max}_i \min_j(a_{ij}) = 4$; $V_2 = \text{Min}_j \max_i(a_{ij}) = 8$

بما أن: $V_1 \neq V_2$؛ فإنه لا توجد نقطة سرج، وعلى كل لاعب أن يلعب إستراتيجيه مختلطة(مزيج من الإستراتيجيتين)، حتى يحقق نتيجة مثلى، سواء للاعب الأول(تعظيم العائد) أو اللاعب الثاني (تقليل الخسارة)، وكل إستراتيجية تكون باحتمال معين(يترجم بفترة من الزمن أو عدد من المرات).

		اللاعب الثاني B		
		y_1	y_2	$\min_j$
اللاعب الأول A	x_1	8	4	**4**
	x_2	2	20	**2**
	$\max_i$	**8**	**20**	

نفرض أن A يستخدم الإستراتيجية x_1 باحتمال p، والإستراتيجية x_2 باحتمال $(1 - p)$، ومنه:

$8p + 2(1- p) = 8p + 2 - 2p = 6p + 2$

$4p + 20(1 - p) = 4p + 20 - 20p = 20 - 16p$

حتى يتمكن A من تعظيم العائد، يجب أن يتحقق: $6p + 2 = 20 - 16p$، وبحل هذه المعادلة نجد أن: $p = 9/11$، ومنه: $1-p = 2/11$

نتيجة اللعبة إذا لعب A استراتيجيات مختلطة هي:

$V(A/y_1) = 8(9/11) + 2(2/11) = 76/11 \approx 6,91$

$V(A/y_2) = 4(9/11) + 20(2/11) = 76/11 \approx 6,91$

نلاحظ أن نتيجة اللعبة بالنسبة للاعب الأول A، في حالة الإستراتيجية المختلطة، هي ربح 6.91، وهو أكبر نتيجة استخدامه لإستراتيجية خالصة وحيدة x_1، التي تحقق له فقط ربح 4 بطريقة Maximin.

نفرض أن اللاعب B يستخدم الإستراتيجية y_1 باحتمال q، والإستراتيجية y_2 باحتمال (1 –q)، ومنه:

$8q + 4(1 – q) = 8q + 4 -4q = 4q +4.$

$2q + 20(1 – q) = 2q + 20 – 20q = 20 – 18q.$

حتى يتمكن B من تقليل الخسارة، يجب أن يتحقق: $4q + 4 = 20 – 18q$، وبحل هذه المعادلة نجد أن: $p= 8/11$،

ومنه: $1 – q= 3/11$

نتيجة اللعبة إذا لعب B استراتيجيات مختلطة هي:

$V(B/x_1)= 8(8/11) + 4(3/11) = 76/11\approx 6,91$

$V(B/x_2)= 2(8/11) + 20(3/11) = 76/11\approx 6,91$

نلاحظ أن نتيجة اللعبة بالنسبة للاعب الثاني B، في حالة الإستراتيجية المختلطة، هي خسارة 6.91، وهي أقل نتيجة استخدامه لإستراتيجية خالصة وحيدة y_1، التي تحقق له خسارة 8 بطريقة Minimax.

نتيجة اللعبة في حالة الاستراتيجيات المختلطة هي 6.71 كربح للاعب الأول وخسارة للاعب الثاني.

إذا تنافس اللاعبان 11 مرة، فإن اللاعب الأول يستخدم الإستراتيجية x_1 لـ 9 مرات، والإستراتيجية x_2 لمرتين، حتى يحقق ربح أمثل 6.91، أما اللاعب الثاني فيستخدم الإستراتيجية الأولى y_1 لـ 8 مرات، والإستراتيجية y_2 لـ 3 مرات، حتى يحقق خسارة دني 6.91.

ملاحظة:

نتيجة الإستراتيجية المختلطة لكلا اللاعبين تقع دائما بين نتيجتي طريقة أقصى الأدنى وأدنى الأقصى، مما يجعلها أفضل لكل اللاعبين(أعلى ربحا للاعب التكبير، وأقل خسارة للاعب التصغير.

التمرين السابع:

تعطى مصفوفة الدفع من الدرجة (3 ×3) ذات المجموع الصفري التالية:

		اللاعب B		
		B_1	**B_2**	**B_3**
	A_1	-15	-10	30
اللاعب A	**A_2**	10	5	15
	A_3	25	-10	-20

المطلوب: هل توجد إستراتيجية مثلى صافية لكل لاعب؟

الحل:

اختبار وجود نقطة سرج(استراتيجيات صافية) بتطبيق القاعدة: $Max_i\ min_j(a_{ij})= Min_j\ max_i(a_{ij})$

		اللاعب B			
		B_1	**B_2**	**B_3**	**min_j**
	A_1	-15	-10	30	**-15**
اللاعب A	**A_2**	10	5	15	**5**
	A_3	25	-10	-20	**-20**
	Max_i	**25**	**5**	**30**	

$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= 5$;

$V_2= Min_j\ max_i(a_{ij})= 5$

بما أن: $V_1=V_2$؛ توجد نقطة سرج، ونتيجة اللعبة $V= 5$ (ربح للاعب الأول A تساوي 5، وخسارة للاعب الثاني B تساوي 5، أي أنه توجد حالة مثلى، هي أن يلعب A إستراتيجية وحيدة صافية بشكل دائم هي A_2، محققا ربح 6، ويلعب B إستراتيجية وحيدة صافية بشكل دائم هي B_2، محققا خسارة 6. وتكون نتيجة اللعبة 5 (ربح للاعب الأول وخسارة للاعب الثاني).

التمرين الثامن:

قارب العقد بين إدارة شركة النورس وأحد الموزعين المعتمدين لديها على الانتهاء، مما تطلب التفاوض على عقد جديد، وقد بدأ كل طرف يعد الإستراتيجية التي سيتبعها في التفاوض، الإستراتيجيات المحتملة هي: العدائية والتشدد، الإقناع، الحلول القانونية، الحلول الوسط. وكانت مصفوفة الدفع لشركة النورس (وهي مصفوفة الخسائر للموزع) كما يلي:

الشركة A \ الموزع B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	15	12	35
A_2	25	14	8	10
A_3	40	2	19	5
A_4	-5	4	11	0

المطلوب: ماهي الإستراتيجية التي يجب أن يتبعها كل طرف؟

الحل:

1. البحث عن نقطة السرج(الإستراتيجيات الصافية) بتطبيق قاعدة: Maximin = Minimax

$V_1= \text{Max}_i \ \text{min}_j(a_{ij})= 12$

$V_2= \text{Min}_j \ \text{max}_i(a_{ij})= 15$

بما أن: $V_1 \neq V_2$؛ إذن لا توجد نقطة سرج، أي لا توجد إستراتيجية واحدة صافية لكل طرف، يستخدمها طول الوقت بنسبة 100%، بل يستخدم كل طرف (شركة النورس والموزع) مزيج من الإستراتيجيات المتاحة لديه أثناء التفاوض، حسب الظروف.

الشركة A \ الموزع B	B_1	B_2	B_3	B_4	min_j
A_1	20	15	12	35	**12**
A_2	25	14	8	10	**8**
A_3	40	2	19	5	**2**
A_4	-5	4	11	0	**-5**
max_i	**40**	**15**	**19**	**35**	

2. اختزال مصفوفة الدفع باستخدام قواعد السيطرة:

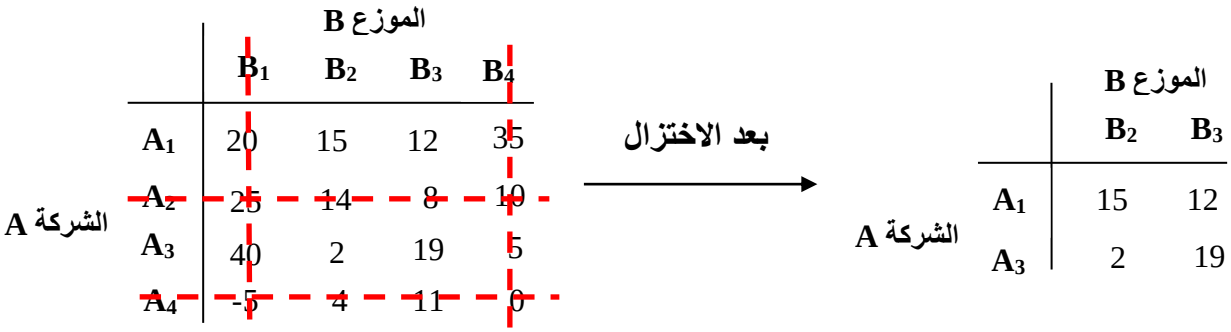
بما أن: $-5 \leq 20$، $4 \leq 15$، $11 \geq 12$، $0 \leq 35$، فإن الإستراتيجية A_1 تسيطر على الإستراتيجية A_4، لذا نحذف الإستراتيجية A_4.

بما أن: $20 \geq 15$، $25 \geq 14$، $40 \geq 2$، فهذا يعني أن الإستراتيجية B_2 تسيطر على الإستراتيجية B_1، كذلك نلاحظ أن: $20 \geq 12$، $25 \geq 8$، $40 \geq 19$، فذا يعني أن الإستراتيجية B_3 تسيطر على الإستراتيجية B_1، إذن نحذف الإستراتيجية B_1.

وبما أن: $14 \geq 15$، $8 \geq 12$، $10 \leq 35$، فإن الإستراتيجية A_1 تسيطر على الإستراتيجية A_2، إذن نحذف الإستراتيجية A_2،

وبما أن: $35 \geq 15$، $19 \geq 2$، فإن الإستراتيجية B_2 تسيطر على الإستراتيجية B_4، إذن نحذف الإستراتيجية B_4.

بعد اختزال الصفوف والأعمدة، نحصل على مصفوفة الدفع المختزلة التالية:



إذا استخدمت شركة النورس A كل إستراتيجية ممكنة لديها لنصف الوقت، فإن

في حالة استخدام الموزع الإستراتيجية B_2(الإقناع) $V(A/B_2)= 15(1/2) + 2(1/2) = 8,5$

في حالة استخدام الموزع الإستراتيجية B_3(الإقناع) $V(A/B_3)= 12(1/2) + 19(1/2) = 15,5$

نلاحظ أن ربح الشركة A يختلف باختلاف الإستراتيجية التي يستخدمها الموزع B، كما أنه قد يكون أصغر أو أكبر من الربح وفق قاعدة Maximin (الذي يساوي 12).

إذا استخدم الموزع B كل إستراتيجية ممكنة لديه لنصف الوقت، فإن:

في حالة استخدام الشركة الإستراتيجية A_1 (التشدد) $V(B/A_1)= 15(1/2) + 12(1/2) = 13,5$

في حالة استخدام الموزع الإستراتيجية A_3(القانون) $V(B/A_3)= 2(1/2) + 19(1/2) = 10,5$

نلاحظ أن خسارة الموزع B يختلف باختلاف الإستراتيجية التي تستخدمها الشركة A، كما أنها أصغر دائما من الخسارة وفق قاعدة Minimax (التي تساوي 15).

لذا يجب على كل طرف البحث الاحتمالات التي تجعل المنفعة المتوقعة من وجهة نظره مستقلة عن الإستراتيجيات التي يستخدمها الخصم، أي يبحث عن مزيج واحد أفضل من الإستراتيجيات المتاحة لديه مهما كانت إستراتيجية الخصم.

الإستراتيجية المختلطة للشركة A:

نفرض أن الشركة تستخدم الإستراتيجية A_1 باحتمال p، والإستراتيجية A_3 باحتمال (1 – p)، أي ستستخدم A_1 لفترة من الزمن ثم تنتقل للإستراتيجية A_3.

إذا استخدم الموزع الإستراتيجية B_2، تحقق الشركة ربح: $15p + 2(1-p)= 2 + 13p$

إذا استخدم الموزع الإستراتيجية B_3، تحقق الشركة ربح: $12p + 19(1-p)= 19 - 7p$

وعند المساواة بين نتيجتين نجد: $19- 7p= 13p +2$، وبحل المعادلة نجد:

$p= 17/20= 85\%$، و: $1-p= 3/20= 15\%$

أي أنه على الشركة استخدام الإستراتيجية A_1 لـ 85 % من الوقت، والإستراتيجية A_3 لـ 15% من الوقت، وهو ما يمكنها من تحقيق ربح:

$V(A/B_2)= 15(0.85)+2(0.15)= 13,05$

$V(A/B_3)= 12(0.85)+19(0.15)= 13,05$

هذه النتيجة (ربح 13.05) عند تطبيق إستراتيجية مختلطة هي أفضل من حالة تطبيق إستراتيجية واحدة A_1 (ربح 12 فقط وفق Maximin)

الإستراتيجية المختلطة للموزع B :

نفرض أن الموزع يستخدم الإستراتيجية B_2 باحتمال q، والإستراتيجية B_3 باحتمال (1 – q)، أي ستستخدم B_2 لفترة من الزمن ثم تنتقل للإستراتيجية B_3.

إذا استخدمت الشركة الإستراتيجية A_1، يتعرض الموزع لخسارة: $15q + 12(1-q)= 12 + 3p$
إذا استخدمت الشركة الإستراتيجية A_3، يتعرض الموزع لخسارة: $2q + 19(1-q)= 19 - 17p$

وعند المساواة بين نتيجتين نجد: $12+ 3p= 19- 17p$، وبحل المعادلة نجد:

$q= 7/20= 35\%$، و: $1-p= 13/20= 65\%$

أي أنه على الموزع استخدام الإستراتيجية B_2 لـ 35 % من الوقت، والإستراتيجية B_3 لـ 65% من الوقت، وهو ما يمكنها من التعرض لخسارة أو تكلفة:

$V(B/A_1)= 15(0.35)+12(0.65)= 13,05$
$V(B/A_3)= 2(0.35)+19(0.65)= 13,05$

هذه النتيجة (خسارة 13.05) عند تطبيق إستراتيجية مختلطة هي أفضل بالنسبة للموزع من حالة تطبيق إستراتيجية واحدة B_2 (خسارة 15 وفق Minimax).

إذن الإستراتيجية المختلطة تسمح بزيادة الربح الأدنى إلى أقصى حد للشركة، وتخفيض التكلفة القصوى إلى أدنى حد ممكن للموزع، والتالي فهي أفضل لكليهما.

ملاحظة:

الربح أو الخسارة المتوقعة (13.05) تقع بين الحد الأدنى لربح الشركة(12)، والحد الأقصى لخسارة الموزع (15).

التمرين التاسع: حالة نقطتي سرج

تعطى مصفوفة الدفع التالية للاعبين A (لاعب التكبير) وB (لاعب التصغير):

		B		
		B_1	B_2	B_3
A	A_1	-2	15	-2
	A_2	-5	-6	-4
	A_3	-5	20	-8

المطلوب: بين أنه توجد نقطتي سرج كحل للعبة.

الحل:

$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= -2$;
$V_2= Min_j\ max_i(a_{ij})= -2$

بما أن: $V_1=V_2$؛ ونتيجة اللعبة V= -2 (خسارة للاعب الأول Aتساوي -2، وربح للاعب الثاني B تساوي +2، أي أنه توجد حالة مثلى، هي أن يلعب A إستراتيجية وحيدة صافية بشكل دائم هي A_1، محققا خسارة -2، لكن B يمكنه أن يلعب إحدى إستراتيجيتين (B_1 أو B_3) بشكل دائم، محققا ربح 2.

إذن توجد نقطتي سرج (A_1 , B_1) و(A_1 , B_3) يحققان نفس النتيجة -2.

		اللاعب B			
		B_1	B_2	B_3	min_j
اللاعب A	A_1	-2	15	-2	**-2**
	A_2	-5	-6	-4	**-5**
	A_3	-5	20	-8	**-8**
	Max_i	**-2**	**20**	**-2**	

التمرين العاشر: لعبة مجموع ذات غير صفري

مؤسستان متنافسان في السوق أمامهما قرار القيام بحملة إعلان أو عدم القيام بها، يظهر الجدول التالي العائد لهذا القرار لكل مؤسسة:

مؤسسة B / مؤسسة A	عدم الإعلان	الإعلان
عدم الإعلان	(2 , 2)	(-15 , 5)
الإعلان	(5 , -15)	(-10 , -10)

المطلوب: ماهو القرار الأمثل لكل مؤسسة؟

الحل:

تشير الأعداد داخل الجدول إلى العائد لكل زوج من القرارات للمؤسستين، فمثلا لو أن المؤسسة A قامت بالإعلان، والمؤسسة B لم تقم بالإعلان، فإن المؤسسة A تحقق عائد + 5 (ربح)، والمؤسسة B تحقق عائد (خسارة) -15.

1. طريقة الاستراتيجيات المهيمنة

مؤسسة B / مؤسسة A	عدم الإعلان	الإعلان
عدم الإعلان	(2 , 2)	(-15 , 5)
الإعلان	(5 , -15)	(-10 , -10)

بالنسبة للمؤسسة A: نلاحظ أن: 2 ≥5 و: 15- ≥10-، ومنه استراتيجية الإعلان مهيمنة على استراتيجية عدم الإعلان مهما كانت استراتيجية المؤسسة B، إذن لا يمكن أن تستخدم المؤسسة A استراتيجية عدم الإعلان ⟸ حذف استراتيجة عدم الإعلان من الأسطر.

بالنسبة للمؤسسة B: نلاحظ أن: 2 ≥5 و: 15- ≥10-، ومنه استراتيجية الإعلان مهيمنة على استراتيجية عدم الإعلان مهما كانت استراتيجية المؤسسة A، إذن لا يمكن أن تستخدم المؤسسة B استراتيجية عدم الإعلان ⟸ حذف استراتيجة عدم الإعلان من الأعمدة.

لا يبقى في المصفوفة إلا خانة واحدة، هي خانة استراتيجيتي الإعلان بالنسبة لكلا المؤسستين، مع تحمل خسارة تساوي (-10) لكليهما.

2. طريقة توازن ناش Nash Equilibrium:

توازن ناش في نظرية اللعبة هو موقف يستمر فيه اللاعب في الاستراتيجية التي اختارها، دون وجود أي حافز للانحراف عنها، بعد الأخذ في الاعتبار استراتيجية الخصم.

مؤسسة B / مؤسسة A	عدم الإعلان	الإعلان
عدم الإعلان	(2 , 2)	○ (-15 , 5)
الإعلان	● (5 , -15)	● ○ (-10 , -10)

إذا اختارت A عدم الإعلان، فإن B ستختار الإعلان.
إذا اختارت A الإعلان، فإن B ستختار الإعلان.
إذا اختارت B عدم الإعلان، فإن B ستختار الإعلان.
إذا اختارت B الإعلان، فإن A ستختار الإعلان.

التقاطع يكون عند (الإعلان ، الإعلان)، يعني أن كل مؤسسة ستختار الإعلان بغض النظر عن الاستراتيجية المستخدمة من طرف المؤسسة الأخرى، وهو ما يسمى **حالة توازن ناش**، ويماثل نتيجة طريقة الاستراتيجيات المهيمنة.

ملاحظة:

نلاحظ أنه توجد استراتيجية أفضل (مثلى)، هي عدم الإعلان بالنسبة للمؤسستين، وتحقيق عائد 2 لكليهما، ومع ذلك لا يتم اختيار هاته الاستراتيجية من طرف كلا المؤسستين، لأن أي مؤسسة لا تستطيع تحسين عائدها من دون التسبب في تدهور عائد المؤسسة الأخرى. كما أنها تتسبب تدهور عائدها إذا قامت المؤسسة الأخرى بتغيير استراتيجيتها، فمثلا لو المؤسسة A انتقلت من الإعلان إلى عدم الإعلان، فإنه تحسن عائدها من 2 إلى 5، ولكنها تتسبب في تدهور عائد المؤسسة B من 2 إلى -15. التي ترد بدورها بالانتقال من الإعلان إلى عدم الإعلان، وبالتالي يحقق الشركتان عائد سلبي (-10). يدعى هذا الحل (عم الإعلان ، عدم الإعلان)، وتحقيق عائد +2 لكلا المؤسستين **بالحل الأمثل لباريتو.**