Mohamed Khider University of Biskra
Department of Material Sciences
Module: Mathematics I

Academic Year: 2024/2025
The date : 27/10/2024

Guided Work Series Number 3 سلسلة الأعمال الموجهة رقم
Real functions الدوال الحقيقية

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

Calculate the following limits if they exist. أحسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

1. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$ **2**. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$ **3**. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}$ **4**. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

Calculate the following limits. أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}$ **2**. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

Calculate the following limits. أحسب النهايات التالية :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^x$ **2**. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{x+3}$ **3**. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}$ **4**. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}$.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

بإستعمال تعريف النهايات، أوجد (ϵ,δ)، لدراسة نهاية الدالة x^3 عند 1.

Using the definition of limits, find (ϵ,δ) *to study the limit of the function* x^3 *at* 1.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

Let f *be the function defined by:* لتكن f الدالة المعرفة بـ :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Find the definition set $\mathcal{D}_f$ *of the function* f. 1) أوجد مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$ للدالة f.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$، هل هي قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$ ؟

Calculate $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, *is it extendable continuously over* $\mathbb{R}$*?*

تمرين رقم – 6 – Exercise N°

لنكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : *Let the function g defined on $\mathbb{R}$ be as follows:*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{if } x \notin \{0, -1, 1\} \\ 0 & \text{if } x = 0, -1, 1 \end{cases}$$

في أي النقاط الدالة g تكون مستمرة؟ *At which points is the function g continuous?*

تمرين رقم – 7 – Exercise N°

1) لتكن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي *Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined as follows*

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{if } x \leq 1, \\ a\sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ثابت حقيقي. ماهي قيم a حتى تكون الدالة f مستمرة؟
where $a \in \mathbb{R}$ is a real constant. What are the values of a for the function f to be continuous?

2) أوجد كل قيم الثابت $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ حتى تكون الدالة $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التالية مستمرة :
Find all values of the constant $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ such that the following function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma x(e^{x} - e^{-x}) & \text{if } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

تمرين رقم – 8 – Exercise N°

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ كمايلي : *Let the function f defined on $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ as follows:*

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}.$$

1) أثبت أنه يمكننا تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة -1.
Prove that we can extend the function f by continuing at the point -1.

2) حدد القيمة المأخوذة عند -1 لهذا التمديد. *Find the value taken at -1 for this extension.*

تمرين رقم – 9 – Exercise N°

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق في0 ؟ *Are the following functions differentiable at 0?*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}, \qquad h(x) = |x|\sin x.$$

تمرين رقم – Exercise N°– 10

أوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث تكون الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ كما يلي:

Find $a, b \in \mathbb{R}$ such that the function f defined on $\mathbb{R}_+$ is as follows:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & if \quad 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1 & if \quad x > 1, \end{cases}$$

differentiable at 1. قابلة للإشتقاق عند 1.

تمرين رقم – Exercise N°– 11

أدرس قابلية إشتقاق الدوال التالية على $\mathbb{R}$:

Study the differentiability of the following functions on $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

تمرين رقم – Exercise N°– 12

أوجد في كل حالة مجموعة تعريف الدالة ثم مشتقها:

In each case, find the definition set of the function and then its derivative:

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1,$

2) $f(x) = 5x^3 - \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x},$

3) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x),$

4) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 7},$

5) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1},$

6) $f(x) = -x + 2 + \dfrac{2}{3x},$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x + x^2},$

8) $f(x) = (2x + 1)^2,$

9) $f(x) = \sqrt{x}(5x - 3).$

تمرين رقم – Exercise N°– 13

أحسب المشتق من الدرجة n للدوال التالية :

Calculate the derivative of degree n for the following functions:

$$\mathbf{1}).x \mapsto xe^x \qquad \mathbf{2}).x \mapsto x^{n-1} \ln(1 + x).$$

تمرين رقم – Exercise N°– 14

لتكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن المشتق من الدرجة $n + 1$ للدالة $x^n e^{1/x}$ هو

Let $n \in eN$. Prove that the derivative of degree $n + 1$ of the function $x^n e^{1/x}$ is

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}.$$