جامعة محمد خيضر (بسكرة)
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير
قسم العلوم التجارية

السنة الجامعية: 2025/2024
المستوى: أولى ماستر تسويق
مقياس: الأساليب الكمية في التسويق 1

المحاضرة الثالثة: تحليل الصراع في السوق نظرية الألعاب

1. تمهيد:

يمثل السوق التقاء العارضين والطالبين من أجل تبادل السلع، الخدمات، الأوراق المالية، العملات...إلخ، وتدخل المؤسسات (قوى العرض) في حالة صراع من أجل الاستحواذ على الزبائن (الطالبين) الحاليين والمحتملين، وبالتالي الاستحواذ على أكبر حصة من السوق، وتتنوع حالات المنافسة والصراع في السوق إلى الأشكال التالية:

أ. المنافسة مع قوى الطبيعة:

هي قيام شخص طبيعي أو معنوي بالتنافس مع حالات الطبيعة المختلفة مثل: الحرارة، الرطوبة، الأمطار، الثلوج، الرياح، العواصف، المد والجزر.

ب. المنافسة مع قوى السوق:

هي قيام شخص طبيعي أو معنوي بالتنافس مع قوى السوق المختلفة، مثل: قوى العرض والطلب، الكساد والانتعاش الاقتصادي، البطالة ودوران العمل... الخ.

ج. المنافسة بين الأشخاص:

قد تكون بين شخصين طبيعي أو معنويين، أو بين شخص طبيعي وشخص معنوي،، وهذا الصراع لا يكون عشوائيا، بل يتبع قواعد وأساليب علمية، فيستخدم أطرافه استراتيجيات لتحقيق هذا الهدف، ومواجهة استراتيجيات المؤسسات المنافسة، ولهذا يعتبر السوق مثالاً جيداً لتطبيق نظرية الألعاب Games theory.

إن نظرية الألعاب قائمة على أساس ردود الفعل المتبادلة بين طرفي الصراع، بينما في الصراع مع قوى الطبيعة قائم على أساس رد فعل من طرف واحد، وهو الشخص الطبيعي أو المعنوي، على اعتبار أن الطبيعة جماد لا ترد على تصرفات الأشخاص، وهي قائمة شئنا أم أبينا.

2. تعريف نظرية الألعاب:

تأخذ تسميات أخرى مثل نظرية المباريات، نظرية المنافسة والصراع، وهي أداة للتحليل الرياضي لحالات تضارب المصالح للوصول إلى أفضل الخيارات الممكنة في ظل الظروف المعطاة.

وتعتبر نظرية الألعاب أداة مهمة في اتخاذ القرارات المختلفة في المؤسسات، وخاصة في النشاط التسويقي، حيث توفر هذه النظرية عدد من الأساليب والأدوات التي تساهم في ترشيد القرارات التسويقية، التي يرغب المدراء في اتخاذها.

وتقوم نظرية الألعاب على فكرة أن المؤسسات (أو الأفراد) المتنافسة يحاول كل منها السيطرة أو الاستحواذ على منافع أو مكاسب معينة، من خلال اعتماد استراتيجيات معينة متاحة لكل طرف، ضمن فرص متساوية مع اختلاف النتائج المترتبة على هذه الاستراتيجيات، ويتم التعبير عن تطلعات كل طرف يطلق عليه مجازا لاعب، من خلال حسابات معينة، تساهم في وضع تصور عن طبيعة العلاقة بين المتنافسين، مع بيان حجم المنافع التي يمكن أن يحققها أحدهما والخسائر التي يتمكن من أن تلحق بالآخر.

3. تاريخ نظرية الألعاب:

على الرغم من ارتباط نظرية الألعاب بالتسالي المعروفة كلعبة الشطرنج والبوكر، إلا أنها تخوض في معضلات أكثر جدية تتعلق بعلوم الحاسب وعلم الاجتماع والاقتصاد والسياسة بالإضافة إلى العلوم العسكرية، وقد وضع القالب العام لنظرية الألعاب عالم الرياضيات الفرنسي إيميل بورل Émile Borel، الذي كتب أكثر

من مقالة عن ألعاب الصدفة، ووضع منهجيات لآلية الألعاب، أما المصمم الرئيسي لنظرية الألعاب فهو عالم الرياضيات الهنغاري-الأمريكي جون فون نيومان John von Neumann، الذي أسس الإطار النظري نظرية الألعاب عبر سلسلة من المقالات امتدت على مدى عشر سنوات (1930-1920)، وخاصة في الكتاب الشهير"The Theory of Games and Economic Behavior"، الذي ألفه مع أوسكار مورغن شتيرن Oskar Morgenstern.

وخلال الحرب العالمية الثانية، كانت معظم الخطط العسكرية ضمن مجال نقل الجنود وإيوائهم، الدعم اللوجستي، والغواصات والدفاع الجوي، مرتبطة بشكل مباشر مع نظرية الألعاب، بعد ذلك تطورت كثيراً في مجال علوم الاقتصاد، السياسة والاجتماع، إلا أنها تبقى نتاجاً جوهريا لعلم الرياضيات.

وفي سنة 1994، تحصل العلماء الثلاثة: جون ناش John Nash، رينارد سلتن Reinhard Selten، وجون هارساني John Harsanyi على جائزة نوبل للاقتصاد، وذلك لإسهاماتهم في مجال نظرية الألعاب .

4. المفاهيم الأساسية لنظرية الألعاب:

المباراة هي: " موقف تنافس وصراع بين عدة أطراف، وفقا لمجموعة معروفة من القواعد، أين يتم استخدام مجموعة من الإستراتيجيات (بدائل القرار) المتاحة، والتي يترتب عليها تعظيم المنفعة لكل طرف". انطلاقا من هذا التعريف نستخلص مكونات نظرية الألعاب وهي:

أ. اللاعبون:

وحدات مستقلة لاتخاذ القرار، ليس بالضرورة أن يكون اللاعب شخصا، وإنما قد يكون جماعة تعمل في مؤسسة ما أو فريقا أو دولة.

ب. قواعد اللعبة:

تحدد ما يستطيع/ وما لا يستطيع أن يفعله كل لاعب حسب المعلومات المتوفرة لديه، تكون القواعد محددة ومعروفة مسبقا.

ج. الاستراتيجيات:

هي بدائل القرار التي يختار من بينها كل لاعب تحركاته أثناء المباراة، وقد تكون الإستراتيجية مطلقة إذا استخدمها اللاعب طوال وقت اللعبة، وقد تكون الإستراتيجية المختلطة، إذا وزع اللاعب تحركاته على مجموعة من الاستراتيجيات بنسب مختلفة طوال اللعبة.

د. العائد (الخرج):

هو النتيجة الصافية لكل لاعب(ربح أو خسارة)، وهو لا يتوقف فقط على إستراتيجية اللاعب، وإنما على إستراتيجية اللاعب الأخر، قد يكون العائد نقديا (رقم أعمال، ربح) أو غير نقدي (حصة من السوق).

5. أنواع الألعاب :

توجد عدة تصنيفات للألعاب، إلا أن أهمها هو تقسيمها حسب عدد اللاعبين ونتيجة اللعبة إلى:

أ. الألعاب الثنائية ذات المجموع الصفري:

يكون عدد الأطراف المتنازعة اثنان، ومجموع ما يربحه احدهما يساوي مجموع ما يخسره الأخر، أي أن مجموع الربح والخسارة يساوي الصفر، كما أنه لا يوجد اتفاق بين اللاعبين، وكل لاعب قادر على اختيار واحدة فقط من الإستراتيجيات المتاحة له، وهو على معرفة تامة بالإستراتيجيات المتاحة للاعب الآخر ونتائجها .

ب. الألعاب الثنائية ذات المجوع غير الصفري:

تتكون من لاعبين، ليس من الضروري أن ما يكسبه لاعب، يخسره لاعب آخر، فيمكن أن يكسب أو يخسر اللاعبان نتيجة اللعبة، وزيادة عائد لاعب بمقدار لا يؤدي لنقص عائد اللاعب الآخر بنفس المقدار.

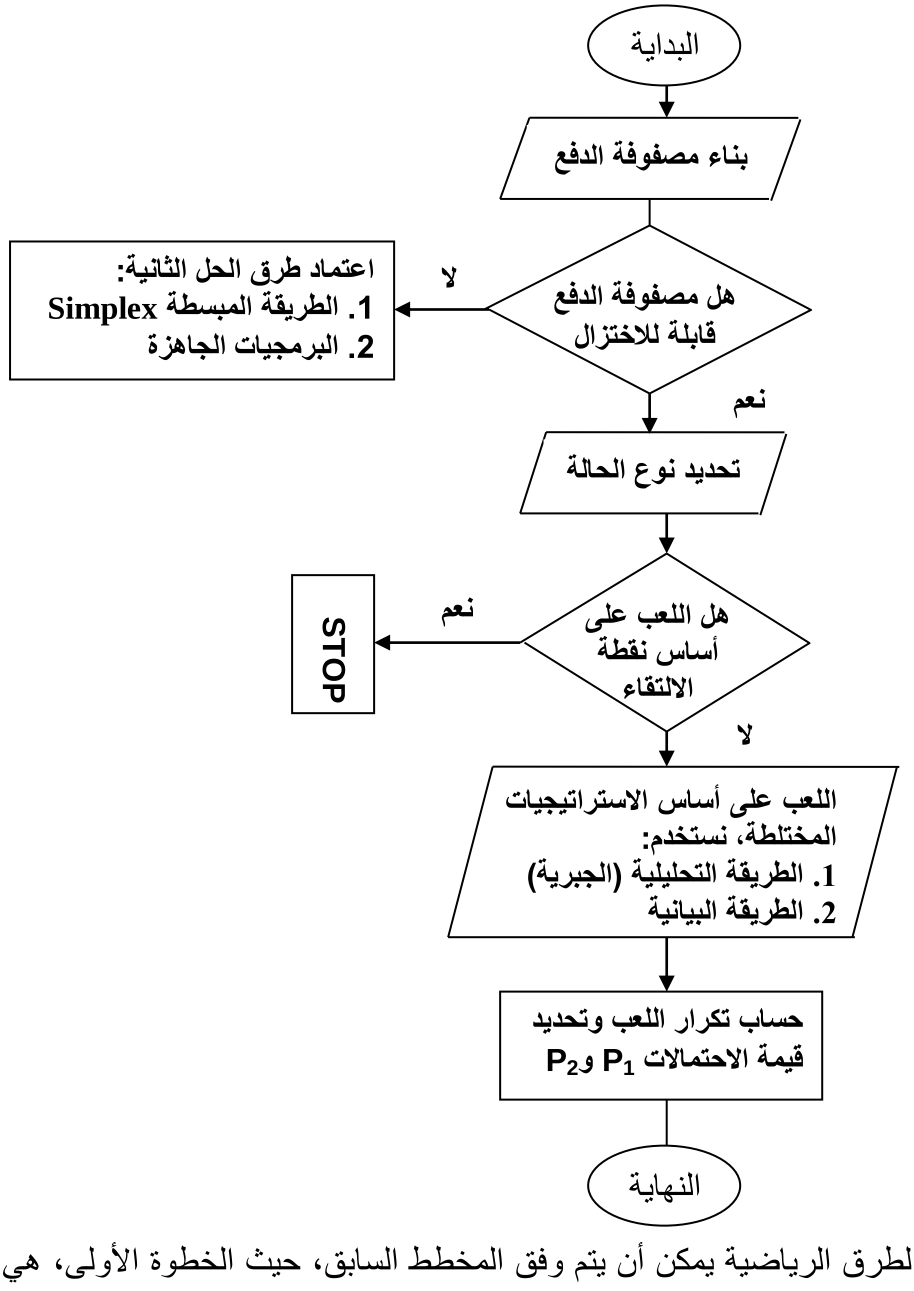
6. مبادئ نظرية الألعاب:

- هناك فردين أو أكثر يشتركون في المباراة، ولكن عدد المشتركين يبقى محدود.

- لكل لاعب عدد محدود من البدائل (الإستراتيجيات) المتاحة يختار من بينها.
- قرار كل لاعب يؤثر فيما يحققه هو من عائد، وفيما يحققه اللاعب الآخر من عائد في المباراة.
- قرارات جميع اللاعبين تتخذ في نفس الوقت(حالة لعبة ثابتة وليست ديناميكية).
- العائد من جميع الاستراتيجيات الممكنة للاعبين معلوم،
- البدائل المتاحة لأي لاعب متاحة أيضا لغيره من اللاعبين. كما أن اللاعبون لا يتصلون يبعضهم البعض.
- اللاعبون يتصرفون بعقلانية(راشدون)، يسعون إلى منفعتهم الخاصة عبر اتخاذهم لسلسلة من القرارات، وكل لاعب يسعى للتنبؤ بأفكار وحركات اللاعب الآخر، ويحاول جعل ربحه أكثر احتمالا .
- اللاعبون يتصرفون استراتيجيا، أي يتكهنون بحركة المنافس ويدخلونها في حساباتهم .
- المنطق يحكم تصرفات اللاعبين، أي لنفس البدائل المتاحة، كل لاعب يختار نفس الإستراتيجية .

7. مراحل حل مسائل نظرية الألعاب:

الشكل رقم (1): المخطط الانسيابي لمراحل مسائل نظرية الألعاب



إن استخدام الطرق الرياضية يمكن أن يتم وفق المخطط السابق، حيث الخطوة الأولى، هي بناء مصفوفة الدفع، ثم التأكد من قابليتها للاختزال، حتى تصبح أصغر حجما من المصفوفة الأصلية، بعد ذلك يتم تحديد طبيعة حالة اللعب، هل هو على أساس نقطة سرج(الالتقاء)، وهنا توجد إستراتيجية واحدة مثلى واجبة الإتباع لكل لاعب بشكل دائم، ، أما إذا كان اللعب على أساس الاستراتيجيات المختلطة، فهنا عدة طرق لحل المسألة، مثل الطريقة الجبرية، الرسم البياني، المصفوفات، أو البرمجة الخطية.

8. النموذج الرياضي لنظرية الألعاب:

يوجد مدخلان لتحديد نتائج أي عملية منافسة وصراع، وهما مدخل الدوال ومدخل المصفوفات، ونظرا لأهمية مدخل المصفوفات وشيوعه في التطبيق العملي، فإن الاهتمام سيقتصر عليه، حيث يتم اعتماد الصفوف والأعمدة في المصفوفة (a_{ij}) للتعبير عن نتائج القرار لكل من اللاعب الأول والثاني، وهذه النتائج ناجمة عن تقاطع قرارات كل من هذين اللاعبين في حالة الصراع على مكسب معين أو تجنب خسارة أو مخاطرة معينة في السوق، ويتم جمع النتائج عادة في مصفوفة يطلق عليها مصفوفة الدفع أو مصفوفة النتائج أو صفوفة العوائد، وتفسر القيم في هذه المصفوفة بأنها مقدار ما يدفعه اللاعب الثاني للاعب الأول في حالة فوز الأخير عند اختيار بديل معين، ويمكن التعبير عن مصفوفة الدفع في ظل نظرية الألعاب بالشكل التالي:

y / x	إستراتيجية اللاعب الثاني					
	y_1	y_2	....	y_j	....	y_n
إستراتيجية اللاعب الأول x_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1j}	....	a_{1n}
x_2....	a_{21}	a_{22}	....	a_{2j}	....	a_{2n}
						.
						.
x_i	a_{i1}	a_{i2}	....	a_{ij}	....	a_{in}
						.
						.
.......x_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mj}	....	a_{mn}

من مصفوفة الدفع السابقة (a_{ij})، يتضح أن البدائل الممكنة للاعب الأول هي: (x_1, x_2,.... x_m)، أما البدائل الممكنة للاعب الثاني فهي: (y_1, y_2,.... Y_n)، وعناصر المصفوفة a_{ij} تكون موجبة أو سالبة، فإذا كانت a_{ij} موجبة فهي تعبر عن مقدار العائد الذي يحققه اللاعب الأول عن إتباعه الإستراتيجية x_i، في نفس الوقت الخسارة التي يتعرض لها اللاعب الثاني عند إتباعه الإستراتيجية y_j، أما إذا كانت a_{ij} سالبة، فإنها تعني خسارة للاعب الأول وعائد للاعب الثاني.

إن حل النموذج الرياضي يعني التعرف على احتمال أو عدد المرات التي ينبغي بموجبها اعتماد إستراتيجية معينة من شأنها أن تحقق لأحدهما أعلى العوائد وأقل الخسائر، وتحميل اللاعب الآخر عكس هذه النتيجة.

9. قواعد السيطرة (الهيمنة):

هي الكيفية التي بموجبها يتم اختزال مصفوفة الدفع، حيث أن مصفوفة الدفع عادة ما تتضمن كافة الإستراتيجيات والنتائج التي تترتب عن الصراع، ويطلق عليها المصفوفة المركبة، أما بعد الاختزال إلى أقل عدد ممكن من الصفوف والأعمدة، فيطلق عليها المصفوفة المختزلة، ويكون ذلك باستبعاد بعض الصفوف والأعمدة:

أ. اختزال الصفوف:

عندما يكون كل عناصر أحد الصفوف في مصفوفة الدفع أكبر أو مساوية لعناصر صف آخر في المصفوفة، يطلق على الصف الأول: الصف المسيطر ويسمى الصف الآخر: الصف المستبعد لأنه يحذف من المصفوفة، وذلك لأن من الطبيعي أن اللاعب الأول لن يلعب الإستراتيجية الأخرى مادامت الإستراتيجية الأولى تحقق دائما عائد أعلى مقارنة بعائد الإستراتيجية الأخرى.

مثال:

$$\text{P}_2\ \text{اللاعب الثاني}\ \overset{\text{P}_2\ \text{اللاعب الثانى}}{\begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 7 & 4 & 3 \\ \cancel{x_2} & \cancel{5} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ x_3 & 4 & 5 & 9 \end{array}} \xrightarrow{\text{اختزال الصف الثاني}} \text{P}_2\ \text{اللاعب الثاني}\ \overset{\text{P}_2\ \text{اللاعب الثانى}}{\begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 7 & 4 & 3 \\ x_3 & 4 & 5 & 9 \end{array}}$$

بما أن: $7 \geq 5$، $4 \geq -1$، $3 \geq 2$، نقول أن الإستراتيجية x_1 مسيطرة على الإستراتيجية x_2، لذا نحذف الصف الثاني (أي الإستراتيجية x_2).

ب. اختزال الأعمدة:

عندما يكون عناصر أحد الأعمدة في مصفوفة الدفع أصغر أو مساوية لعناصر عمود آخر في المصفوفة، يطلق على العمود الأول: العمود المسيطر ويسمى العمود الآخر: العمود المستبعد لأنه يحذف من المصفوفة، وذلك لأن من الطبيعي أن اللاعب الثاني لن يلعب إلا على أساس بيانات العمود الذي يحقق له أقل الخسائر

مثال:

$$\text{P}_1\ \text{اللاعب}\ \overset{\text{P}_2\ \text{اللاعب}}{\begin{array}{ccc} 6 & 2 & \cancel{8} \\ 3 & 4 & \cancel{5} \\ 2 & 3 & \cancel{4} \end{array}} \xrightarrow{\text{اختزال عمود 3}} \text{P}_1\ \text{اللاعب}\ \overset{\text{P}_2\ \text{اللاعب}}{\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{3} \end{array}} \xrightarrow{\text{اختزال الصف 3}} \text{P}_1\ \text{اللاعب}\ \overset{\text{P}_2\ \text{اللاعب}}{\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}}$$

نلاحظ من مصفوفة الدفع أن جميع عناصر العمود الثاني أصغر من جميع عناصر العمود الثالث، وحسب قواعد السيطرة، فإن العمود الثاني هو المسيطر والعمود الثالث هو المستبعد، كما أن جميع عناصر الصف الثاني أكبر من جميع عناصر الصف الثالث، وحسب قواعد السيطرة، الصف الثاني هو المسيطر والصف الثالث هو المستبعد، لذا يتم اختزال المصفوفة إلى مصفوفة (2×2) فقط، وهذه الأخيرة لم يعد فيها أي قاعدة من قواعد السيطرة، لذلك فهي تمثل مصفوفة الدفع الأخيرة.

9. اشتقاق العلاقات الرياضية لكل لاعب:

P_2: اللاعب الأول؛ P_1: اللاعب الثاني؛ (a_{ij}) مصفوفة الدفع؛ V_1 قيمة اللعبة بالنسبة إلى اللاعب الأول P_1؛ V_2 قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الثاني P_2. وعلى أساس ذلك، يتم بناء العلاقات الرياضية التالية:

أ. اللاعب الأول P_1:

يسعى اللاعب الثاني (P_2) إلى تقليل العوائد التي يمكن أن يحصل عليها اللاعب الأول، أي أن:

$$\min_j(a_{ij}),\ j= 1 \ldots n$$

إن اللاعب الأول (P_1) سيسعى إلى تعظيم أقل عائد أو ربح ممكن أن يسمح به اللاعب الثاني، أي أن:

$$\text{Max}_i \min_j(a_{ij}),\ i= 1 \ldots n$$

إذن قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الأول هي: $V_1= \text{Maxi}\ \min_j(a_{ij})$

ب. اللاعب الثاني P_2:

يسعى اللاعب الأول (P_1) إلى تعظيم الخسائر التي يمكن أن يتعرض لها اللاعب الثاني، أي أن:

$$\text{Max}_i\ (a_{ij}),\ i= 1 \ldots m$$

إن اللاعب الثاني (P_2) سيسعى إلى تقليل أكبر خسارة يمكن أن يسببها له اللاعب الأول، أي أن:

$$\text{Min}_j\ \max_i\ (a_{ij}),\ j= \ldots m$$

إذن قيمة اللعبة للاعب الثاني هي: $V_2= \text{Min}_j\ \max_i\ (a_{ij})$

10. تحديد حالة الصراع:

نميز بين حالتين أساسيتين للمنافسة والصراع وهما: الإستراتيجيات الصافية (الخالصة)، وتسمى كذلك نقطة السرج، الالتقاء أو التوازن، والاستراتيجيات المختلطة.

أ. اللعب على أساس إستراتيجية صافية:

في هذه الحالة، يكون أمام اللاعب الأول والثاني إستراتيجية وحيدة مثلى لكل منهما ينبغي اللعب على أساسها بشكل دائم، فإذا افترضنا أن: V_1 قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الأول؛ V_2 قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الثاني، فإنه بموجب هذا النوع من الصراع يكون: $V_1= V_2$

ب. اللعب على أساس استراتيجيات مختلطة:

في هذه الحالة، يكون أكثر من إستراتيجية باحتمال معين لكل منها، وتقسم إلى ما يلي:

- **اللعب على أساس أن ربح الأول هو خسارة الثاني:** يتم التعبير عن هذه الحالة بـ: $V_1 + V_2= 0$، أي أن: $V_1= - V_2$ و: $V_2= - V_1$.
- **اللعب على أساس قيمة اللعبة بالنسبة للأول لا تساوي قيمة اللعبة بالنسبة للثاني:** يتم التعبير عن هذه الحالة كما يلي: $V_1 \neq V_2$.

مثال:

في أحد الأسواق المفتوحة، تتنافس شركتان متخصصتان في صناعة الألبسة النسائية، تعمل كل واحدة على تسويق منتجاتها بكميات ونوعيات مختلفة كما يلي: الشركة الأولى تسوق فساتين سوداء، حمراء وبيضاء؛ أما الشركة الثانية تسوق نفس الأنواع الثلاث، لكن مع مواصفات مختلفة (تجديد، سعر أعلى، جودة أعلى ...).

وقد حصلت الشركتان على عمليات تنافسية من خلال قيام كل شركة بتسويق منتجاتها بالشكل الذي يضمن أعلى عائد وأقل خسارة كما هو واضح في المصفوفة التالية:

		الشركة الثانية(اللاعب الثانى)		
	x \ y	السوداء y_1	الحمراء y_2	البيضاء y_3
	السوداء / x_1	12	6	2
الشركة الأولى(اللاعب الأول)	**البيضاء /x_2**	8	-12	-7
	الحمراء /x_3	8	-16	-1

تفسير مصفوفة الدفع:

إذا قررت كلا الشركتين تسويق الفساتين السوداء، فإن الشركة الأولى تحقق عائد 12، والشركة الثانية تتعرض لخسارة 12.

إذا قررت كلا الشركتين تسويق الفساتين الحمراء، فإن الشركة الأولى تتعرض لخسارة 12، والشركة الثانية تحقق ربح 12. ... وهكذا.

إذن القيم الموجبة تعتبر أرباح للشركة الأولى وخسائر للشركة الثانية، أما القيم السالبة فتعتبر خسائر للشركة الأولى وأرباح للشركة الثانية.

إيجاد نتيجة اللعبة:

يتم حساب قيمتي اللعبة للاعبين V_1 وV_2 كما يلي:

اللاعب الأول:

$$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= 2$$

اللاعب الثاني:

$$V_2= Min_j\ max_i(a_{ij})= 2$$

		اللاعب الثاني			
		y_1	y_2	y_3	**min_j**
	x_1	12	6	2	**2**
اللاعب الأول	x_2	8	-12	-7	**-12**
	x_3	8	-16	-1	**-16**
	max_i	**12**	**6**	**2**	

إذن الحالة: $V_1= V_2= 2$ هي نقطة سرج، وهو ما يعني أنه توجد إستراتيجية مثلى خالصة للشركة الأولى (الفساتين السوداء x_1) تستخدمها بشكل دائم باحتمال 100%، لأنها تحقق لها ربح 2 على الأقل. كما توجد إستراتيجية خالصة مثلى للشركة الثانية(الفساتين البيضاء y_3) تستخدمها بشكل دائم باحتمال 100%، لأنها تحقق لها خسارة 2 على الأكثر فقط.

مثال:

تنتج وتبيع مؤسستان المنتجات التالية: حليب كامل الدسم، حليب نصف دسم وحليب منزوع الدسم، على أن تتم العمليات التسويقية في إطار المنافسة للاستحواذ على أكبر عائد، يتم ترجمة ذلك من خلال مصفوفة الدفع التالية:

المؤسسة الثانية

	y x	**كامل الدسم** y_1	**نصف دسم** y_2	**منزوع الدسم** y_3
	كامل الدسم / x_1	-4	3	10
المؤسسة الأولى	**نصف دسم /x_2**	2	-3	-3
	منزوع الدسم /x_3	-2	5	8

المطلوب: أحسب قيمة V_1 وV_2 وحدد نوع الحالة.

الحل:

يتم حساب قيمتي اللعبة للاعبين V_1 وV_2 كما يلي:

اللاعب الأول:

$$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= -2$$

اللاعب الثاني:

$$V_2= Min_j\ max_i(a_{ij})= 2$$

ومنه نستنتج أن: $V_1 + V_2= 0$ ، أي: $V_1= -V_2$ أو:

$$V_2= -V_1$$

اللاعب الثانى

		y_1	y_2	y_3	**min_j**
	x_1	-4	3	10	**-4**
اللاعب الأول	x_2	2	-3	-3	**-3**
	x_3	-2	5	8	**-2**
	max_i	**2**	**5**	**10**	

وهذا يعني أنه لا توجد نقطة سرج، أي لا توجد إستراتيجية مثلى خالصة لكل لاعب، تحققان نتيجة واحدة للاعبين(ربح لأحدهما وخسارة للاعب الآخر)، حيث أن استخدام اللعب الأول الإستراتيجية x_3 بشكل دائم تحقق له خسارة (-2)، كما أن استخدام اللاعب الثاني الإستراتيجية y_1 بشكل دائم تحقق له أيضا خسارة (2)، لذا يفضل اللاعبان إستراتيجية مختلطة، أي يلعب إستراتيجية باحتمال معين والإستراتيجية الأخرى بباقي الاحتمال.

مثال:

تمثل مصفوفة الدفع التالية حصيلة المنافسة بين مؤسستين تسوقان ثلاث أنواع من المنتجات الغذائية:

اللاعب الثانى

	y x	y_1	y_2	y_3
	x_1	-2	3	10
اللاعب الأول	x_2	2	-3	0
	x_3	-1	5	8

يتم حساب قيمتي اللعبة للاعبين V_1 وV_2 كما يلي:

اللاعب الأول:

$$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= -1$$

اللاعب الثاني:

$$V_2= Min_j\ max_i(a_{ij})= 2$$

ومنه نستنتج: $V_1 \neq V_2$

اللاعب الثانى

	y x	y_1	y_2	y_3	**min_j**
	x_1	-2	3	10	**-2**
اللاعب الأول	x_2	2	-3	0	**-3**
	x_3	-1	5	8	**-1**
	max_i	**2**	**5**	**10**	

وهذا يعني أنه لا توجد نقطة سرج، أي لا توجد إستراتيجية مثلى خالصة للاعب الأول، وإستراتيجية مثلى خالصة للاعب الثاني تحققان نتيجة واحدة للعبة(ربح لأحدها وخسارة للآخر)، وإنما الإستراتيجية x_3 تحقق خسارة للاعب الأول وربح للاعب الثاني، فهي غير مثلى للاعب الأول، أما الإستراتيجية y_1 فتحقق للاعب الثاني خسارة وربح للاعب الأول، فهي غير مثلى للاعب الثاني، لذا يلجأ كل لاعب إلى لعب إستراتيجية مختلطة(مزيج من الإستراتيجيتين).

11. الطريقة الجبرية:

تعتمد على العمليات الجبرية لحساب نسب احتمالات أو عدد مرات استخدام كل الإستراتيجيات المتاحة ونتيجة المباراة لكل لاعب .

مثال:

مصنعان متخصصان في صناعة الألبسة يتنافسان مع بعضهما من أجل طرح نوعين من الألبسة لكل منهما، وقد دارت بينهما عمليات المنافسة التي تمثلها مصفوفة الدفع التالية:

	x \ y	**اللاعب الثانى B**	
		y_1	**y_2**
اللاعب الأول A	**x_1**	-1	4
	x_2	3	-2

إذا طرح المصنع الأول اللباس x_1 ، وطرح المصنع الثاني اللباس y_1 ، فإن ذلك يعني تحقيق نتيجة مالية -1 و ن (خسارة للمصنع الأول وربح للمصنع الثاني)، ... وهكذا.

إذا طرح المصنع الأول اللباس x_1 ، وطرح المصنع الثاني اللباس y_2 ، فإن ذلك يعني تحقيق نتيجة مالية 4+ و ن (ربح للمصنع الأول وخسارة للمصنع الثاني)، ... وهكذا.

يتم حساب نتيجة المباراة لكل لاعب V_1 وV_2 كما يلي:

	x \ y	**اللاعب الثانى B**		
		y_1	**y_2**	**min_j**
اللاعب الأول A	**x_1**	-1	4	**-1**
	x_2	3	-2	**-2**
	max_i	**3**	**4**	

يتم حساب نتيجة المباراة لكل لاعب V_1 وV_2 كما يلي:

اللاعب الأول:

$V_1 = Max_i \, min_j(a_{ij}) = -1$

اللاعب الثاني:

$V_2 = Min_j \, max_i(a_{ij}) = 3$

بما أن: $V_1 \neq V_2$، فإنه لا توجد نقطة سرج أو التقاء، كما أنه لا تتوافر قواعد السيطرة والاختزال، لذا يتم استخدام إحدى طرق الاستراتيجيات المختلطة لحل المشكلة، **وهي الطريقة الجبرية**، وتكون كما يلي:

بالنسبة للاعب الأول A:

حسب قانون الاحتمالات: $p_1 + p_2 = 1$، حيث p_1 احتمال اختيار الإستراتيجية x_1 ، وp_2 احتمال اختيار الإستراتيجية x_2 من طرف اللاعب الأول (المصنع الأول).

ومنه: $p_2 = 1 - p_1$ أو: $p_1 = 1 - p_2$

النتيجة المتوقعة للمصنع الأول في حالة اختيار المصنع الثاني للإستراتيجية الأولى y_1 :

$-1(p_1) + 3(p_2) = - p_1 + 3(1 - p_1) = - p_1 + 3 + -3p_1 = 3 - 4 p_1$ ....(1)

النتيجة المتوقعة للمصنع الأول في حالة اختيار المصنع الثاني للإستراتيجية الثانية y_2 :

$(p_1) - 2(p_2) = 4p_1 - 2(1 - p_1) = 4p_1 - 2 - 2p_1 = 6p_1 - 2$ ....(2)4

إن أفضل عائد يحققه المصنع الأول يتحقق عند تساوي العلاقتين (1) و(2)، أي أن: $3 – 4p_1= 6p_1 -2$
بحل المعادلة السابقة نجد: $p_1= 5/10= 0,5$؛ ومنه: $p_2= 1- 0,5= 0,5$

هذا يعني أنه في حالة تكرار عمليات التسويق والمنافسة بين المصنعين لـ 10 مرات مثلا، فإنه على إدارة المصنع الأول استخدام الإستراتيجية x_1 لـ 5 مرات بشكل عشوائي، والإستراتيجية x_2 لـ 5 مرات بشكل عشوائي أيضا، أو استخدام الإستراتيجية x_1 لنصف الوقت، والإستراتيجية x_2 لنصف الوقت الآخر.

بالتالي ستكون نتيجة المباراة بالنسبة للمصنع الأول:

- في حالة اختيار المصنع الثاني للإستراتيجية الأولى y_1 :

$$V(A/ y_1) = -1(0,5) + 3(0,5)= 1$$

- في حالة اختيار المصنع الثاني للإستراتيجية الثانية y_2 :

$$V(A/y_2)= 4(0,5) – 2(0,5)= 1$$

إذن هذه النتيجة (ربح 1) مستقلة عن الإستراتيجية التي يستخدمها اللاعب الثاني، وهي أفضل مما لو اتبع المصنع الأول الإستراتيجية الصافية x_1 وفق Maximin التي تحقق له $V_1= -1$، وهو ما يعني أن الإستراتيجية المختلطة بالنسبة له أفضل.

اللاعب الثاني B:

حسب قانون الاحتمالات: $q_1 + q_2= 1$، حيث q_1 احتمال اختيار الإستراتيجية y_1 وq_2 احتمال اختيار الإستراتيجية y_2 من طرف اللاعب الثاني (المصنع الثاني).
ومنه: $q_2= 1 – q_1$ أو: $q_1= 1 – q_2$

النتيجة المتوقعة للمصنع الثاني في حالة اختيار المصنع الأول للإستراتيجية الأولى x_1 :

$$-1(q_1) + 4(q_2)= - q_1 + 4(1 – q_1) = - q_1 + 4 + -4q_1= 4 –5 q_1 \,………(1)$$

النتيجة المتوقعة للمصنع الثاني في حالة اختيار المصنع الأول للإستراتيجية الثانية x_2 :

$$3(q_1) – 2(q_2)= 3P_1 – 2(1- q_1) = 3q_1 - 2 – 2q_1 = 5q_1 -2 \,…………(2)$$

إن أفضل عائد يحققه المصنع الثاني يقوم على أساس تساوي العلاقتين (1) و(2)، أي أن: $4 – 5q_1= 5q_1 -2$
بحل المعادلة السابقة نجد: $q_1= 3/5= 0,6$؛ ومنه: $q_2= 1- 0,6= 0,4$

هذا يعني أنه في حالة تكرار عمليات التسويق والمنافسة بين المصنعين لـ 5 مرات مثلا، فإنه على إدارة المصنع الثاني استخدام الإستراتيجية y_1 لـ 3 مرات بشكل عشوائي، والإستراتيجية y_2 لمرتين بشكل عشوائي أيضا، أو استخدام الإستراتيجية y_1 لـ 60% من الوقت، والإستراتيجية y_2 لـ 40% من الوقت بشكل عشوائي.

بالتالي ستكون نتيجة المباراة بالنسبة للمصنع الثاني:

- في حالة اختيار المصنع الأول للإستراتيجية الأولى x_1:

$$V(B/ x_1) = -1(0,6) + 4(0,4)= 1$$

- في حالة اختيار المصنع الأول للإستراتيجية الثانية x_2 :

$$V(B/x_2)= 4(0,6) – 2(0,4)= 1$$

هذه النتيجة (خسارة 1) هي أفضل مما لو اتبع المصنع الثاني الإستراتيجية الصافية y_1، وفق طريقة Minimax التي تعرضه لخسارة $V_2= 3$، وهو ما يعني أن الإستراتيجية المختلطة بالنسبة له أفضل.

إذن الإستراتيجية المختلطة هي الأفضل بالنسبة للاعبين، لأنها أعلى ربحا بالنسبة للاعب الأول (لاعب تكبير الأرباح)، وأقل خسارة بالنسبة للاعب الثاني(لاعب تصغير الخسائر).

12. الطريقة البيانية:

تتطلب نفس شرط الطريقة الجبرية، إضافة لشرط آخر: توافر مصفوفة الدفع على صفين وعدد من الأعمدة أو عمودين وعدد من الصفوف، وتعتمد على التمثيل البياني للمشكلة وبيان نقاط الحل ونقطة الحل الأمثل.

مثال:

سمح تحليل المنافسة بين مؤسستين ببناء مصفوفة الدفع التالية:

المطلوب: إيجاد قيمة V_1 ، V_2، وعدد مرات استخدام كل من استراتيجيات المؤسستان B A باستخدام طريقة الرسم.

$V_1= Max_i\ min_j(a_{ij})= -1 ; V_2= Min_j\ max_i(a_{ij})= 3$

بما أن $V_1\neq V_2$، فإنه لا توجد نقطة سرج، أي لا توجد إستراتيجية صافية مثلى لكل، لذا يبحثان عن استراتيجيات مختلطة لكل لاعب.

		اللاعب الثانى B		
	x \ y	y_1	y_2	**min_j**
اللاعب الأول A	x_1	-2	5	**-2**
	x_2	2	-3	**-3**
	max_i	**2**	**5**	

الحل:

اللاعب A:

نفرض أن المؤسسة A تتبع الإستراتيجية x_1 باحتمال p_1 والإستراتيجية الثانية x_2 باحتمال p_2، مع: $p_1 + p_2= 1$، ومنه: $p_2= 1 – p_1$

وبما أن نتيجة المباراة هي V، فإن المؤسسة A تسعى لأن تكون: $V\Longrightarrow Max$ (تعظيم الربح أو العائد).

الربح المتوقع للمؤسسة A في حالة إتباع المؤسسة B الإستراتيجية الأولى y_1 يساوي:

$-2p_1 + 2p_2 = -2p_1+ 2(1 –p_1)= -2p_1 + 2- 2p_1= 2 – 4p_1$ …….(1)

الربح المتوقع للمؤسسة A في حالة إتباع المؤسسة B الإستراتيجية الثانية y_2 يساوي:

$5p_1 - 3p_2 = 5p_1 - 3(1 –p_1)= 5p_1 -3+ 3p_1= -3 +8p_1$ …….(2)

تهدف المؤسسة A إلى تعظيم القيمة V، لذا يترجم ذلك الهدف بالعلاقات:

(1)..... $2- 4p_1 \geq V$ نقطة الأصل (0 ، 0) تحقق المتراجحة، إذن هي تنتمي لمنطقة الحل

(2)..... $-3 + 8p_1 \geq V$ نقطة الأصل (0 ، 0) لا تحقق المتراجحة، إذن هي لا تنتمي لمنطقة الحل

يمكن تبسيط العلاقات السابقة كما يلي:

$V + 4p_1 \leq 2$ ....(1)

$V – 8p_1 \leq -3$ ……(2)

نقوم بالبحث عن إحداثيات النقاط (p_1 ,V) الضرورية لرسم المستقيمين الممثلين للمعادلتين:

$V + 4p_1 = 2$ ....(1)

$V – 8p_1 = -3$ ……(2)

من المعادلة الأولى نحصل على النقاط الضرورية (p_1 ,V) لرسم المستقيم الممثل لها:

نفرض أن $p_1= 0$، ومنه: $V= 2 \Longleftarrow$ النقطة الأولى (0 , 2)

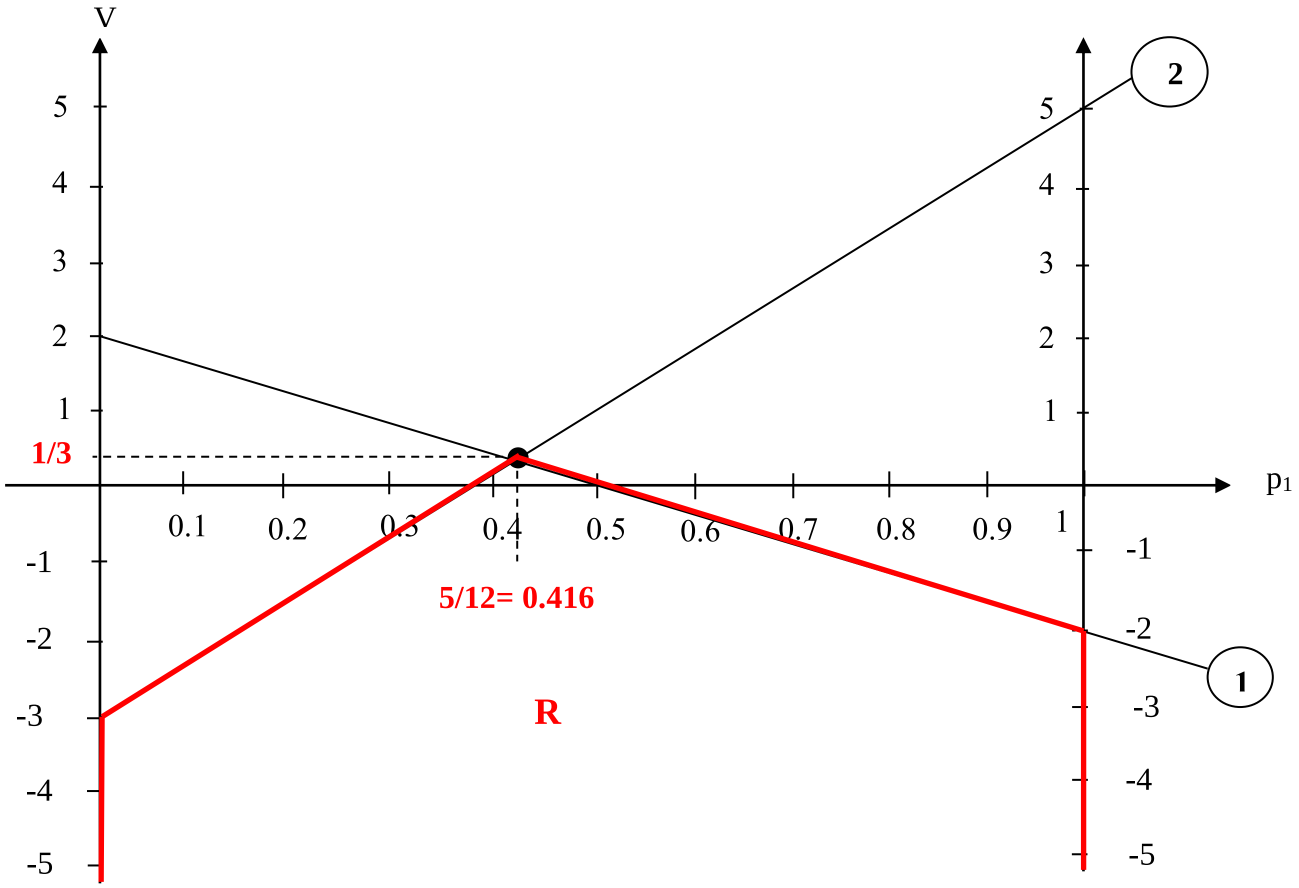
$p_1= 1$، ومنه: $V= - 2 \Longleftarrow$ النقطة الثانية (1 , -2)

من المعادلة الثانية نحصل على النقاط الضرورية (p_1 ,V) لرسم المستقيم الممثل لها:

نفرض أن $p_1= 0$، ومنه: $V= -3 \Longleftarrow$ النقطة الأولى (0 , -3)

$p_1= 1$، ومنه: $V= 5 \Longleftarrow$ النقطة الثانية (1 , 5)

الخطوة التالية هي رسم العلاقات الرياضية السابقة على معلم، يمثل p_1 على المحور الأفقي، وV على المحور العمودي، مع P_1 يقع بين 0 و1.



إن المنطقة R في الرسم تحت الخط المنكسر الأحمر، تمثل منطقة الحلول الممكنة للمؤسسة A، ويكون الحل الأمثل في أبعد نقطة عند تقاطع المستقيمين (1) و(2) بالقياس إلى نقطة الأصل، وبعد إنزال مساقط رأسية وأفقية نحصل على إحداثيات نقطة الحل الأمثل، وهي: $(p_1= 5/12\ ,\ V= 1/3)$، أي أنه على المؤسسة A إتباع الإستراتيجية الأولى x_1 باحتمال 5/12 =41.66%، والإستراتيجية الثانية x_2 باحتمال 7/12= 58.33%.

اللاعب B:

يمكن إعادة نفس الخطوات بالنسبة للاعب الثاني(المؤسسة B) كما يلي:

نفرض أن المؤسسة B تتبع الإستراتيجية y_1 باحتمال q_1 والإستراتيجية الثانية y_2 باحتمال q_2، مع: $q_1 + q_2= 1$، ومنه: $q_2= 1 – q_1$

وبما أن نتيجة المباراة هي V، فإن المؤسسة B تسعى لأن تكون: $V \Longrightarrow Min$ (تصغير الخسارة)

الخسارة المتوقعة للمؤسسة B في حالة إتباع المؤسسة A الإستراتيجية الأولى x_1 يساوي:

$-2q_1 + 5q_2 = -2p_1+ 5(1 –q_1)= -2q_1 + 5 – 5q_1= 5 – 7q_1$ …….(1)

الخسارة المتوقع للمؤسسة B في حالة إتباع المؤسسة A الإستراتيجية الثانية x_2 يساوي:

$2q_1 – 3q_2 = 2q_1 - 3 (1 –q_1)= 2p_1 – 3 +3q_1= -3 +5q_1$ …….(2)

تهدف المؤسسة B إلى تصغير القيمة (الخسارة)V، لذا يترجم ذلك الهدف بالعلاقات:

$5- 7q_1 \le V$ ..(1) نقطة الأصل (0 ، 0) لا تحقق المتراجحة، إذن هي لا تنتمي لمنطقة الحل

$-3 + 5q_1 \le V$ …..(2) نقطة الأصل (0 ، 0) تحقق المتراجحة، إذن هي تنتمي لمنطقة الحل

يمكن تبسيط العلاقات السابقة كما يلي:

$V + 7q_1 \ge 5$ ……..(1)

$V – 5q_1 \ge -3$ ……(2)

نقوم بالبحث عن إحداثيات النقاط (q_1 ,V) الضرورية لرسم المستقيمين الممثلين للمعادلتين:

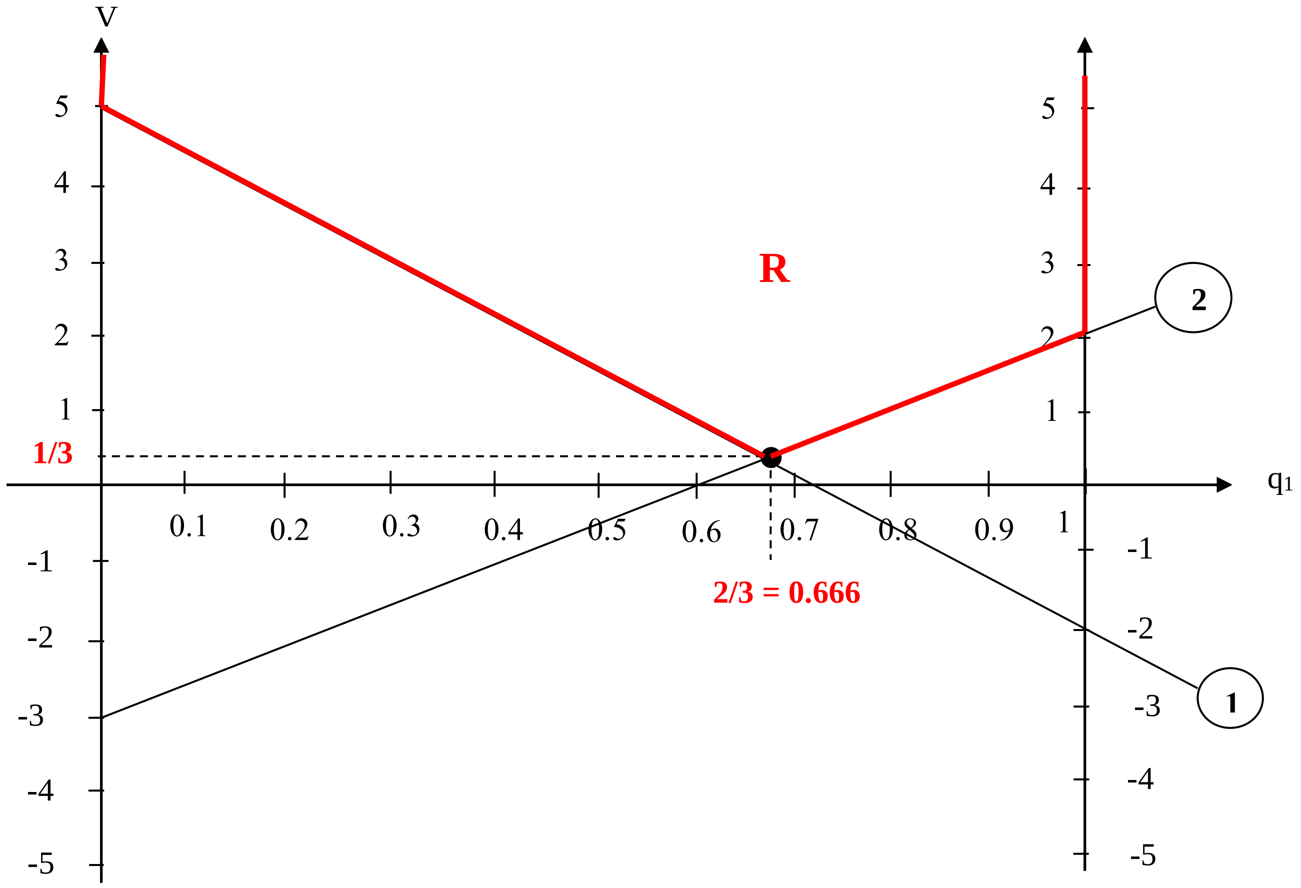
$V + 7q_1 = 5$ ……..(1)

$V – 5q_1 = -3$ ……(2)

من المعادلة الأولى نحصل على النقاط الضرورية (q_1 ,V) لرسم المستقيم الممثل لها:
نفرض أن $q_1= 0$، ومنه: $V= 5$ ⟸ النقطة الأولى (0 , 5)
$q_1= 1$، ومنه: $V= - 2$ ⟸ النقطة الثانية (1 , -2)

من المعادلة الثانية نحصل على النقاط الضرورية (p_1 ,V) لرسم المستقيم الممثل لها:
نفرض أن $q_1= 0$، ومنه: $V= -3$ ⟸ النقطة الأولى (0 , -3)
$q_1= 1$، ومنه: $V= 2$ ⟸ النقطة الثانية (1 , 2)

الخطوة التالية هي رسم العلاقات الرياضية السابقة على معلم، يمثل q_1 على المحور الأفقي، وV على المحور العمودي، مع q_1 يقع بين 0 و1.



إن المنطقة R في الرسم فوق الخط المنكسر الأحمر تمثل منطقة الحلول الممكنة للمؤسسة B، ويكون الحل الأمثل في أبعد نقطة عند تقاطع المستقيمين (1) و(2) بالقياس إلى نقطة الأصل، وبعد إنزال مساقط رأسية وأفقية نحصل على إحداثيات نقطة الحل الأمثل، وهي: $(q_1= 2/3=0,666 \ , \ V= 1/3)$، أي أنه على المؤسسة B إتباع الإستراتيجية الأولى y_1 باحتمال 2/3= 66.66%، والإستراتيجية الثانية y_2 باحتمال 1/3= 33.33%.