جامعة محمد خيضر(بسكرة)
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

سنة أولى ماستر تسويق
السنة الجامعية 2024- 2025؛ السداسي الأول
مقياس الأساليب الكمية في التسويق 1

سلسلة تمارين محلولة رقم (1) حول التنبؤ بالمبيعات

التمرين الأول:

يعطي الجدول التالي مبيعات مؤسسة العربي من منتجها الوحيد الحليب المبستر (الوحدة: ألف كيس 1 لتر)

الأسبوع	1	2	3	4	5	6	7	8
المبيعات (آلاف)	39	44	40	45	38	43	39	50

المطلوب:

1. حساب المتوسطات المتحركة من الرتبة الثالثة م م (3)، ثم التنبؤ بكمية المبيعات للأسبوع التاسع.
2. حساب المتوسطات المتحركة المرجحة من الرتبة 3 بأوزان 0.5 للأسبوع الأحدث؛ 0.3 للأسبوع الذي يسبقه؛ و0.2 للأسبوع الأقدم. ثم التنبؤ بكمية المبيعات للأسبوع التاسع.

حل التمرين الأول:

1. التنبؤ بالمبيعات بطريقة المتوسطات المتحركة البسيطة من الرتبة 3: م م 3

أسابيع	المبيعات الفعلية y_t	المتوسط المتحرك $MM_t(3)$	التنبؤ بالمبيعات $(\hat{y}_{t+1})$
1	39	-	
2	44	-	
3	40	41 =3/(39+44+40)	
4	45	43 =3/(44+40+45)	41
5	38	41 =3/(40+45+38)	43
6	43	42 =3/(45+38+43)	41
7	39	40 =3/(38+43+39)	42
8	50	44 =3/(43+39+50)	40
9	؟	-	44

يعتبر المتوسط المتحرك لفترة معينة، هو التنبؤ بالمبيعات للفترة الموالية، ومنه كمية المبيعات المتوقعة للأسبوع الثامن (9) هو المتوسط المتحرك من الرتبة 3 للأسبوع 8، ويساوي 44 × 1000= 44000 كيس حليب.

2. التنبؤ بطريقة المتوسطات المتحركة المرجحة لـ 3 سنوات، مع إعطاء الفترة الأحدث وزن 0.5، والفترة التي تسبقها 0.3، والفترة الأقدم 0.2:

أسابيع	مبيعات فعلية (y_t)	المتوسط المتحرك المرجح $MMP_t(4)$	تنبؤ بالمبيعات $(\hat{y}_{t+1})$
1	39	-	-
2	44	-	-
3	40	41 =(0.2)39 +(0.3)44 + (0.5) 40	-
4	45	43.3 =(0.2)44 +(0.3)40 + (0.5) 45	41
5	38	40.5 =(0.2)40 +(0.3)45 + (0.5) 38	43.3
6	43	41.9 =(0.2)45 +(0.3)38 + (0.5) 43	40.5
7	39	40 =(0.2)38 +(0.3)43 + (0.5) 39	41.9
8	50	45.3 =(0.2)43 +(0.3)39 +(0.5) 50	40
9	؟	-	45.3

نلاحظ ارتفاع في قيمة التنبؤات بكمية المبيعات في الأسبوع 9، عند أخذ الأوزان بعين الاعتبار، وهذا لأن مبيعات الأسبوع الأحدث (8) كانت ذات كمية أكبر، كما أن السنة الأحدث تأخذ وزن أكبر (وزن 0.50)، مما يؤثر إيجابا على التنبؤ.

التمرين الثاني:

تتوفر لدى مدير المصنع بيانات عن الطلب لثمانية أسابيع (8) ماضية، ويرغب في استخدام التليين الأسي في التنبؤ بالمبيعات للسبوع التاسع، وقد افترض أن الطلب المتوقع في الأسبوع الأول كان **40 ألف وحدة**، ويحاول اختيار قيمة لثابت التمهيد من بين 0,3 و 0,7 .

الأسبوع	1	2	3	4	5	6	7	8
المبيعات (آلاف)	39	44	40	45	38	43	39	50

المطلوب: 1. التنبؤ بمبيعات الأسبوع التاسع بطريقة التمهيد الأسي بثابت تمهيد $\alpha = 0.3$، ثم $\alpha = 0.7$.

2. أيهما أفضل للتنبؤ بالمبيعات الأسبوعية، استعمال $\alpha = 0,3$ أو $\alpha = 0,7$ كثابت للتمهيد ؟

حل التمرين الثاني:

أسبوع	مبيعات فعلية	$\alpha = 0,3$			$\alpha = 0,7$		
	y_t	متوقع $\hat{y}_t$	$y_t - \hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$	متوقع $\hat{y}_t$	$y_t - \hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
1	39	معطى 40	1 -	1	معطى 40	1-	1
2	44	39.70	4.3+	18.49	39.3	4.7+	22.09
3	40	40.99	0.99 -	0.98	42.59	2.59-	6.71
4	45	40.69	4.31 +	18.57	40.78	4.22+	17.81
5	38	41.98	3.98 -	15.84	43.71	5.71-	32.60
6	43	40.78	2.22+	4.93	39.71	3.29+	10.82
7	39	41.44	2.44-	5.95	42.01	3.01-	9.06
8	50	40.70	9.30+	86.49	39.98	10.02+	100.40
مجموع				152.25			200.49

التنبؤ $\hat{y}_t$ في حالة ثابت تمهيد: $\alpha = 0,3$

أسبوع 1: معطى تقديريا 40.

إذا لم يستخدم الطلب الحقيقي للأسبوع الأول 39.

أسبوع 2: 40+ 0.3 (39- 40)= 39.70

أسبوع 3: 39.70 + 0.3 (44- 39.70)= 40.99

أسبوع 4: 40.99 + 0.3 (40- 40.99)= 40.69

أسبوع 5: 40.69+ 0.3 (45- 40.69)= 41.98

أسبوع 6: 41.98 + 0.3 (38- 41.98)= 40.78

أسبوع 7: 40.78 + 0.3 (43- 40.78)= 41.44

أسبوع 8: 41.44 + 0.3 (39- 41.44)= 40.70

أسبوع 9: 40.70 + 0.3 (50- 40.70)= 43.49

التنبؤ $\hat{y}_t$ في حالة ثابت تمهيد: $\alpha = 0,7$

أسبوع 1: معطى تقديريا 40.

إذا لم يستخدم الطلب الحقيقي للأسبوع الأول 39.

أسبوع 2: 40 + 0.7 (39-40)= 39.3

أسبوع 3: 39.3 + 0.7 (39.3-44)= 42.59

أسبوع 4: 42.59 + 0.7 (40 – 42.59)= 40.78

أسبوع 5: 40.78+ 0.7 (45- 40.78)= 43.71

أسبوع 6: 43.71 + 0.7 (38- 43.71)= 39.71

أسبوع 7: 39.71 + 0.7 (43- 39.71)= 42.01

أسبوع 8: 42.01 +0.7 (39- 42.01)= 39.98

أسبوع 9: 39.98 + 0.7 (50- 39.98)= 46.99

التنبؤ بالمبيعات في الأسبوع 9، مع معامل تمهيد $\alpha = 0,3$، يساوي 43.49

التنبؤ بالمبيعات في الأسبوع 9، مع معامل تمهيد $\alpha = 0,7$، يساوي 46.99

ولمعرفة أفضل معامل تمهيد، نلجأ إلى حساب الانحراف المعياري في التنبؤات للحالتين:

حالة $\alpha = 0,3$

$$\delta_1^2 = \frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-1} = \frac{152.25}{7-1} = 21.75 \Longrightarrow \delta_1 = 4.66$$

حالة $\alpha = 0,7$

$$\delta_2^2 = \frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-1} = \frac{200.49}{7-1} = 28.64 \Longrightarrow \delta_2 = 5.35$$

حيث: y_t المبيعات الأسبوعية الفعلية؛ $\hat{y}_t$ المبيعات المتوقعة (التنبؤات)؛ n عدد الأسابيع= 8

ومنه نستنتج أن التنبؤ الأفضل يكون باستعمال ثابت تمهيد $\alpha = 0,3$، لأنه يعطي أقل انحراف معياري بين المبيعات الحقيقية والمبيعات التنبؤية.

التمرين الثالث:

يعطي الجدول الموالي مبيعات مؤسسة من الأبواب الجاهزة خلال الفترة (2012- 2020):

السنوات	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
كمية المبيعات	60	62	69	75	78	84	90	92	95

المطلوب: حجم المبيعات المتوقع في السنتين 2021 و2022 بطريقة الانحدار الخطي البسيط.

حل التمرين الثالث:

التنبؤ بالمبيعات لسنة 2021 و2022 بطريقة الانحدار البسيط: عدد السنوات n= 9

سنوات	الزمن x_i	مبيعات y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
2012	4-	60	240-	16	3600
2013	3-	62	186-	9	3844
2014	2-	69	138-	4	4761
2015	1-	75	75-	1	5625
2016	0	78	0	0	6084
2017	1	84	84	1	7056
2018	2	90	180	4	8100
2019	3	92	276	9	8464
2020	4	95	380	16	9025
مجموع	$\sum x_i= 0$	$\sum y_i= 705$	$\sum x_iy_i= 281$	$\sum x_i^2= 60$	$\sum y_i^2=56559$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0}{9} = 0 \qquad y = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{705}{9} = 78.33$$

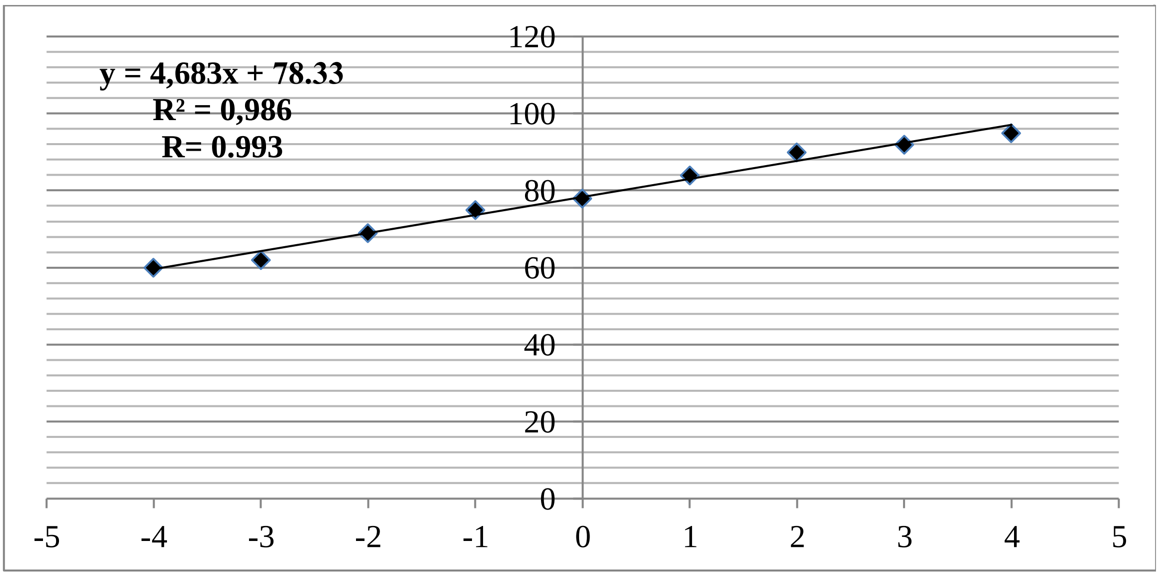
$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i . \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{9(281)-(0)(705)}{9(60)-(0)^2} = 4,68 \qquad b= \bar{y}- a\,\bar{x}= 78,33- 4,68(0)= 78,33$$

إذن معادلة خط الانحدار هي: $\hat{y}_i = ax_i + b \Longrightarrow \hat{y}_i = 4,68\ x_i + 78,33$

التنبؤ بالمبيعات: حتى يتم استخدام معادلة خط الانحدار في التنبؤ، يجب التأكد من وجود ارتباط قوي بين الزمن والمبيعات، يتم ذلك بحساب معامل الارتباط لـ Pearson:

$$r = \frac{\sum x_iy_i - n\,\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\,\bar{x}^2}\sqrt{\sum y_i^2 - n\,\bar{y}^2}} \Rightarrow r = \frac{281 - (9\times 0\times 78,33)}{\sqrt{60 - 9(0)^2}\sqrt{\sum 56559 - (9\times 78.33^2)}} = 0,9915$$

معامل ارتباط أكبر من 0.8، يعني ارتباط قوي جدا، وبالتالي يمكن استخدام معادلة الانحدار في التنبؤ بالمبيعات في 2023 و2024.



التنبؤ بالمبيعات لسنتي 2021 $(x_i= 5)$: $\hat{y}_{2021} = 4,68(5) + 78,33 = 101,73$

التنبؤ بالمبيعات لسنتي 2022 $(x_i= 6)$: $\hat{y}_{2022} = 4,68(6) + 78,33 = 106,41$

التمرين الرابع:

يفترض أن تتطور المبيعات الفصلية لإحدى المؤسسات لمدة ثلاث سنوات كما يوضحه الجدول الآتي:

الفصول	1	2	3	4	المجموع
2020	320	325	250	380	1275
2021	400	420	320	480	1620
2022	440	440	360	560	1800

المطلوب:

التنبؤ بالمبيعات الفصلية (الموسمية) لهذه المؤسسة لسنة 2023 ؟

حل التمرين الرابع:

التنبؤ بالمبيعات الفصلية لسنة 2023 وفق المراحل التالية:

المرحلة الأولى: إيجاد معادلة الاتجاه العام

عدد قيم x_i= 3 سنوات × 4 فصول لكل سنة = 12 قيمة⟸ n= 12، نعطي للفصول x_i قيم 1، 2.....12

سنوات	الفصول x_i	مبيعات y_i	$y_i\,x_i$	x_i^2	y_i^2
2020	1	320	320	1	102400
	2	325	650	4	105625
	3	250	750	9	62500
	4	380	1520	16	144400
2021	5	400	2000	25	160000
	6	420	2520	36	176400
	7	320	2240	49	102400
	8	480	3840	64	230400
2022	9	440	3960	81	193600
	10	440	4400	100	193600
	11	360	3960	121	129600
	12	560	6720	144	313600
مجموع	78 =	4695	32880	650	1914525

إيجاد معادلة الاتجاه: $\hat{y}_i= a\,x_i + b$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{78}{12} = 6.5 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4695}{12} = 391,25$$

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i . \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{12(32880)-(78)(4695)}{12(650)-(78)^2} = 16,52$$

$$b= \bar{y}- a\,\bar{x}= 391,25 - 16,52(6,5) = 283.87$$

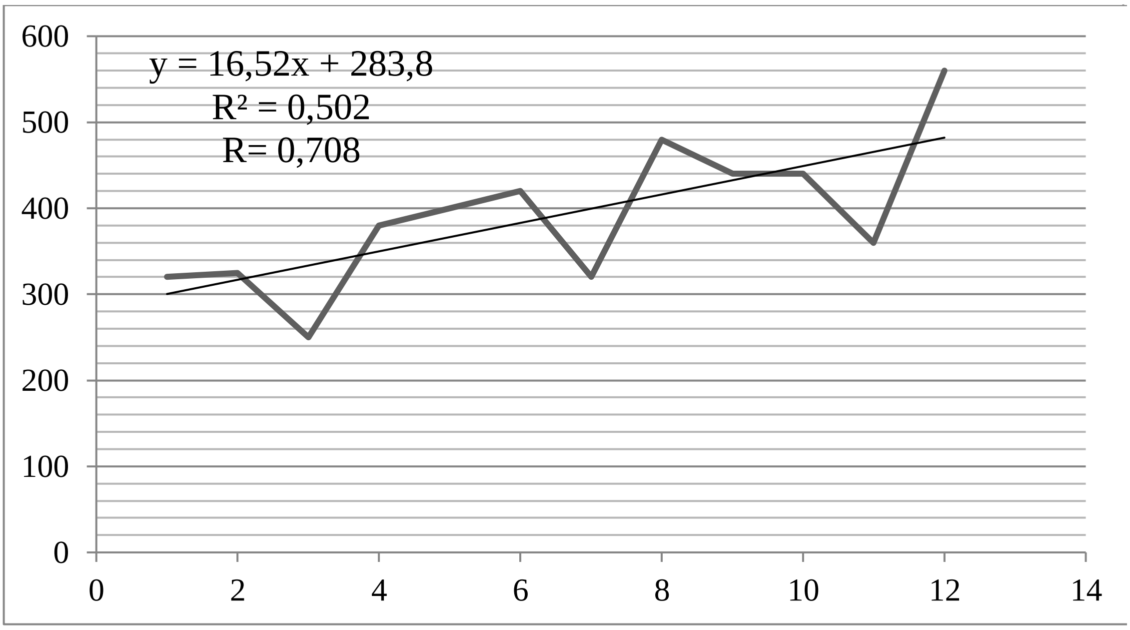
حتى يكون نموذج خط الانحدار (معادلة الاتجاه) صالح لتمثيل العلاقة بين الزمن x (الفصول أو السنوات) والمبيعات y، يجب أن يكون هناك ارتباط قوي بين x وy، نتحقق من ذلك بحساب معامل الارتباط:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2-(\sum y_i)^2}} = \frac{12(32880) - (78)(4695)}{\sqrt{12(650)-(78)^2}\sqrt{12(1914525)-(4695)^2}} = \frac{28350}{41.42 \times 965.02} =0.709$$

معامل الارتباط لبيرسون يساوي 0.71 تقريب، وهو قريب من 1، مما يعني وجود ارتباط قوي بين الزمن x والمبيعات y، وبالتالي نموذج الانحدار صالح لتمثيل العلاقة بين الزمن والمبيعات.

ومنه: **معادلة الاتجاه:** $\hat{y}_i=16,52\ x_i+283,87$

فيما يلي رسم خط الانحدار بواسطة برنامج Exel، يتضح وجود اتجاه عام، فالشريط بين الخطين المنكسرين المنقطين متزايد، مما على أن المبيعات متزايدة بتزايد الفصول والسنوات، كما يتضح وجود موسمية من الرسم حيث تتناقص المبيعات في الفصل الثالث من كل سنة، لتتزايد في الفصل الرابع، وهو ما يدل على أن نافذة الموسمية هي k=4 (أي كل أربع فصول يتكرر: ارتفاع بسيط ← انخفاض شديد← ارتفاع شديد ← ارتفاع.



2020 2021 2022

المرحلة الثانية: حساب القيم الاتجاهية $\hat{y}_i$ والمعاملات الموسمية أو الفصلية I_S (Indices saisonnières)

القيم الاتجاهية هي قيم المبيعات التي تقع على خط الاتجاه، وتحسب من خلال التعويض بقيم x_i في معادلة الاتجاه العام، ثم إيجاد المعاملات الموسمية I_S لكل فصل، أي لكل قيم x_i (i= 1,.....12)، وهذا بقسمة قيمة المبيعات الفعلية y_i على المبيعات الاتجاهية $\hat{y}_i$ المستخرجة من معادلة خط الاتجاه، وهذا لكل فصل وهو ما يوضحه الجدول التالي:

سنوات	الفصول x_i	مبيعات y_i	$\hat{y}_i$	$I_S=(y_i/\hat{y}_i)100$
2020	1	320	305,04	104,90
	2	325	319,40	101,75
	3	250	333,77	74,90
	4	380	348,14	109,15
2021	5	400	362,51	110,34
	6	420	376,88	111,44
	7	320	405,61	78,89
	8	480	419,98	114,29
2022	9	440	434,35	101,30
	10	440	448,72	98,06
	11	360	463,09	77,74
	12	560	477 ,45	117,29

المرحلة الثالثة: إيجاد المعاملات الموسمية المتوسطة

وذلك بتطبيق العلاقة:

المعامل الموسمي المتوسط لفصل ما = [مجموع المعاملات الموسمية لهذا الفصل ÷ عدد السنوات 3]

ومنه: المعامل الموسمي المتوسط للفصل الأول= (104.90+110.34+101.30)÷ 3= 1.0551

المعامل الموسمي المتوسط للفصل الثاني= (101.75+111.44+98.06)÷ 3= 1.0375

المعامل الموسمي المتوسط للفصل الثالث= (74.90+78.89+77.74) ÷ 3= 0.7718

المعامل الموسمي المتوسط للفصل الرابع= $(109.15+114.29+117.29) \div 3 = 1.1358$

المرحلة الرابعة: حساب التنبؤات الاتجاهية للمبيعات في كل فصل من فصول 2023 الأربعة:

بما أن رقم الفصل الأول من سنة 2023 في السلسلة الزمنية هو 13، والفصل الثاني هو 14، والفصل الثالث هو 15، والفصل الرابع هو 16. أي نكمل السلسلة الزمنية التي توقفت في الفصل الرابع من سنة 2022 ورقمه 12.

$\hat{y}_{13}= 16,52\ (13) + 283,87 = 498.63$

$\hat{y}_{14}= 16,52\ (14) + 283,87 = 512,15$

$\hat{y}_{15}= 16,52\ (15) + 283,87 = 531,67$

$\hat{y}_{16}= 16,52\ (16) + 283,87= 548,19$

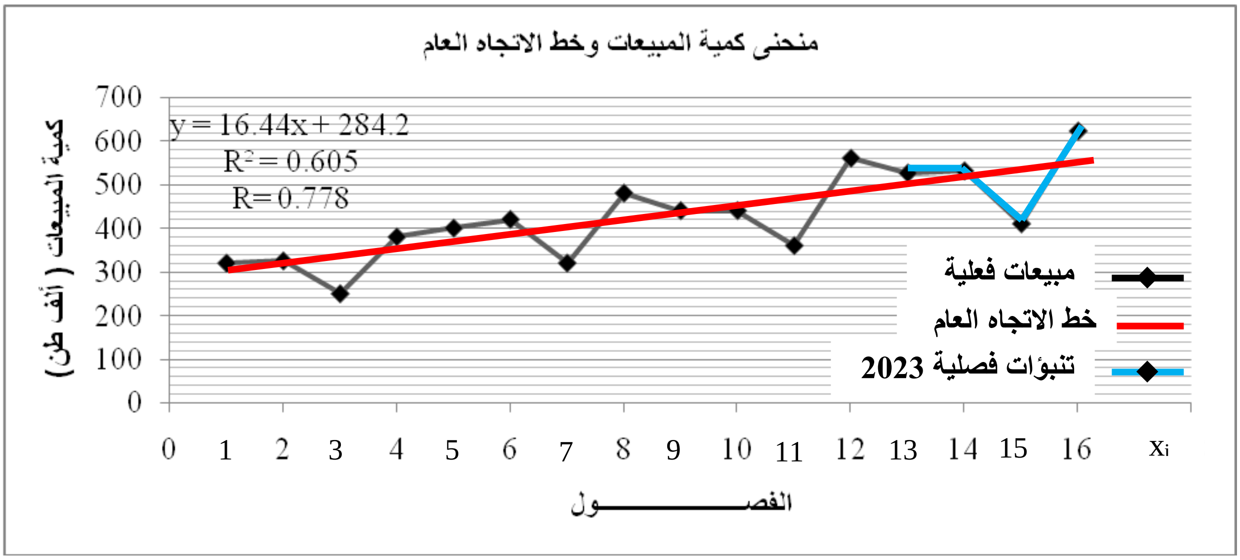
المرحلة السادسة والأخيرة: التنبؤ بالمبيعات الفصلية لسنة 2023

للتنبؤ بمبيعات الفصول الأربعة لسنة 2023، نقوم بتعديل هذه التنبؤات الاتجاهية لكل ثلاثي(لأنها تقع على خط الاتجاه العام)، وذلك باستخدام متوسط المعاملات الموسمية لكل فصل من الفصول الأربعة كما يلي:

$y_{13} = 498,63(1,0551)= 526,30$ $\qquad$ $y_{14} = 512,15(1,0375)= 531,35$

$y_{15} = 531,67(0,7718)= 410,34$ $\qquad$ $y_{16}=548,19(1,1358)= 622,63$

يمكن تمثيل العلاقة بين الزمن (الفصول) والمبيعات بعد إضافة الفصول الأربعة لـ 2023 $(x_i=13 ; 14 ; 15 ; 16)$، ونلاحظ أن معادلة خط الانحدارتقريبا مماثلة لنفس المعادلة قبل إضافة الفصول الأربعة لسنة 2023.



ملاحظة هامة (1): قبل التنبؤ بالمبيعات الموسمية لسنة 2023، يجب رسم التمثيل البياني للمبيعات خلال الفصول، وهنا يظهر وجود موسمية على الشكل السابق، حيث تنخفض المبيعات في الفصل الثالث، وترتفع في الفصل الرابع من كل سنة من السنوات الثلاث، مما يدل على وجود تغيرات موسمية، وهنا طريقة الاتجاه العام في التنبؤ تكون غير مناسبة، بل يجب استخدام طريقة المعاملات الموسمية أو الفصلية.

ملاحظة هامة (2): يمكن حل التمرين بحساب المعاملات الموسمية بطريقة أخرى، وهي بقسمة متوسط المبيعات الموسمية لكل فصل على المتوسط العام، ثم استخدامها في التنبؤ.

التمرين الخامس:

ورشة لتصليح زوارق الصيد تريد التنبؤ بعدد الطلبيات التي تتوقع تلقيها سنة 2024، تعطى البيانات التالية للطلبيات الفصلية لسنوات بين 2020 -2023:

السنوات	2020				2021				2022				2023			
المواسم	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4
المبيعات	18	30	4	24	30	46	16	44	52	56	30	58	58	72	50	74

المطلوب: 1. بين أن الطلب على خدمة إصلاح الزوارق تتسم بالموسمية، ثم أحسب معاملات الموسمية.

2. التنبؤ بعدد الطلبيات لفصول سنة 2024.

حل التمرين الخامس:

1. استكشاف الموسمية: نحسب متوسطات الفصول الأربعة ومتوسطات السنوات وانحرافاتها المعيارية كما في الجدول التالي:

	T_1	T_2	T_3	T_4	m_i	σ_i
2020	18	30	4	24	76/4=19	9.64
2021	30	46	16	44	136/4=34	12.08
2022	52	56	30	58	196/4=49	11.18
2023	58	72	50	74	254/4=63.5	9.94
m_j	158/4=39.5	204/4=51	100/4=25	200/4=50	165.5/4=41.375	

يمكن حساب المتوسط العام لكامل السلسلة بعدة طرق:

بقسمة مجموع مبيعات كل الفصول مقسوم على 16: $\bar{Y}= \sum m_{ij}/nk= (18+30+\ldots + 74)/16= 662/16= 41.375$

حيث: m_{ij} يمثل المبيعات للفصل j من السنة i، n عدد السنوات؛ k عدد الفصول في السنة (نافذة الموسمية)

بقسمة مجموع متوسطات السنوات على عدد السنوات وهو هنا 4: $\bar{Y} =\sum m_i/n= (19+34+49+63.5)/4= 41.375$

حيث: m_i يمثل متوسط المبيعات للسنة i: $i=1, \ldots n$

بقسمة مجموع متوسطات الفصول على عدد الفصول في السنة وهو 4: $\bar{Y} =\sum m_j/k= (39.5+51+25+50)/4= 41.375$

حيث: m_j يمثل متوسط المبيعات للفصل j: $j=1, \ldots k$

نلاحظ أن النتيجة متماثلة في كل الطرق.

نلاحظ من الجدول السابق أن:

- متوسطات الأسطر (السنوات) متزايدة: يوجد اتجاه عام متزايد (إذا كانت المتوسطات متقاربة أو متذبذبة: لا يوجد اتجاه عام).
- متوسطات الأعمدة (الفصول) متابعدة: توجد موسمية (إذا كانت متوسطات الأعمدة متقاربة أو في اتجه واحد: لا توجد موسمية).
- الانحرافات المعيارية للأسطر (الفصول) متقاربة: النموذج الملائم لتمثيل السلسلة هو النموذج الجمعي. (إذا كان التشتت متزايدا أو متناقصا فإن النموذج الجدائي هو الأنسب).

2. إيجاد معادلة الاتجاه العام (خط الانحدار)

باستخدام طريقة المربعات الصغرى، نجد معادلة خط الانحدار: $\hat{y}= ax + b$

السنوات	2020				2021				2022				2023			
المواسم	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4
x_i الفترات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_i المبيعات	18	30	4	24	30	46	16	44	52	56	30	58	58	72	50	74
x_iy_i	18	60	12	96	150	276	112	352	468	560	330	696	754	1008	750	1184
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
y_i^2	324	900	16	576	900	2116	256	1936	2704	3136	900	3364	3364	5184	2500	5476

$\sum x_i= 136$; $\sum y_i= 662$; $\sum x_iy_i= 6826$; $\sum x_i^2= 1496$; $\sum y_i^2= 33652$

$\bar{x}= 136/ 16=8.5$; $\bar{y}= 662/16= 41.375$;

حساب معامل الارتباط: R معامل الارتباط، V(x) هو تباين x؛ V(y) هو تباين y؛ σ_x وσ_y الانحرافات المعيارية

$R= [\sum x_iy_i/n - \bar{x}\,\bar{y}\,]/ [\sigma_x\, \sigma_y]$; $\sigma_x^2= \sum x_i^2/n - \bar{x}^2$; $\sigma_y^2= \sum y_i^2/n - \bar{y}^2$

$V(x)= \sum x_i^2/n - \bar{x}^2 = 1496/ 16 – (8.5)^2= 21.25 \Rightarrow \sigma_x= 4.61$

$V(y)= \sum y_i^2/n - \bar{y}^{\,2} = 33652/ 16 – (41.375)2= 391.36 \Rightarrow \sigma_y= 19.78$

$R= [\sum x_iy_i/n - \bar{x}\,\bar{y}\,]/[[\sigma_x\, \sigma_y]= [6826/16 – (8.5)(41.375)]/ [(4.61)(19.78)]= 0.8218$

ملاحظة (1): بما أن معامل الارتباط 0.82 قريب من 1، فيعني وجود علاقة ارتباط طردي بين الزمن (فصول أو سنوات) والمبيعات، وبأن معامل الارتباط موجب، فإن علاقة الارتباط طردية: تتزايد المبيعات y بتزايد الزمن x.

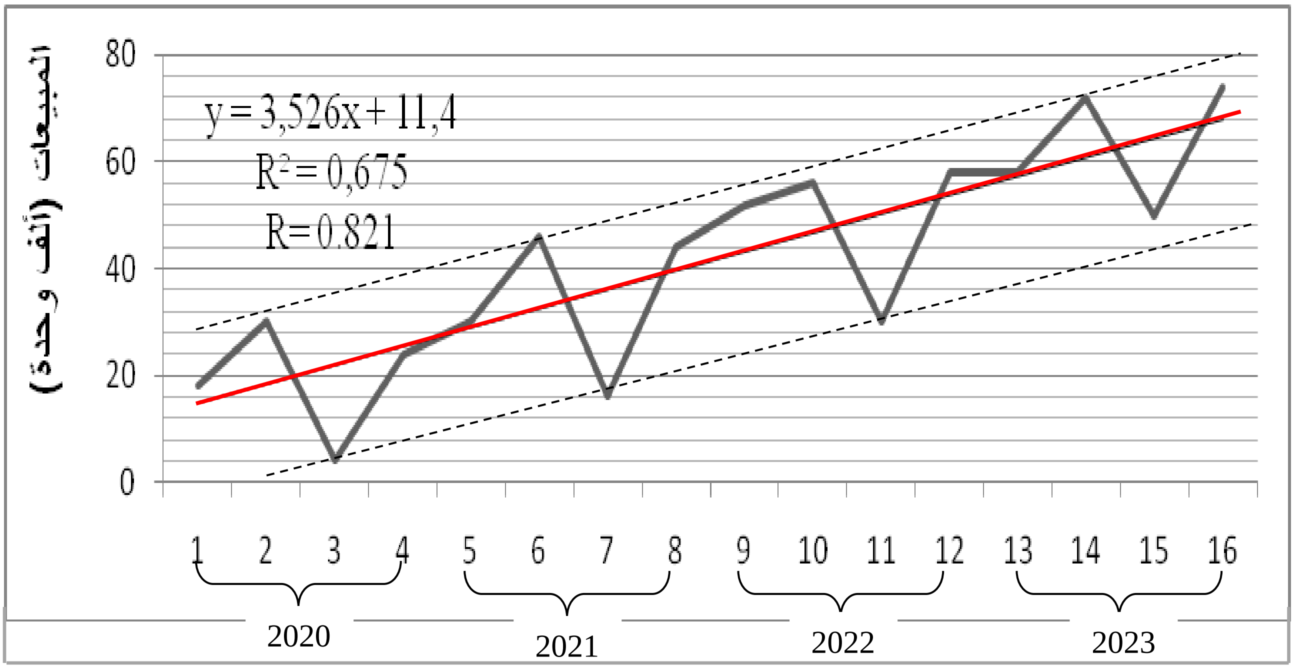
حساب معالم خط الانحدار:

a= [6826 – (16)(8.5)(41.375]/[1496- (16)(8.5²)]= 1199/ 340= 3.52

b= 41.375- (3.52)(8.5)= 11.45

ومنه معادلة خط الانحدار: $\hat{y}= 3.52\ x + 11.45$

ملاحظة (1): يمكن التعرف على وجود الاتجاه من خلال الرسم البياني للمبيعات بدلالة السنوات، باستخدام برنامج Exel مثلا وهو ما يوضحه الشكل التالي، حيث هناك تزايد في المبيعات بشكل عام من سنة لأخرى، رغم التغيرات ارتفاع وانخفاضا داخل كل سنة، وما يؤكده هو معادلة خط الانحدار: $\hat{y}=3{,}526\ x + 11{,}4$، فمعامل الانحدار الموجب 3.526 يدل على تزايد المبيعات، كما أن معامل الارتباط R=0.821 يدل على وجود ارتباط قوي بين المبيعات والزمن (السنوات)، ومعامل التحديد $R^2= 0{,}675$ يدل على أن 67.5% من التباين في المبيعات السنوية يمكن تفسيرها بمتغير الزمن x.



ملاحظة (2): يمكن التعرف على وجود الموسمية من الرسم البياني، حيث نلاحظ أن هناك انخفاض في المبيعات في فصل 3 من كل سنة، وارتفاع في المبيعات في فصل 4 من كل سنة، وبالتالي هناك تكرار لظاهرة الموسمية في كل سنة (ارتفاع ← انخفاض ← ارتفاع ← ارتفاع). أي أن نافذة الموسمية تساوي 4 (4 فصول في كل سنة).

ملاحظة (3): بما أن التمثيل البياني للمبيعات (الخط المنكسر) يقع بين خطين منقطين متوازيين، فإن النموذج الملائم لتمثل السلسلة هو النموذج الجمعي.

حساب المعاملات الموسمية:

المعامل الموسمي الأول: $S_1= 39.5/41.375 \approx 0.9547$

المعامل الموسمي الثاني: $S_2= 51/41.375 \approx 1.2326$

المعامل الموسمي الثالث: $S_3= 25/41.375 \approx 0.6042$

المعامل الموسمي الرابع: $S_1= 50/41.375 \approx 1.2084$

حساب القيم الاتجاهية والقيم التنبؤية للفصول الأربعة من سنة 2024:

$\hat{y}_{17}= 3.52\ (17) + 11.45 = 71.29 \Rightarrow y_{17}= 71.29 \times 0{,}9547= 68{,}06 \Rightarrow 68060$ وحدة مباعة

$\hat{y}_{18}= 3.52\ (18) + 11.45 = 74.81 \Rightarrow y_{18}= 74{,}81 \times 1.2326= 92{,}21 \Rightarrow 92210$ وحدة مباعة

$\hat{y}_{19}= 3.52\ (19) + 11.45 = 78.33 \Rightarrow y_{19}= 78{,}33 \times 0.6042 = 47{,}33 \Rightarrow 47330$ وحدة مباعة

$\hat{y}_{20}= 3.52\ (20) + 11.45 = 81.85 \Rightarrow y_{20}= 81{,}85 \times 1.2084 = 98{,}91 \Rightarrow 98910$ وحدة مباعة

تم ضرب المبيعات في 1000، لأن المبيعات في التمرين معطاة بالآلاف.

إجمالي مبيعات لـ 2024: 68.06 +92.21 +47.33 +98.91= 306.51 ألف وحدة تقريبا (أي306510 وحدة).

التمرين السادس:

تقوم شركة بغداد للصناعات الكهربائية بإنتاج العوازل الحرارية الأنبوبية قطر 5 مم. ومن خلال مبيعات السنوات الماضية لوحظ بان هناك علاقة بين نفقات الإعلان والطلب وكما في الجدول التالي:

السنوات	2019	2020	2021	2022	2023
مصاريف الإعلان (1000 دينار)	500	260	180	200	400
الطلب السنوي (1000 وحدة	132	58	82	50	110

المطلوب: استخدم أسلوب الانحدار الخطي لتقدير المبيعات السنوية إذا حددت مصاريف الإعلان السنوي بـ 310000 دينار.

حل التمرين السادس:

نسمي المبيعات (y) هي المتغير التابع وأن مصاريف الإعلان (x) هي المتغير المستقل.

نقوم بدراسة العلاقة بين متغيرن (مصاريف الإعلان والمبيعات)، وليس دراسة العلاقة بين المبيعات والزمن، وبالتالي فطريقة التنبؤ في هذه الحالة هي الطريقة السببية، أي الاستفادة من وجود علاقة سببية بين مصاريف الإعلان والمبيعات (مصاريف الإعلان هي السبب أو المؤثر، والمبيعات هي النتيجة أو المتأثر)، وذلك بتصميم نموذج رياضي لتلك العلاقة السببية (نموذج الانحدار الخطي)، ثم استخدامها في عملية التنبؤ.

1- نقوم بإجراء التحليل المبين في الجدول التالي:

السنوات	مصاريف الإعلان x	الطلب y	xy	x^2	y^2
2019	500	132	66000	250000	17424
2020	260	58	15080	67600	3364
2021	180	80	14400	32400	6400
2022	200	50	10000	40000	2500
2023	400	110	44000	160000	12100
المجموع	1540	430	149480	550000	41788

المتوسطات الحسابية:

$$\bar{X}=\frac{\sum x}{n}=\frac{1540}{5}=308 \qquad \bar{Y}=\frac{\sum y}{n}=\frac{430}{5}=86$$

2- إيجاد معالم خط الانحدار a , b

$$a=\frac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2}=\frac{149480-(5)(308)(86)}{550000-(5)(308)^2}=\frac{17040}{75680}=0.23$$

$$b= Y - a X= 86 - (0.23)(308)= 15.16$$

3- معادلة خط الانحدار التي تصف العلاقة بين مصاريف الإعلان والطلب:

$$y= 15.16 +0.23\, x$$

4- بما أن الشركة خصصت 310000 دينار كنفقات للإعلان فإن المبيعات المتوقعة تحسب كالآتي:

$$\hat{y}_{2024}= \hat{y}(310)= 0.23\,(310)+ 15.16= 86.46$$

أو: 86460 وحدة (لأن المبيعات بالآلاف).

معامل الارتباط Coefficient of Correlation مقياس لتوضيح قوة العلاقة بين متغيرين، وتتراوح قيمة هذا المعامل بين +1 إلى -1، ويأخذ الحالات التالية:

- معامل الارتباط بين متغيرين تساوي +1، فإن ذلك يشير إلى وجود علاقة طردية تامة بينهما، وكل النقاط على خط الانحدار.
- معامل الارتباط -1، فإن ذلك يشير إلى وجود علاقة تامة عكسية بين المتغيرين. وكل النقاط تقع على خط الانحدار المائل نحو الأسفل.

- معامل الارتباط مساوي إلى 0، فذلك يعني انعدام وجود الارتباط بين المتغيرين. فتزايد المتغير الأول قد ينتج عنه أحيانا تزايا المتغير الثاني وأحيانا تناقصه. وربما عدم تغيره.
- معامل الارتباط قريب من 1، وجود علاقة ارتباط طردية قوية بين المتغيرين، بزيادة المتغير الأول يزيد المتغير الثاني، والنقاط تقع بجوارو على خط الانحدار المتصاعد.
- معامل الارتباط قريب من -1، وجود علاقة ارتباط عكسية قوية بين المتغيرين، بزيادة المتغير الأول يتناقص المتغير الثاني، والنقاط تقع بجوارو على خط الانحدار المتنازل.

ويحسب معامل الارتباط بالمعادلة :

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2-(\sum y_i)^2}}$$

وبتعويض نتائج التحليل في الجدول السابق في المعادلة السابقة تحسب قيمة معامل الارتباط كالآتي:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2-(\sum y_i)^2}} = \frac{5(149480)-(1540)(430)}{\sqrt{5(550000)-(1540)^2}\sqrt{5(41788)-(430)^2}} = \frac{85200}{\sqrt{378400}\ \sqrt{21040}} = 0.89$$

نستنتج من ذلك إن العلاقة بين الطلب ونفقات الإعلان قوية.

وبالإمكان التحقق من معنوية (significance) هذه العلاقة وذلك بإجراء اختبار المعنوية الذي توضحه الخطوات التالية:

- نحدد مستوى معنوية Significance level، وليكن مثلا $\alpha= 0.05= 5\%$.
- باستخدام الجداول الإحصائية t- student، المعد خصيصاً لهذا الغرض (لأن حجم العينة n=5 أقل من 30)، نبحث عن القيمة الجدولية المقترنة بـ n =5 وبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، هذه القيمة تساوي 0.900.
- نحسب القيمة المعيارية t لــ r بالقاعدة التالية:

$$t = r\sqrt{\frac{n - 2}{1- r^2}} = (0.89)\sqrt{\frac{5 - 2}{1-(0.89)^2}} = 3.380$$

- نقارن القيمة المحسوبة لـ t مع القيمة الجدوليه، فنجد ان $0.900 < 3.380$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

نستنتج بان العلاقة بين الطلب ونفقات الإعلان علاقة حقيقية وليست مصادفة، والعكس بالعكس.