

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة محمد خيضر بسكرة
Université Med Kheider Biskra



UNIVERSITÉ
DE BISKRA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de : Génie Civil & Hydraulique

Polycopié de cours
BETON PRECONTRAIT
Cours et exercices corrigés

Elaboré par : Dr CHADLI mounira

Année 2022/2023

Avant-propos

Le présent document, photocopié de cours intitulé Béton précontraint cours et exercices corrigés est un support de cours destiné essentiellement aux étudiants master 2 matériaux en génie civil, master2 structures. Il leur permettra de mieux assimiler et d'approfondir leurs connaissances de base sur le matériau béton et celles concernant le calcul des ouvrages en béton précontraint, Ce support est structuré de la façon suivante :

- Le premier chapitre porte sur la présentation du béton précontraint et les matériaux utilisés et les modes de précontrainte,

Chapitre 2 :

Pertes de précontraint : Pertes instantanées, pertes différées, pertes en construction, pertes de prétention.

Chapitre 3 :

Calcul des poutres isostatiques à l'état limite de service : Section de calcul, combinaison de charge, classe de vérification, justification des contraintes normales, dimensionnement des sections, dimensionnement de la force de précontraint, trace des câbles, ferrailage passif longitudinal, justification des contraintes tangentielles.

Chapitre 4 :

Résistance d'une section de poutre à l'état limite ultime : combinaison des charges et comportement des matériaux, calcul de moment de résistance, justification des sollicitations tangentielles

Chapitre 5: Dispositions constructives

Sommaire

Introduction Générale	1
Chapitre I:Généralités	1
I.1 INTRODUCTION	4
I.2 PRINCIPE GENERAL DE LA PRECONTRAINTE.....	5
I.3 MODES DE PRECONTRAINTE	7
I.4 SYSTEMES DEPRECONTRAINTE	12
I.5 DOMAINED'APPLICATION	13
I.6 REGLEMENTATIONS	13
I.7 MATERIAUX UTILISES EN PRECONTRAINTE	13
I.8 CARACTERISTIQUES MECANIQUES:ARMATURES	17
I.9 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DESSECTIONS	22
I.10 EXERCICES.....	23
CHAPITRE II :Pertes de Précontrainte	28
II.1 DEFINITION	29
II.2 PERTES INSTANTANEEES	29
II.3 PERTES DIFFEREES	29
II.4 TENSION AL'ORIGINE	29
II.5 PERTES DE TENSION (ENPOST-TENSION)	30
II.6 LA PRECONTRAINTE PAR PRE-TENSION OU PAR FILS ADHERENTS	35
II.7 EXERCICES	37
CHAPITRE III :. Calcul des poutres isostatiques à l'état limite de service	50
III.1 GENERALITES.....	52
III.2 DEFINITION DES SECTIONS DECALCUL	52
III.3 COMBINAISON DE CHARGE.....	54
III.4 CLASSEDEVÉRIFICATION.....	56
III.5 JUSTIFICATION DES CONTRAINTES NORMALES.....	56
III.6 EVALUATIONDELAPRECONTRAINTE	60
III.7 SECTIONMINIMALEDEBETON	62
III.8ARMATURESPASSIVESLONGITUDINALES	63
III.9 JUSTIFICATION DES CONTRAINTES TANGENTIELLES	63
CHAPITRE IV:Résistance d'une section de poutre a l'état limite ultime	68
IV.1 GENERALITES	69
IV.2 EQUILIBRED'UNESECTIONALARUPTURE	69

IV.3 CARACTERISATION D'UN ETAT LIMITE ULTIME	69
IV.4 PRINCIPES DES JUSTIFICATIONS	70
CHAPITRE V: DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES	73
V.1 INTRODUCTION	74
V.2 TRACÉS DE CÂBLES	74
V.3 DISPOSITIONS PRATIQUES DE TRACES DE CABLAGE	75
V.4 CÂBLE MOYEN FICTIF	75
V.5 FUSEAU DE PASSAGE	75
V.6 EN PRECONTRAINTE PAR POST TENSION	76
V.7 PRECONTRAINTE PAR PRETENSION	77
V.8 EXERCICES	78
Références Bibliographiques	79

LISTE DES FIGURES

Figure 1: P outre en béton armée.....	4
Figure 2: Principe du béton armé	5
Figure 3: Principe du béton précontraint	5
Figure 4: Elément précontraint.....	6
Figure 5: La précontrainte par pré-tension	8
Figure 6: La précontrainte par post-tension.....	9
Figure 7: La mise en tension.....	10
Figure 8: Système d'ancrages fixes et mobiles.....	11
Figure 9: Le diagramme contrainte-déformation du béton	15
Figure 10: Diagramme contraintes-déformations acier.....	19
Figure 11: Tension par frottement.....	31
Figure 12:Poutre comportant des armatures transversales	64
Figure 13:Le diagramme des déformations	70
Figure 14: Poutre avec des armatures transversale	70

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: Diamètre nominal des fils	20
Tableau 2: Diamètre et la section conventionnelle des barres	20
Tableau 3: Diamètre et la section conventionnelle des torons	21

Introduction

Générale

La précontrainte est certainement l'innovation la plus importante de notre siècle dans le domaine des structures en béton. L'idée de précontraindre le béton afin de diminuer la fissuration est déjà ancienne, puisqu'en 1886 P. H. Jackson, aux Etats –Unis, proposait de comprimer les chaussées en béton au moyen de barres d'acier tendues à l'aide d'un pas de vis et un écrou. A cette époque, de nombreuses tentatives de précontrainte échouèrent, car on utilisait de l'acier normal dont la déformation élastique maximale est du même ordre de grandeur que le raccourcissement du béton dus au retrait et au fluage, de sorte que la précontrainte disparaissait progressivement avec le temps.

L'éminent ingénieur français Eugène Freyssinet (1879 –1962), souvent nommé le père de la précontrainte, fut le premier à mettre en évidence la nécessité d'utiliser un acier à très haute résistance pour créer un état d'autocontrainte permanent, dès 1928, il développa cette nouvelle technique, tant dans le domaine théorique que dans celui des applications pratiques. Il voyait dans la précontrainte une nouvelle philosophie des structures en béton en considérant comme un matériau de construction tout à fait nouveau, exempt de fissures grâce à l'absence complète de traction, il envisageait donc que la précontrainte totale, alors qu'aujourd'hui cette conception a perdu beaucoup de son importance.

Après la deuxième guerre mondiale, le béton précontraint connut un essor fulgurant (il y avait beaucoup de ponts à reconstruire) grand nombre de systèmes de précontrainte furent inventés et brevetés dans tous les pays industrialisés. Nous renonçons à les décrire dans ce cours.

La précontrainte tient actuellement une large place dans le domaine des structures en béton. Parmi ses avantages on cite en premier lieu la possibilité, essentielle par Freyssinet, d'éviter ou tout au moins de diminuer la fissuration et, par conséquent, également les déformations dans l'état de service. Toutefois, si l'on considère les aspects constructifs et économiques, il devient évident que l'avantage décisif de la précontrainte réside dans l'utilisation des aciers à très haute résistance.

Deux solutions sont alors couramment envisagées : les structures mixtes acier-béton, dans lesquelles on remplace le béton en zone tendue par des aciers de charpente qui travaillent bien en traction, et on connecte les deux matériaux de façon adéquate ; et les structures en béton précontraint, objet de ce cours.

L'emploi du béton précontraint reste très répandu dans les pays en voie de développement qui ne disposent pas des infrastructures nécessaires pour construire, acheminer et assembler des poutres métalliques dans des conditions économiques

Chapitre I:

Généralités

I.1 INTRODUCTION

Le béton est un matériau qui résiste bien à la compression, mais peu, et surtout aléatoirement, à la traction. IL est donc intéressant de construire en béton, mais en évitant que ce matériau soit trop tendu, et risque de se fissurer. Et pour cela, il faut le comprimer de façon artificielle et en permanence, dans des zones où les charges extérieures développent des tractions de façon qu'au total le béton reste comprimé (ou assez peu tendu pour ne pas risquer de fissurer) et donc résistant à tout cas de charge. L'effort de compression volontairement développé à cet effet est appelé l'effort de précontrainte (ou la précontrainte). Le remède ne doit pas pêcher par excès: la compression totale du béton doit rester inférieure à une valeur raisonnable de façon à éviter tout risque de fissuration longitudinale des éléments précontraints par excès de compression (alors que les tractions y développent généralement des fissures transversales).

Au total, un ouvrage en béton est dit en béton précontraint quand il est soumis à un système d'efforts créés artificiellement pour engendrer des contraintes permanentes, qui, composées avec les contraintes dues aux charges extérieures, donnent des contraintes totales comprises entre les limites que le béton peut supporter indéfiniment, en toute sécurité(Figure1).

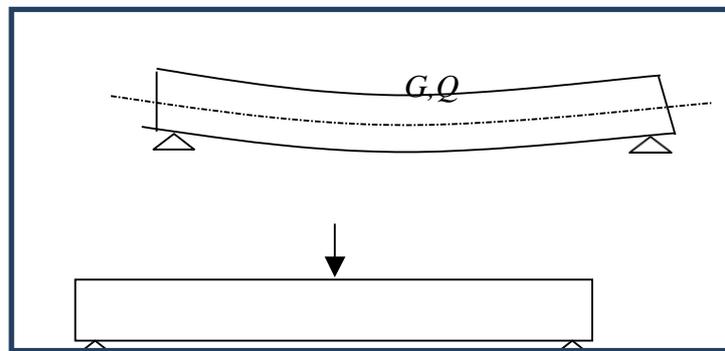


Figure 1: Poutre en béton armée [1]

La poutre subit également des contraintes de cisaillement dues aux efforts tranchants qui se produisent vers les appuis. Ces contraintes occasionnent des fissures à 45° que le béton ne peut reprendre seul.

Dans ce cas de figure, deux solutions sont possibles :

✚ **Solution N°1:** L'ajout d'une quantité d'armatures capable de reprendre les efforts de traction dans le béton (Principe du béton armé).

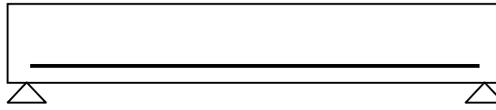


Figure 2 : Principe du béton armé [1]

✚ **Solution N°2** : L'application d'un effort de compression axial qui s'oppose aux contraintes de traction dues aux chargements (Principe du béton précontraint).

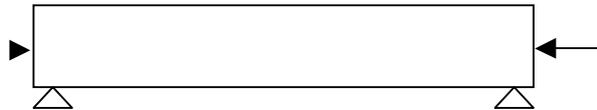


Figure 3: Principe du béton précontraint [1]

I.2 PRINCIPE GENERAL DE LA PRECONTRAINT

Le béton est un matériau qui résiste bien à la compression, mais peu, et surtout aléatoirement, à la traction. Il est donc intéressant de construire en béton, mais en évitant que ce matériau soit trop tendu, et risque de se fissurer. Pour cela, il faut le comprimer de façon artificielle et en permanence, dans des zones où les charges extérieures développent des tractions de façon qu'au total le béton reste comprimé (ou assez peu tendu pour ne pas risquer de se fissurer) et donc résistant à tout cas de charge. L'effort de compression volontairement développé à cet effet est appelé l'effort de précontrainte (ou la précontrainte).

La précontrainte a pour objectif, en imposant aux éléments un effort de compression axial judicieusement appliqué, de supprimer (ou fortement limiter) les sollicitations de traction dans le béton (Figure 4).

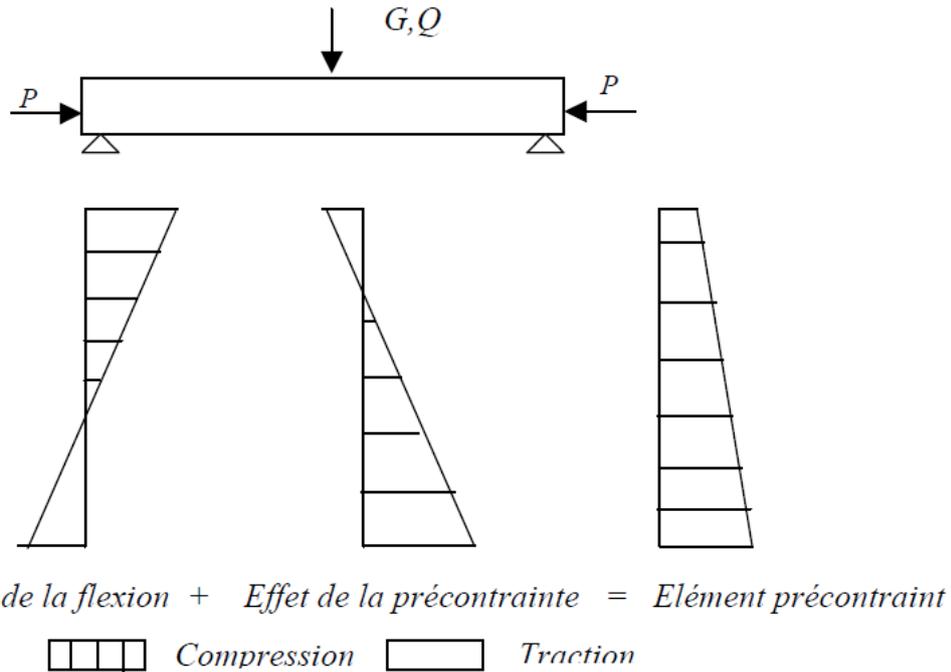


Figure 4: Elément précontraint [1]

Cette précontrainte peut être :

✓ **Une précontrainte totale**

La notion de précontrainte totale, introduite et défendue par Freyssinet, impliquait l'absence totale de traction dans le béton, ce qui constitue une condition très sévère. Cette conception avait un caractère quelque peu théorique, puisqu'elle exigeait une précontrainte dans toutes les directions (horizontale, verticale et transversale).

✓ **Précontrainte limitée**

Si les tractions tolérées dans le béton sont suffisamment faibles par rapport à la résistance à la traction, on évite la fissuration. Cela correspond à la « précontrainte limitée » (beschränkte Vorspannung), selon la norme allemande DIN 4227, cette norme indique, pour un béton B300 ($\beta_w = 300 \text{ kg/cm}^2$) par exemple, les valeurs suivantes :

$$\sigma_b (\text{arête}) = 30 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma_I (\text{âme}) = 20 \text{ kg/cm}^2$ (effort tranchant et torsion combinés). Ces contraintes correspondent environ à

« L'état limite de formation des fissures »

✓ **Une précontrainte partielle** : autorisation des contraintes de traction limitées.

I.3 MODES DE PRECONTRAINTE

I. 3. 1 : Introduction

La technique de la précontrainte comprend deux méthodes d'application principales :

- La pré-tension (anglais : tensioning).
- La post-tension (en anglais : post-tensioning).

Elles sont par fois désignées par d'autres expressions, mais les deux termes ci-dessus sont les plus claires pour exprimer la différence entre des deux méthodes.

I. 3. 2 Pré-tension

C'est une méthode utilisée en usine, pour préfabriquer des poutres précontraintes destinées à être incorporées dans des constructions en tant que « produits ».

Ce procédé peut être réalisé en usine ou sur chantier. La méthode suit généralement la procédure suivante :

- ✓ Préparation des moules (nettoyage, mise en place d'huile de décoffrage,...),
- ✓ Déroulement des armatures (fils adhérents ou torons) et blocage aux extrémités,
- ✓ Mise en place des armatures passives pour reprendre les efforts de traction,
- ✓ Mise en tension des fils ou torons par des vérins situés à une des extrémités
- ✓ Coulage du béton, lissage et vibration par vibration extérieure,
- ✓ Etuvage ou chauffage du béton pour accélérer son durcissement,
- ✓ Après un durcissement jugé suffisant (par calcul et essais antérieurs), détension et découpage des fils,
- ✓ Manutention et stockage des éléments en prenant soin de ne pas les retourner.

La pré-tension s'accommode mal d'un tracé de câbles ou de fils adhérents non rectilignes. L'excentricité y est donc constante. Cela limite l'usage de ce procédé. Il est toutefois possible, en utilisant des déviateurs, de constituer un tracé comportant trois segments rectilignes continus, mieux adaptés pour les sollicitations futures.

La précontrainte par pré-tension est très utilisée dans le domaine du bâtiment. Toutefois, il est difficile de dépasser des longueurs de poutres supérieures à 30m.

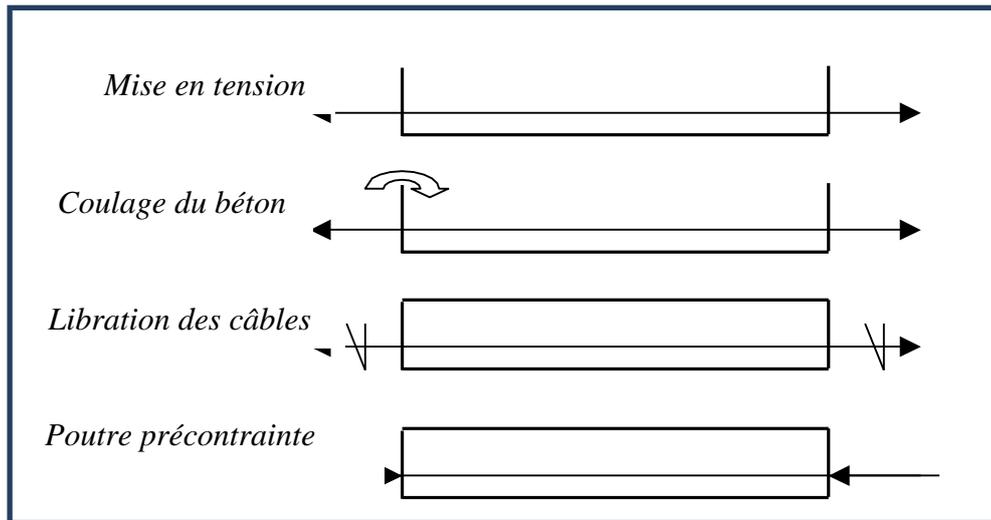


Figure 5: La précontrainte par pré-tension [1]

I. 3. 3 Précontrainte par post-tension

C'est la méthode la plus utilisée aujourd'hui, elle offre une très grande variété d'applications et se trouve parfois associée à la méthode précédente (préfabriquées à fils adhérents avec câble tendus sur chantier). La technique de post-tension consiste à prendre appui sur le béton déjà durci pour tendre le câble de précontrainte. L'élément en béton est donc coulé au préalable, avec des réservations pour le passage ultérieur de la précontrainte. Lorsque le béton atteint une résistance suffisante, le câble de précontrainte est enfilé et tendu à l'aide de vérins.

On distingue deux variantes : la post-tension interne et la post-tension externe.

Cas de la précontrainte par post-tension interne

- ✓ Mise en place du coffrage,
- ✓ Mise en place des armatures passives et les chaises support des gaines,
- ✓ Mise en place des gaines et fixation solides sur la cage d'armature,
- ✓ Mise en place des plaques d'appui et frettage adjacent aux extrémités des gaines,
- ✓ Coulage du béton,
- ✓ Pendant le durcissement, enfilage des câbles,
- ✓ Après un durcissement jugé suffisant (par calcul et essais antérieurs), mise en place des plaques d'ancrages et des clavettes de blocage des torons dans le vérin,

- ✓ Mise en tension d'un seul côté pour les câbles courts et des deux côtés pour les câbles longs.
- ✓ Injection d'un coulis (ou graisse minérale) afin de protéger les câbles.

Cas de la précontrainte par post-tension externe

- ✓ On coule le béton à température ambiante ou légèrement chauffé par calorifugeage.
- ✓ Les gaines sont placées à l'extérieur du béton (dans la zone intérieure du caisson) et dans la position finale de l'ouvrage.
- ✓ On glisse les câbles non adhérents dans les gaines.

Après un délai jugé suffisant, on effectue les mises en tension des câbles à des périodes et intervalles fonction du projet et des méthodes d'exécution de l'ouvrage. Le blocage se fait par différents systèmes de cales sur une zone de béton fretté.

On injecte un coulis de béton (micro béton) ou de la graisse minérale.

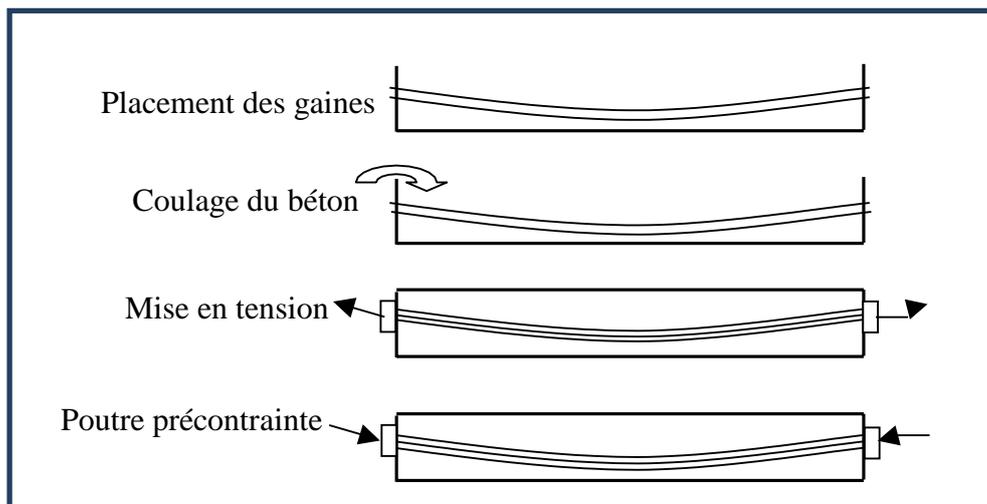


Figure 6: La précontrainte par post-tension [1]

La mise en tension peut être faite en tendant l'acier aux deux extrémités de la pièce (actif - actif) ou en tendant une seule extrémité uniquement (actif - passif) (Figure 7).

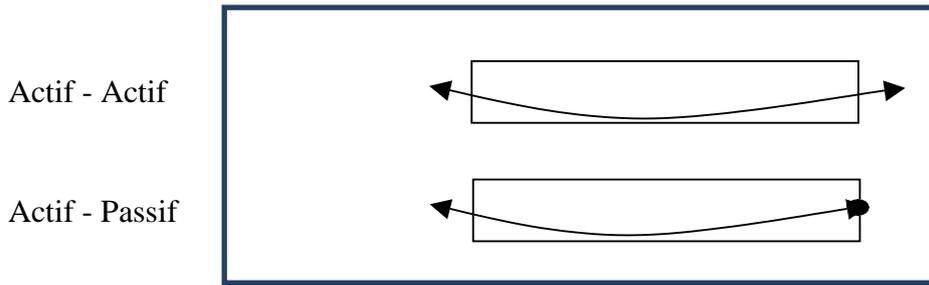


Figure 7: La mise en tension [1]

L'injection est une opération extrêmement importante, car elle assure un double rôle :

- 1) La protection des armatures de précontrainte contre la corrosion.
- 2) L'amélioration de l'adhérence entre les armatures et le béton.

L'opération de l'injection doit être réalisée dès que possible après la mise en tension des armatures. Le produit d'injection doit répondre aux impératifs suivants :

- ✓ avoir une assez faible viscosité pour couler facilement et pénétrer dans toutes les ouvertures et entre fils des câbles de précontrainte;
- ✓ conserver cette faible viscosité pendant un délai suffisant pour que l'injection puisse s'effectuer dans de bonnes conditions avant le début de prise;
- ✓ après durcissement, avoir une résistance suffisante pour assurer efficacement l'adhérence de l'armature au béton ;
- ✓ présenter un retrait minimal;
- ✓ ne pas être agressif vis-vis de l'acier de précontrainte.

Le produit d'injection était autrefois un mortier formé de ciment, de sable et de l'eau ; aujourd'hui le sable est à peu près complètement abandonné, au profit de coulis de ciment CPA, comportant un adjuvant.

L'ensemble d'un procédé de précontrainte comprend, généralement, les éléments suivants :

✚ Dispositif d'ancrage : on distingue, principalement, deux types d'ancrage :

-Les ancrages fixes

Destinés uniquement à retenir le câble, sans possibilité de le tirer. Ils peuvent être constitués par une ou plusieurs boucles (fig. 8), par une plaque incurvée si les fils sont munis de boutons (fig. 8), par des scellements rectilignes, s'il s'agit de torons (fig. 8), par des scellements ondulés (fig.8), etc. on peut également utiliser les ancrages mobiles comme ancrages fixes, en les bloquant préalablement.

-Les ancrages mobiles

Sur lesquels on applique le vérin lors de la mise en tension, qui comporte un dispositif de blocage retenant l'extrémité du câble, une fois celui-ci tendu. La plupart des systèmes permettent la mise en tension par étapes, en débloquant et rebloquant le câble.

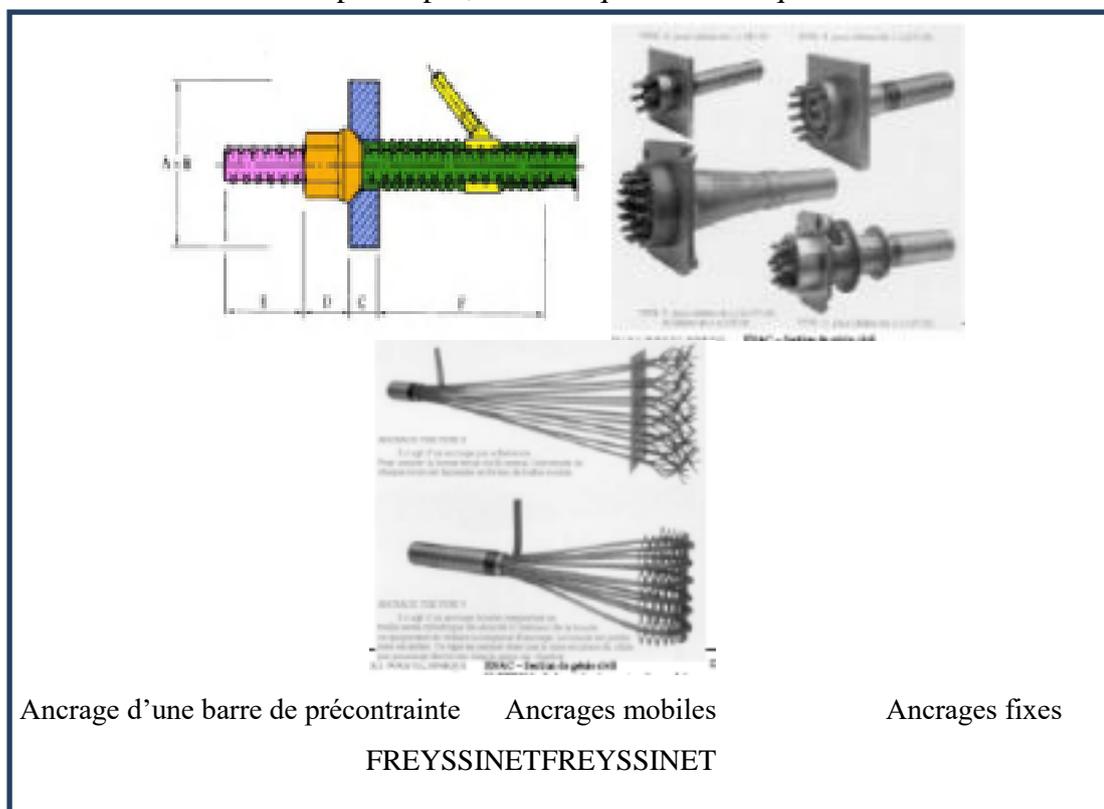


Figure 8: Système d'ancrages fixes et mobiles [2]

✚ Les coupleurs

Dispositif permettant les prolongements des armatures, Les coupleurs fixes permettent de raccorder un tronçon de câble à un autre tronçon déjà tendu. Les coupleurs mobiles joignent deux tronçons d'un câble mis en place successivement, mais tendus en une seule fois. Ces possibilités sont mises à profit dans la construction des ponts à l'avancement par travées.

L'accouplement de barres Dywidag est facile, puisqu'il suffit de placer un manchon fileté à la jonction des barres.

✚ **Matériels de mise en tension** : vérins, pompes d'injection, pompe d'alimentation des vérins etc.

✚ **Les accessoires** : gaines, tubes d'injection etc.

I. 3. 4 Comparaison des deux procédés

Une comparaison entre les deux procédés (post-tension et pré-tension) permet de constater les observations suivantes:

Pré-tension

- 1) L'économie des gaines, des dispositifs d'ancrage et de l'opération de l'injection.
- 2) La nécessité des installations très lourdes ce qui limite, par voie de conséquence, le choix des formes.
- 3) La simplicité de la réalisation du procédé.
- 4) Une bonne collaboration du béton et des armatures.
- 5) La difficulté de réalisation des tracés courbes d'armatures.
- 6) L'impossibilité de régler l'effort dans les armatures après la mise en tension.

Post- tension

- 1) Ne demande aucune installation fixe puisque ; c'est sur la pièce elle même que s'appuie le vérin de précontrainte.
- 2) Elle permet le choix des différentes formes.
- 3) La possibilité de régler l'effort de précontrainte, ce qui permet d'adapter le procédé à l'évolution de la masse de l'ouvrage.
- 4) La facilité de réalisation des tracés courbes d'armatures de précontrainte.

A côté de ces procédés classiques, il existe des procédés spéciaux qui sont réservés à certains ouvrages ou qui font appel à d'autres principes pour la mise en tension:

- Précontrainte par enroulement
- Précontrainte par compression externe
- Mise en tension par dilatation thermique
- Mise en tension par expansion du béton

I.4 SYSTEMES DE PRECONTRAINTE

Les systèmes de précontrainte font l'objet de brevets et sont fabriqués par leurs exploitants. Les principaux systèmes sont :

I.4.1 Système Freyssinet

Ce système utilise des câbles composés de torons T 13, T 13 S, T 15 et T 15 S. La lettre T est remplacée par la lettre K (exemple 12 K 15)

Système PAC

Ce système utilise des câbles composés de 1 à 37 T 13, T 13 S, T15 ou T 15 S.

Système CIPEC

Ce système utilise des câbles 4 T 13 à 19 T 13, 4 T 15 à 27 T 15, normaux et super.

Système VSL

Ce système utilise des unités 3 T 12 à 55 T 13, 3 T 15 à 37 T 15, normales ou super. Leur dénomination est de la forme 5-n pour n T 13 et 6-n pour n T 15. (exemple :6-37 représente un câble ou un ancrage 37 T15).

I.5 DOMAINE D'APPLICATION

L'invention du béton précontraint est due à l'ingénieur français Eugène Freyssinet. Les premières applications pratiques sont tentées en 1933. Dans les années qui suivent, les performances exceptionnelles de ce nouveau concept sont brillamment démontrées.

Grâce à ces avantages le béton précontraint est utilisé dans les ouvrages d'art et les bâtiments de dimensions importantes : il est d'utilisation courante pour les ponts et d'un emploi très répandu pour les poutrelles préfabriquées des planchers de bâtiments.

On le retrouve dans de nombreux autres types d'ouvrages, parmi lesquels nous citerons les réservoirs, les pieux de fondation et tirants d'ancrage, certains ouvrages maritimes, les barrages, les enceintes de réacteurs nucléaires.

I.6 REGLEMENTATIONS

IP1 : Instruction Provisoire n°1 du 12 Août 1965

IP2 : Instruction Provisoire n°2 du 13 Août 1973

BPEL 91 : Béton précontraint aux états limites Euro code 2 : (Béton Armé et Béton précontraint).

I.7 MATERIAUX UTILISES EN PRECONTRAINT

I.7.1Caractéristiques mécaniques : béton

Le béton doit également être de très bonne qualité. En effet, tant qu'il n'est pas précontraint, il risque de se fissurer sous l'effet de la gêne qu'apportent les coffrages à son retrait ; pour éviter cela, il faut mettre ce béton en précontrainte très tôt alors que, jeune encore, il présente une résistance limitée. Le béton doit donc être de haute résistance et

acquérir celle-ci très vite. Il est en effet très sollicité, au moment des mises en tension :

- ✚ en section courante, car la précontrainte a sa valeur maximale (les pertes n'étant pas encore effectuées) ; de plus, les charges extérieures (dont l'effet est opposé à celui de la précontrainte) sont souvent incomplètes (par exemple, si des superstructures ne sont pas encore mises en place),
- ✚ localement, sous ancrages, zones où s'exerce un effort très concentré.

Pour limiter la sollicitation du béton jeune, on tend fréquemment les câbles en plusieurs phases successives : du tiers à la moitié des câbles à 7 jours environ après coulage du béton (pour pouvoir décentrer la poutre, qui peut alors porter son poids), et le reste à une date généralement comprise entre 15 et 30 jours après coulage. De plus, on dispose souvent les ancrages dans une pièce d'about préfabriquée en béton fretté et suffisamment âgé pour pouvoir résister aux efforts localisés sous ancrages. De toute façon, la mise en précontrainte constitue pour le béton une épreuve préalable déterminante qui ne lui par donnerait pas une éventuelle médiocrité.

I.7.1.1 Résistance à la compression

Le béton est caractérisé par sa résistance en compression à 28 jours. La mesure de cette résistance se fait selon la norme NF EN 12390. Elle peut se faire sur cylindre ou sur cube. En France, elle se fait habituellement par écrasement d'éprouvettes cylindriques de 200cm² de section (diamètre $\Phi = 160\text{mm}$) et de 320mm de hauteur (épreuve dite « 16/32 »).

Pour les sollicitations qui s'exercent sur un béton âgé de moins de 28 jours, on se réfère à la résistance caractéristique f_{cj} . Les règles BAEL et BPEL donnent, pour un âge $j \leq 28$ jours et pour un béton non traité thermiquement:

Si $f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$ donc :

$$f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28}$$

Et si $f_{c28} > 40 \text{ MPa}$

$$f_{cj} = \frac{j}{1.40 + 0.95j} f_{c28}$$

Au-delà de $j=28$ jours, on admet pour les calculs que $f_{cj} = f_{c28}$

I.7.1.2 Résistance à la traction

La résistance caractéristique à la traction, à l'âge de « j » jours, notée f_{tj} , est conventionnellement définie par la formule:

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}$$

f_{tj} et f_{cj} sont exprimées en MPa (ou N/mm²)

I.7.1.3 Déformations longitudinales instantanées

A défaut de résultats expérimentaux probants, on adopte pour le module de déformation longitudinale instantanée du béton noté E_{ij} , une valeur conventionnelle égale à:

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

Le module de déformation longitudinale différée E_{vj} est donné par :

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

✚ I.7.1.4 Diagramme Contrainte -Déformation

Le diagramme caractéristique contrainte-déformation du béton a l'allure schématisée sur la figure.9 dite " parabole - rectangle".

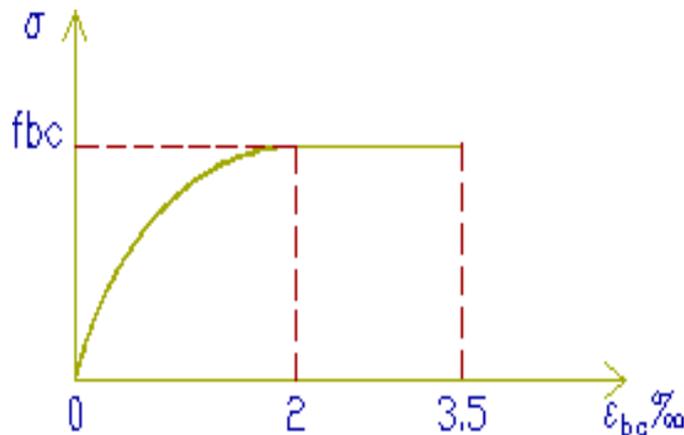


Figure 9 : Le diagramme contrainte-déformation du béton [4]

Le diagramme de calcul comporte un arc de parabole du second degré depuis l'origine des coordonnées et jusqu'à son sommet de coordonnées $\sigma_{bc} = 2\%$ et d'une contrainte de compression de béton donnée par : $\sigma_{bc} = 0,85 \cdot f_{cj} / \theta \cdot \gamma_b$

Le coefficient θ prend en compte la durée probable d'application de la combinaison d'actions .

- ✓ $\theta = 1$ $t > 24$ heures
- ✓ $\theta = 0,9$ $1 h \leq t \leq 24 h$
- ✓ $\theta = 0,85$ $t < 1 h$

I.7.1.5 Déformations différées

Retrait

Le retrait est le raccourcissement spontané du béton au cours de son durcissement en l'absence de toute contrainte. Le retrait a plusieurs origines, mais les deux effets principaux sont le retrait d'origine chimique, dit « retrait endogène » et le retrait de dessiccation ou retrait de séchage. Le retrait endogène est dû à une diminution du volume de béton du fait de la réaction chimique de prise du béton. Les molécules avant réaction chimique occupent en effet un volume plus élevé que les molécules après réaction, ce qui engendre donc une diminution de volume. Le retrait de dessiccation provient de l'évaporation des molécules d'eau non consommées par la réaction chimique. Ceci entraîne également un raccourcissement du béton. La déformation relative de retrait qui se développe dans un intervalle de temps (t_1, t) peut être évaluée au moyen de la formule:

$$\varepsilon_r(t_1, t) = \varepsilon_r [r(t) - r(t_1)]$$

avec :

ε_r : la déformation finale de retrait

$r(t)$: la loi d'évolution du retrait, qui varie de 0 à 1 lorsque le temps t , compté à partir de la fabrication du béton, varie de zéro à l'infini.

La loi d'évolution du retrait est donnée par:

$$r(t) = t / (t + 9 r_m)$$

t : l'âge du béton, en jours, compté à partir du jour de fabrication, et r_m le rayon moyen de la pièce, exprimé en centimètres :

$$r_m = B/u$$

B: L'aire de section

u: Le périmètre de la section

Dans le cas des bétons de structures précontraintes, réalisés avec du ciment Portland, la déformation finale de retrait peut être évaluée par la formule:

$$\varepsilon_r = k_s \varepsilon_0$$

Le coefficient k_s dépend du pourcentage des armatures adhérentes $\rho_s = A_s / B$, rapport de la section des armatures passives longitudinales (et, dans le cas de la pré-tension, des armatures de précontrainte adhérentes) à la section transversale de la pièce.

$$K_s = 1 / (1 + 20 \rho_s)$$

Il s'exprime par la formule:

Le coefficient ε_0 dépend des conditions ambiantes et des dimensions de la pièce. On prendra dans l'eau : $\varepsilon_0 = - 60.10^{-6}$

Fluage

Par définition, c'est le raccourcissement progressif du béton sous contrainte constante, retrait déduit. Ce phénomène est, lui aussi, lié à la migration de l'eau à l'intérieur du béton.

Coefficient de poisson

Le coefficient de poisson du béton est pris égal à :

- 0,20 en zones nonfissurées
- zéro en zones fissurées

Coefficient de dilatation thermique

A défaut de résultats expérimentaux, le coefficient de dilatation thermique est pris égal à 10^{-5} par degré C.

I.8 CARACTERISTIQUES MECANIQUES: ARMATURES

Armatures de précontrainte

I.8.1 Formes

On trouve les armatures de précontrainte sous trois formes : les fils ; les barres ; les torons.

I.8.1.1 Fils

Par convention, les fils ont un diamètre inférieur ou égal à 12,2 mm, ce qui permet de les livrer en couronnes. Ils peuvent être soit ronds et lisses (pour la post-tension) soit au contraire nervurés, ou crantés, ou ondulés afin d'améliorer leur adhérence au béton (pré-tension). Les fils les plus couramment utilisés ont des diamètres de 5 mm, 7 mm ou 8 mm.

I.8.1.2 Barres

De diamètre supérieur ou égal à 12,5 mm, elles ne sont livrées que rectilignes (et sous longueur maximale de l'ordre de 12 m). Elles peuvent être soit lisses, soit nervurées, les

nervurations faisant alors office de filetage grossier (cas des barres Dywidag). Les diamètres les plus courants sont 26 mm, 32 mm et 36 mm. Mais il existe des barres plus grosses (Macalloy ϕ 40, 50 et même 75 mm). De telles armatures ne sont employées qu'en post-tension.

I.8.1.3 Torons

Ce sont des ensembles de fils enroulés hélicoïdalement les uns sur les autres (cas des torsades à trois fils) ou autour d'un fil central en une ou plusieurs couches. Les torons les plus courants sont à 7 fils et sont désignés par leur diamètre nominal (diamètre du cercle circonscrit aux fils dans une section droite). Les diamètres les plus utilisés sont les suivants : 12,5 mm (fréquemment désigné par T13) 12,9 mm (T13S)

Cours de béton précontraint 29 15,2 mm (T15) 15,7 mm (T15S) Ces armatures sont employées aussi bien en pré-tension (dans les pièces importantes) qu'en post-tension.

Enfin, par le passé, certains procédés de précontrainte (PCB notamment) ont utilisé des torons à plusieurs couches de fils périphériques (torons à 37 ou 61 fils).

I.8.2 Diagramme contraintes-déformations

Il est d'abord linéaire (phase élastique OI, la pente de la droite OI étant le module d'élasticité E_p de l'armature), puis il s'incurve, pour aboutir à un quasi-palier plastique (Figure.10). Enfin, la rupture survient pour une contrainte f_{pk} et un allongement relatif ϵ_{uk} . On attache une importance fondamentale à ce qu'elle ne se produise que moyennant une striction importante (caractérisée par le coefficient de striction ζ , réduction relative de l'aire de la section droite au niveau de la rupture). Généralement, on exige : $\epsilon \geq 20\%$; $\epsilon_{uk} \geq 3,5\%$,

Le diagramme contraintes-déformations permet de définir une autre caractéristique importante de l'armature de précontrainte : sa limite conventionnelle d'élasticité $f_{p0,1k}$. C'est l'ordonnée du point d'intersection du diagramme avec la droite de pente 200 000 MPa passant par le point d'ordonnée nulle et d'abscisse 10^{-3} .

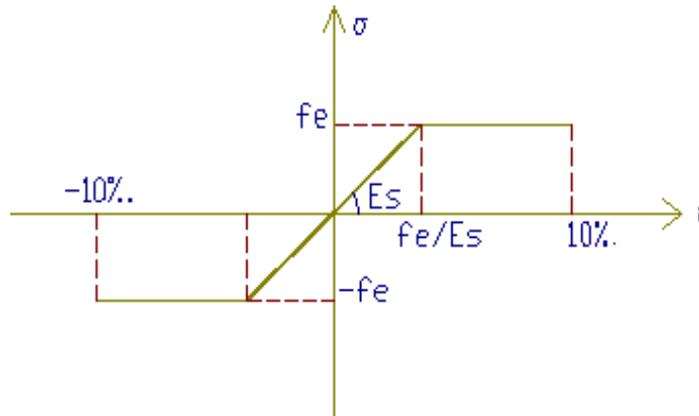


Figure 10: Diagramme contraintes-déformations acier [3]

L'aptitude de l'armature à rester solidaire au béton

Cette aptitude est caractérisée par les coefficients d'adhérence dits de fissuration et de scellement désignés respectivement par η et ψ .

Coefficients de fissuration : $\eta = 1$ ronds lisses

$\eta = 1.6$ barres HA ou fils HA de diamètre supérieur ou égal à 6mm

$\eta = 1.3$ fils HA de diamètre inférieur à 6mm

Coefficients de scellement: $\psi = 1$ ronds lisses

$\psi = 1.5$ barres HA ou de fils HA

✚ Armatures actives

Les aciers actifs sont les aciers de la précontrainte, ils sont mis à des tensions. A l'inverse des armatures de béton armé qui se contentent d'un acier de qualité courante, les armatures de précontrainte exigent un acier satisfaisant un certain nombre de conditions.

Elles ont été classées par :

- ✓ Catégorie: fils, barres, torons.
- ✓ Classe de résistance.

✚ Qualités requises

- Une résistance mécanique élevée.
- Une ductilité suffisante.
- Une bonne résistance à la corrosion.
- Une faible relaxation.
- Un coût aussi bas que possible.

I.8.2 Caractères géométriques

Les fils

Les fils sont des armatures dont la plus grande dimension transversale est inférieure à 12.5mm ; ils sont livrés encouronnés.

On distingue:

- les fils d'acier ronds et lisse de symbole L,
- les fils autres que ronds et lisses de symbole L.

Les fils sont définis par leur diamètre nominal auquel correspond une section nominale conventionnelle, suivant le tableau.1

Tableau 1: Diamètre nominal des fils [1]

Diamètre	4	5	6	7	8	10	12.2
Section	12.6	19.6	28.3	38.5	50.3	78.5	117

Les barres

Les barres sont définies comme des armatures ronds et lisses de diamètre supérieur à 12.5mm, ou non ronds ou non lisses ne pouvant être livrées encouronnées.

Les caractères géométriques sont le diamètre et la section conventionnellement définie suivant le tableau.2

Tableau 2: Diamètre et la section conventionnelle des barres [1]

Diamètre	20	22	26	32	36
Section	314	380	531	804	1018

Les torons

Un toron est un assemblage de 3 ou 7 fils enroulés en hélice et répartis en une couche, éventuellement autour d'un fil central.

Les torons sont caractérisés par le nombre de leur fils, par leur diamètre, et par leur section. Le tableau.3 fournit les valeurs correspondantes.

Tableau 3: Diamètre et la section conventionnelle des torons [1]

Type	3fils	7fils	7fils	7fils standard	7fils standard	7fils super	7fils super
Diamètre	5.2	6.85	9.3	12.5	15.2	12.9	15.7
Section	13.6	28.2	52	93	139	100	150

I.8.3 Caractères de calcul

Les caractères des armatures de précontrainte à prendre en compte dans les calculs sont:

- ✓ section nominale de l'armature;
- ✓ la contrainte maximale garantie à rupture f_{prg}
- ✓ la contrainte à la limite conventionnelle d'élasticité f_{peg}
- ✓ coefficient de relaxation ρ_{1000}

$\rho_{000} = 2,5 \%$ pour la classe TBR (Très Basse Relaxation)

$\rho_{000} = 8 \%$ pour la classe RN (Relaxation Normale)

- ✓ adhérence au béton;
- ✓ coefficient de dilatation thermique 10^{-5} par degréC.
- ✓ module de deformation longitudinale:

$E_p = 200\ 000$ MPa pour les fils et les barres

$E_p = 190\ 000$ MPa pour les torons

- ✓ Diagramme efforts-déformations.

I.9 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

La résolution des problèmes d'RDM fait appel à des caractéristiques géométriques des sections droites des corps étudiés. Le principe fondamental consiste à déterminer les contraintes qui agissent dans une section et de comparer la contrainte maximale avec la contrainte limite : $\sigma \leq [\sigma]$

- Traction simple $\sigma = F/B$
- Flexion simple $\sigma = MY/I$
- Flexion composée $\sigma = F/B + M Y/I$

Les caractéristiques géométriques à étudier sont:

- ✓ Aire de la section $B[\text{cm}^2]$
- ✓ Moments statiques S_x et $S_y[\text{cm}^3]$
- ✓ Moments d'inertie axiaux I_x et $I_y[\text{cm}^4]$
- ✓ Moments d'inertie centrifuges $I_{xy}[\text{cm}^4]$
- ✓ Moments d'inertie polaires $I_p[\text{cm}^4]$
- ✓ Module de résistance W_x et $W_y[\text{cm}^3]$
- ✓ Module de résistance de torsion $W_p[\text{cm}^3]$
- ✓ Rayon de giration i_x et $i_y[\text{cm}]$
- ✓ Rendement d'une section ρ

Moment statique

Les moments statiques de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les expressions :

Si l'axe X ou l'axe Y passe par le centre de gravité de la section, les moments statiques S_x et S_y sont nuls.

Moment d'inertie

Les moments d'inertie de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les formules :

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Le moment d'inertie polaire d'une section est donné par : $I_p = I_x + I_y$

✚ Module de résistance

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée.

$$W_x = \frac{I_x}{y}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x}$$

✚ Rayon de giration

On appelle rayon de giration la quantité donnée par l'équation :

$$ix = \sqrt{\frac{I_x}{B}}$$

$$iy = \sqrt{\frac{I_y}{B}}$$

✚ Rendement d'une section

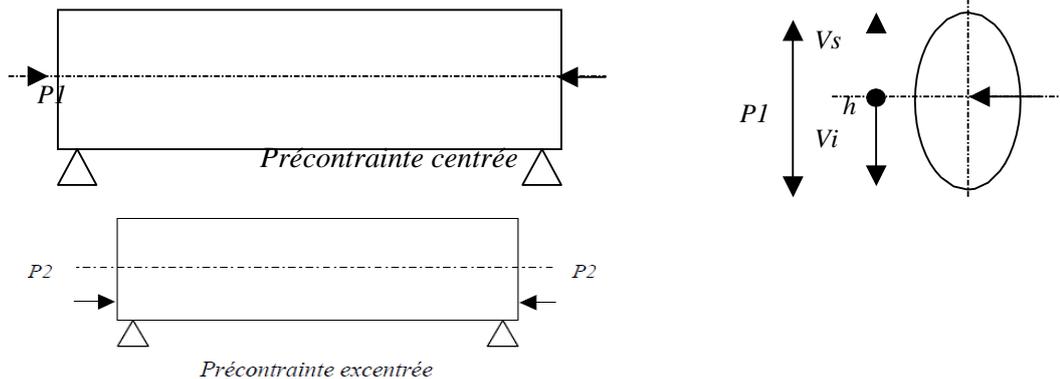
Le rendement d'une section est donné par :

$$\rho = I / B \cdot V_i \cdot V_s$$

I.10 EXERCICES

EXERCICE 1

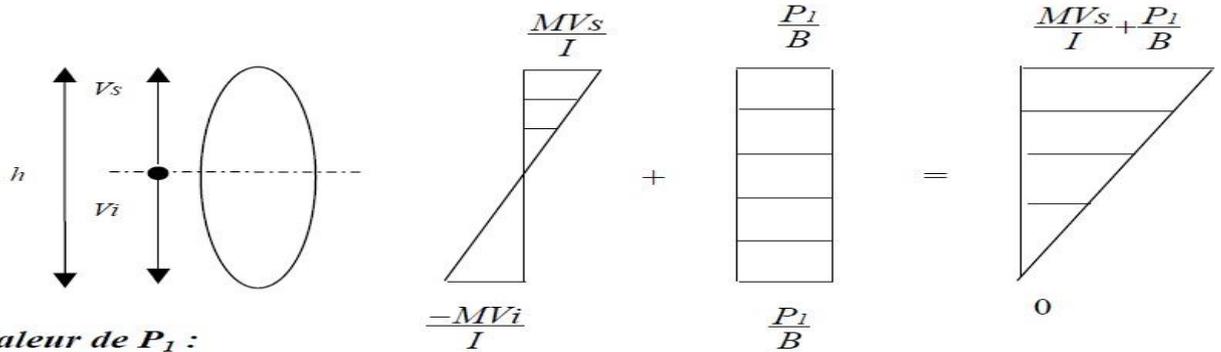
Soit la section rectangulaire (60,140) cm soumise à un moment extérieur $M=0.90$ MNm. de précontrainte $P1$ centrée et $P2$ excentrée, en supposant que l'on puisse excentrer au maximum de $e = -0.45$ m la position du câble.



- Déterminer la valeur de P_1 et P_2 .
- Schématiser le diagramme des contraintes centré P_1 et P_2 excentré

Solution :

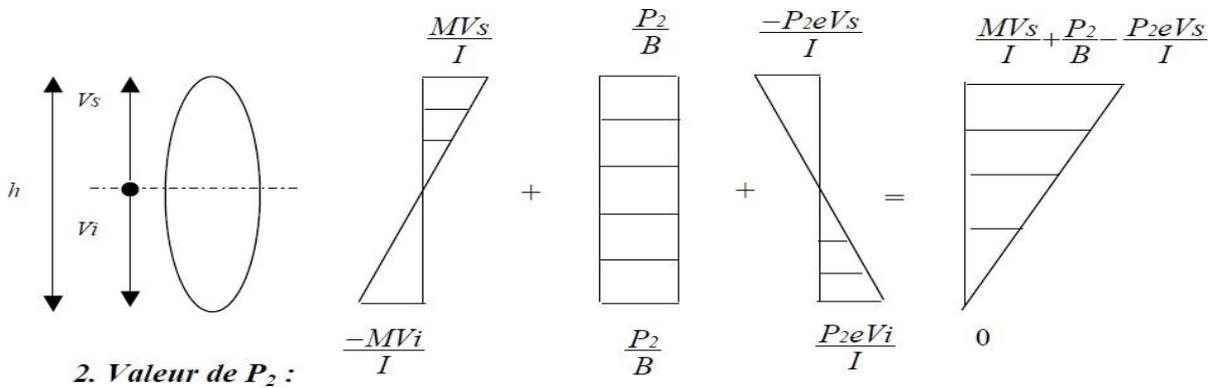
1. Diagramme des contraintes



2. Valeur de P_1 :

$$-\frac{MVi}{I} + \frac{P_1}{B} = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{MVi}{I} B$$

Donc $P_1 = 4,07 \text{ MN}$



2. Valeur de P_2 :

$$-\frac{MVi}{I} + \frac{P_2}{B} + \frac{P_2 e Vi}{I} = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{MVi}{I \left(\frac{1}{B} + \frac{e Vi}{I} \right)}$$

Donc $P_2 = 3,93 \text{ MN}$

Exercice 2 :

- 1) Déterminer la force de précontrainte P_0 appliquée au vérin pour que la poutre n'admet pas de traction en section médiane, sachant que la somme de précontrainte à mi-travée représente 25 % P_0 , $g = 1.5 \text{ t/m}$; $q = 1.15 \text{ t/m}$; $L = 10 \text{ m}$; $Bb (30 \times 60)$.
- 2) Déterminer la force de précontrainte P_0 avec une excentricité $e = h/6$

Solution:

- 1) Valeurs de P_0 sachant que $\Delta P = 25\% P_0$

D'après le diagramme des contraintes on a:

$$P(L/2) = P_0 - 0.25 P_0 = 0.75 P_0$$

$$-Mg.v_i/I - Mq.v_i/I + P(L/2)/Bb = 0 \quad \text{avec } Mg = g.L^2/8 \quad \text{et} \quad Mq = q.L^2/8$$

$$\text{Donc } P_0 = 6(Mg + Mq) / 0.75 \times h$$

$$\mathbf{P_0 = 441.67 \text{ t}}$$

- 2) $M(P(L/2)) = 0.75 P_0.e$ donc on a $-6Mg/bh^2 - 6Mq/bh^2 + 0.75 P_0/bh + 0.75 P_0.6.e/bh^2 = 0$

$$\text{Donc } P_0 = 4/h. (Mg + Mq) = 4/0.6 (18.75 + 14.375)$$

$$\mathbf{P_0 = 220.83 \text{ t}}$$

Exercice 3:

Déterminer, pour un béton de $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$, les caractéristiques mécaniques suivantes :

- La résistance à la compression au jour $j = 7$ et 90 jours
- La résistance à la traction au jour $j = 7$ et 90 jours
- Module de déformation longitudinal instantané au jour $j = 7$ et 90 jours
- Module de déformation longitudinal différé au jour $j = 7$ et 90 jours

Solution

- 1) La résistance à la compression au jour $j = 7$ et 90 jours

$$\mathbf{J = 7 \text{ jours} : } f_{c7} = j/4.76 + 0.83.J \times f_{c28} = 19,86 \text{ MPa}$$

$$\mathbf{J = 90 \text{ jours} : } \text{on } f_{c90} = f_{c28} = 30 \text{ MPa}$$

- 2) La résistance à la traction au jour $j = 7$ et 90 jours

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}$$

$$J = 7 \text{ jours} : f_{t7} = 1,8 \text{ MPa}$$

$$J = 90 \text{ jours} : f_{t90} = f_{t28} = 2,4 \text{ MPa}$$

3) Le module de déformation longitudinale instantanée du béton E_{ij}

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

$$E_{i7} = 29788,76 \text{ MPa}$$

$$E_{i90} = 34179,6 \text{ MPa}$$

4) Le module de déformation longitudinale différée E_{vj} :

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

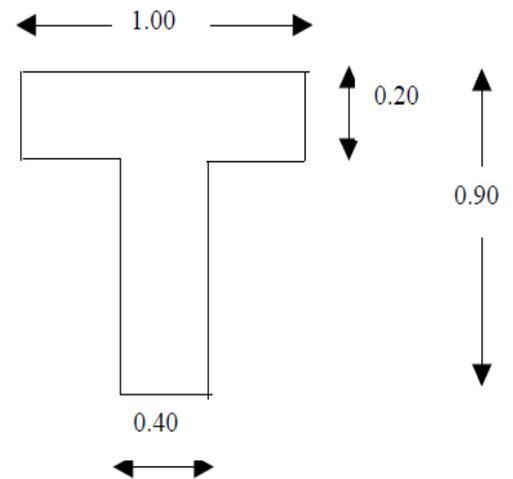
$$E_{v7} = 10019,85 \text{ MPa}$$

$$E_{v90} = 11496,76 \text{ MPa}$$

Exercice 4 :

Déterminer, pour une poutre en T, les caractéristiques géométriques suivantes :

- L'aire de la section (B)
- Le moment statique (S)
- La distance de la fibre supérieure (V_s) et la distance de la fibre inférieure (V_i)
- Le moment d'inertie (I)
- Le module de résistance (W)
- Le rayon de giration (i)
- Le rendement de la section (ρ)

**Solution**

- L'aire de la section(B)

$$B = \Sigma B_i = 0.48 \text{ m}^2$$

- Le moment statique(S)

$$S = \Sigma B_i \cdot d_i = 0.174 \text{ m}^3$$

- La distance de la fibre supérieure (V_s)

$$V_s = S/B = 0.363 \text{ m}$$

- La distance de la fibre inférieure (V_i)

$$V_i = h - V_s = 0.537 \text{ m}$$

- Le moment d'inertie(I)

$$I = \Sigma I + \Sigma B_i \cdot d_i^2 = 0.03572 \text{ m}^4$$

- Le module de résistance(W)

$$W_s = I/V_s = 0.0984 \text{ m}^3$$

$$W_i = I/V_i = 0.0665 \text{ m}^3$$

Le rayon de giration(i)

$$i = \sqrt{I/B} = 0.273 \text{ m}$$

- Le rendement de la section(ρ)

$$\rho = I/B \cdot V_s \cdot V_i = 0.382$$

CHAPITRE II :

Pertes de Précontrainte

II.1 DEFINITION

La force de précontrainte dans un câble varie à la fois dans l'espace (le long de l'abscisse du câble) et dans le temps.

La tension en un point du câble dans la structure diffère de la force du vérin avec lequel le câble a été tendu, du fait d'un certain nombre de pertes qui font baisser significativement la tension du câble. C'est d'ailleurs à cause de ces pertes qu'on est obligé d'utiliser des câbles à très haute limite d'élasticité.

On regroupe habituellement les pertes en deux familles :

II.2 PERTES INSTANTANÉES

Il s'agit des pertes qui se produisent à la mise en tension du câble. Elles comportent :

- ✓ Pertes dues au frottement
- ✓ Pertes aux ancrages
- ✓ Par abus de langage, on classe également dans les pertes instantanées, l'ensemble des pertes qui se produisent « à court terme » durant le processus de construction de l'ouvrage :
- ✓ Pertes par non simultanéité des mises en tensions des différents câbles.
- ✓ Pertes par application de charges permanentes postérieurement à la tension.

II.3 PERTES DIFFÉREES

On appelle pertes différées, les pertes qui se développent dans le temps :

- ✓ Pertes dues au retrait du béton
- ✓ Pertes dues au fluage du béton
- ✓ Pertes dues à la relaxation des câbles.

En post tension, l'effort de précontrainte varie à la fois :

- dans l'espace, avec l'abscisse le long du câble, du fait de frottement;
- dans le temps, à cause du retrait et du fluage du béton et de la relaxation des aciers.

En pré tension, l'effort de précontrainte varie principalement dans le temps du fait de l'application successive des actions.

II.4 TENSION AL'ORIGINE

C'est la tension qu'on impose aux armatures devant un ancrage actif et le dispositif d'épanouissement associé (trompette ou tromplaque), côté béton, au moment de la mise en tension, avant le transfert de l'effort à l'ancrage. Les efforts de précontrainte sont variables le long des armatures et dans le temps. Ils sont évalués à partir de la valeur probable de la

tension à l'origine, notée « σ_{p0} ». Ils ne doivent pas non plus dépasser la plus faible des valeurs suivantes :

Min ($0,80f_{prg}$, $0,90f_{peg}$) en post-tension

Min ($0,85 f_{prg}$, $0,95f_{peg}$) en pré-tension

II.5 PERTES DE TENSION (EN POST-TENSION)

II.5.1 Pertes de tension instantanées

Dans le cas de la post-tension, les armatures de précontrainte subissent des pertes de tension instantanées qui sont:

- les pertes de tension par frottement;
- les pertes de tension par recul de l'ancrage;
- les pertes de tension par déformations instantanées du béton.

La valeur totale de ces pertes de tension instantanées, dans une section d'abscisse « x » de l'armature, est notée $\Delta\sigma_{pi}(x)$.

La tension au point d'abscisse x , après pertes de tension instantanées, appelée tension initiale, est notée : $\sigma_{pi}(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi}(x)$

II.5. 1.1 Perte de tension par frottement

Ce type de perte se produit par frottement des câbles sur la gaine lors de la mise en tension.

Le tension appliquée σ_{p0} à l'origine diminue entre le point d'application et un point donné d'abscisse « x » (Figure II.1), sa nouvelle valeur est donnée par la relation :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} e^{-(f \alpha + \phi x)}$$

σ_{p0} : La tension à l'origine ;

e : La base des logarithmes népériens ;

f : Coefficient de frottement en courbe (rd^{-1}) ;

α : Somme des déviations angulaires arithmétiques du câble sur la distance x (rd) ;

φ : Coefficient de frottement en ligne (m^{-1}) ;

x : La distance de la section considérée (m).

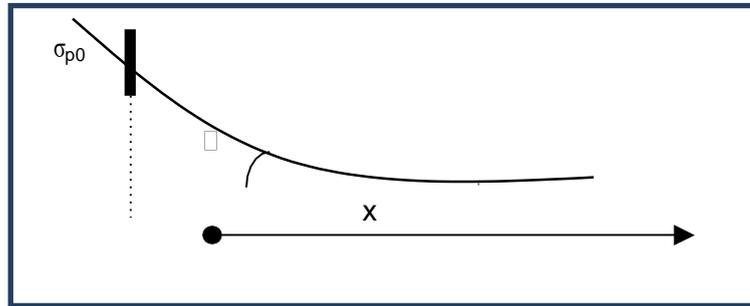


Figure 11: Tension par frottement [3]

La perte de tension par frottement est estimée par la formule:

$$\Delta\sigma_{\text{frot}}(x) = \sigma_{p0} - \sigma_p(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(f\alpha + \varphi x)})$$

Si l'exposant est faible, on peut admettre la relation suivante :

$$\Delta\sigma_{\text{frot}}(x) \cong \sigma_{p0} (f\alpha + \varphi x)$$

II.5. 1.2 Perte de tension par recul del'ancrage

Cette perte de tension résulte du glissement de l'armature par rapport à son ancrage, du tassement ou de la déformation del'ancrage.

Son influence diminue à partir de l'ancrage jusqu'à s'annuler à une distance « d » à partir de laquelle la tension demeure inchangée.

Le glissement à l'ancrage « g », qui dépend du type d'ancrage, est donnée par la relation:

$$g = -\frac{1}{E_p} \int_0^d [\sigma_p(x) - \sigma'_p(x)] dx$$

En pratique, en assimilant les branches d'exponentielle à des droites, la perte par recule d'ancrage peut être évaluée à partir de l'aire d'un triangle dans ce cas, on a :

$$g E_p = (\sigma_{pA} - \sigma_{pA1}) \frac{d}{2} \quad g E_p = (\sigma_{pA} - \sigma_{pA1}) \frac{d}{2}$$

$$g E_p = (\sigma_{pA} - \sigma_{pA1}) \frac{d}{2}$$

La longueur du glissement du bloc d'ancrage est donnée par :

$$d = \sqrt{\frac{gEl_{AB}}{\sigma_{pA} - \sigma_{pB}}}$$

II.5. 1.3 Perte de tension par déformations instantanées du béton

L'application de toute contrainte sur le béton entraîne sa déformation instantanée. S'il se raccourcit sous l'effet d'une compression, les câbles sous tension qui lui sont incorporés se raccourcissent de la même valeur et, de ce fait, perdent de leur tension.

Lors de la mise en tension d'une famille de n câbles, la mise en tension ne peut s'effectuer qu'un câble après câble. La contrainte apportée par chacun d'eux vaut : σ_b/n , avec σ_b contrainte finale sur le béton.

$\Delta\sigma_{racc}(x) = n-1/2n \cdot E_p/E_{ij} \cdot \sigma_b(x)$

avec :

n : nombre de gaines

E_p : module d'élasticité des armatures ;

E_{ij} : module instantané du béton au jour « j » ;

$\sigma_b(x)$: contrainte normale du béton :

$$\sigma_b(x) = \frac{P}{B_n} + \frac{Pe^2(x)}{I_n} + \frac{M(x)e(x)}{I_n}$$

$P = (\sigma_{po} - \Delta\sigma_{frot} - \Delta\sigma_{recu}) A_p$

$e(x)$: excentricité du câble de précontrainte.

Remarque

Le BPEL préconise de prendre un coefficient « 2 » pour les variations de contraintes dues à la contrainte relative à la phase de mise en tension et aux actions permanentes appliquées simultanément à cette mise en tension, et la valeur de « 1 » pour les variations de contrainte dues aux actions permanentes postérieures à cette phase de précontrainte, y compris celles dues aux armatures de précontrainte mises en tension ultérieurement.

II.5.2 Pertes de tension différées

Dans le cas de la post-tension, les armatures de précontrainte subissent des pertes de tension différées qui sont:

- Perte de tension due au retrait du béton
- Perte de tension due au fluage du béton
- Perte de tension due à la relaxation de l'acier

La valeur totale de ces pertes de tension différées, dans une section d'abscisse « x » de l'armature, est notée $\Delta\sigma_{pd}(x)$.

La tension au point d'abscisse x, après pertes de tension instantanées, appelée tension finale, est notée: $\sigma_{pf}(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_{pi}(x) - \Delta\sigma_{pd}(x)$

II.5.2.1 Perte de tension due au retrait du béton

Le raccourcissement du béton dû au retrait entraîne dans les aciers un raccourcissement égal. Il en résulte une diminution de tension dans les câbles de précontrainte, dont la valeur est :

$$\Delta\sigma_r = E_p \times \varepsilon_r [r(t) - r(t_1)]$$

ε_r : retrait total du béton

t_1 : l'âge du béton au moment de sa mise en précontrainte

$r(t)$: une fonction traduisant l'évolution du retrait en fonction du temps

Très souvent, on peut négliger $r(t_1)$ devant 1, ce qui conduit à la **formule simplifiée** suivante:

$$\Delta\sigma_r \approx E_p \times \varepsilon_r$$

II.5.2.2 Perte de tension due au fluage du béton

Lorsqu'une pièce est soumise, à partir de sa mise en précontrainte, à des actions permanentes subissant des variations dans le temps, la perte finale de tension due au fluage du béton est prise égale à :

$$\Delta\sigma_{fl} = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) E_p / E_{ij}$$

σ_b^M : contrainte maximale dans le béton ; après les pertes instantanées

σ_b^F : contrainte finale dans le béton; après les pertes différées

j : l'âge du béton lors de sa mise en précontrainte.

Si $\sigma_b^M \leq 1,5 \sigma_b^F$, il est loisible, à titre de simplification, d'évaluer la perte finale de tension due au fluage du béton à :

$$\Delta\sigma_{fl} = 2,5 \sigma_b^F E_p / E_{ij}$$

et comme $E_p / E_{ij} \approx 6$, on aura donc :

$$\Delta\sigma_{fl} = 15 \sigma_b^F$$

II.5.2.3 Perte de tension due à la relaxation de l'acier

La perte finale de tension due à la relaxation de l'acier est donnée par :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = \frac{6\rho_{1000}}{100} \left[\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right] \sigma_{pi}(x)$$

$\sigma_{pi}(x)$: Contrainte dans les armatures de précontrainte; après les pertes instantanées.

ρ_{1000} : Coefficient de relaxation à 1000 h

f_{prg} : Contrainte limite garantie à la rupture

μ_0 étant un coefficient pris égal à :

0,43 pour les armatures à très basse relaxation (TBR).

0,30 pour les armatures à relaxation normale (RN).

0,35 pour les autres armatures.

II.5.2.4 Perte de tension différée totale

La formule donnée pour la relaxation suppose que la longueur de l'armature est constante ; or la perte par relaxation est diminuée par l'effet du raccourcissement due au retrait et fluage du béton.

Pour tenir compte de cette interaction, le BPEL propose de minorer forfaitairement la relation par le coefficient 5/6.

Ainsi, La perte différée finale est prise égale à : **$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + 5/6 \Delta\sigma_{rel}$**

Lorsqu'il est nécessaire de tenir compte de l'évolution des pertes de précontrainte en fonction du temps, on peut admettre que la valeur totale des pertes différées $\Delta\sigma_d(t)$,

évaluée « j » jours après la mise en tension du groupe d'armatures considéré, suit la loi suivante :

$$\Delta\sigma_d(t) = r(j) \Delta\sigma_d$$

La fonction $r(j)$ étant identique à la fonction $r(t)$

II.6 LA PRECONTRAINTE PAR PRE-TENSION OU PAR FILS ADHERENTS

t : est l'âge du béton au moment de la mise en précontrainte effective de l'élément préfabriqué.

II.6.2 Perte d'ue à la relaxation de l'acier sur le banc

Elle s'exprime en fonction de la tension $\sigma_{pmt}(x)$ de l'armature après son blocage à l'ancrage, soit: $\sigma_{pmt} = \sigma_0 - \Delta\sigma_g$

Et par suite : $\Delta\sigma_p = 6/100 \times \rho_{1000} \times (\sigma_{pmt}/f_{prg} - \mu_0) \cdot \sigma_{pmt}(x)$.

Dans la précontrainte par pré-tension, il est fréquent que le béton soit soumis à un traitement thermique en vue d'accélérer son durcissement et de permettre ainsi un démoulage précoce. Dans ce cas :

- La perte par retrait est pratiquement nulle,
- La perte par relaxation est accélérée par l'effet de la température,
- La perte d'origine thermique est évaluée à :

$$\Delta\sigma_{\theta_{max}} = E_p \cdot \alpha_c \cdot (\theta_{max} - \theta_0) (1 - \lambda)$$

α_c : est un coefficient pris égal à 0.10

θ_0 et θ_{max} sont les températures de l'armature à la mise en tension, puis maximale.

Sur le banc, la perte supplémentaire par relaxation, par suite du traitement thermique, peut atteindre 50 à 70 % de la relaxation finale à 1000 heures, avec des armatures TBR. La perte $\Delta\sigma_p$ est ici très importante.

II.6.3 Perte par déformation instantanée du béton

$$\Delta\sigma_c = E_p \cdot \sigma_{cj} / E_{ij} (1 + K_i)$$

Où $K_i = 0$ si la contrainte σ_{cj} de compression sur le béton est inférieure ou égale $0.5 f_{cj}$ et

$$K_i = 4(\sigma_{cj}/f_{cj} - 0.5)^2$$

Si σ_{cj} est compris entre $0.5 f_{cj}$ et $0.66 f_{cj}$.

Après ces pertes instantanées, la tension initiale du fil ou toron est:

$$\sigma_{pi} = \sigma_{p0} - \Sigma \Delta \sigma_p \text{ avec } \Sigma \Delta \sigma_p = \Delta \sigma_g + \Delta \sigma_p + \Delta \sigma_{\theta \max} + \Delta \sigma_c$$

Il faut maintenant y rajouter les pertes différées dues au retrait, au fluage, à la relaxation au traitement thermique avec déformation instantanée dues aux phases de chargement.

I.6.4 La perte par retrait total

Conduit à enregistrer une valeur du retrait variant de $1,5$ à 4×10^{-4} suivant les régions $E_p = 200000$ MPa, la chute de contrainte dans l'acier peut ainsi être $\Delta \sigma_r = \epsilon_r \times E_p$ et varier de 30 à 80 MPa.

II.6.5 La perte par fluage différé

Correspond à deux fois le raccourcissement instantané, ce qui théoriquement correspond à trois fois le raccourcissement instantané, il est cependant admis que la perte finale due au fluage du béton est :

$$\Delta \sigma_{fl} = 2.5 \cdot \sigma_c \cdot E_p / E_{ij}$$

σ_c : est la contrainte finale du béton dans la section, au niveau des armatures de précontrainte.

II.6.6 La perte due à la relaxation finale

Pourra correspondre à la formule note précédemment, mais en y introduisant σ_{pi} au lieu de σ_{pmt} car σ_{pi} , en un point de l'armature, résultante de σ_{p0} diminuée de toutes les pertes instantanées et éventuellement d'une partie déjà note des pertes par retrait et par relaxation, d'où la formule

$$\Delta \sigma_p = 0.06 \rho_{1000} (\sigma_{pi}/f_{prg} - \mu_0) \sigma_{pi}$$

Nous pouvons maintenant indiquer que la perte finale (initiale et différée) est prise égale à :

$$\Delta \sigma_d = \Delta \sigma + \Delta \sigma_{fl} + 5/6 \Delta \sigma_p$$

Et que par conséquent la valeur finale σ_{fin} de la tension de l'armature appelée le plus souvent valeur probable de la précontrainte s'exprime à partir de la tension initiale σ_{p0} .

$$\sigma_{fin} = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_d$$

C'est la valeur prise en pré-tension à armatures rectilignes mais dans le cas d'utilisation d'armatures non rectilignes utilisant des déviateurs, seuls des essais pourront permettre de déterminer la perte par frottement due aux déviateurs. Cependant si la mise en tension des fils ou torons est effectuée après mise en tension rectiligne suivie d'une déviation verticale.

II.7 EXERCICES

Exercice 1

Une poutre isostatique en post-tension de section rectangulaire $1\text{m} \times 0,8\text{m}$ de 20m de portée, armée de 5 câbles, dont les principales caractéristiques avec le module d'élasticité de l'acier de 200000 MPa , sont les suivantes :

- Contrainte de rupture garantie : $f_{prg} = 1750\text{ MPa}$
- Contrainte d'élasticité garantie : $f_{peg} = 1550\text{ MPa}$
- Relaxation à 1000 heures R.N $\rho_{1000} = 5\%$

Le tracé du câble est parabolique. Le recul d'ancrage du procédé utilisé est $g = 1\text{mm}$

- Le coefficient de frottement en courbe est $f = 0.18\text{ rad}$
- La perte de tension par mètre due aux déviations parasites est $\varphi = 0.002\text{ /m}$

Les câbles sont tendus d'un seul côté et comportent donc un ancrage passif chacun.

- Pour le béton la contrainte caractéristique $f_{c28} = 48\text{ MPa}$, $\sigma_{bc} = 9.68\text{ MPa}$, $j = 10\text{ jours}$
- Déformation de retrait $\varepsilon_r = 2.5 \times 10^{-4}$, $\mu_o = 0.3$

- 1) Déterminer les pertes instantanées à mi-travée:
- 2) Calculer la tension initiale à mi-portée.
- 3) Calculer les pertes différées
- 4) Calculer la tension finale à mi-portée.

Solution

La tension à l'origine

$$\sigma_{p0} = \min(0,9f_{peg}, 0,8f_{prg}) \text{ donc } \sigma_{p0} = 1395\text{ MPa}$$

1) **Les pertes instantanées**

La perte due au frottement:

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0}(1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)})$$

Avec: $\alpha = 1.718^\circ \rightarrow \alpha = 0.03(\text{rd})$ donc $\Delta\sigma_{frott}(10) = 35,43\text{MPa}$

✚ **La perte due au recul d'ancrage:**

$$\rightarrow d = 7,5\text{m}, \text{ comme } d < x = 10\text{m}$$

$$\text{donc: } \Delta\sigma_{rec}(10) = 0\text{MPa}$$

✚ **La perte due au raccourcissement du béton :**

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = n - 1/2n \cdot E_p/E_{ij} \cdot \sigma_b(x) = 5 - 1/2.5 \cdot 200000/38842.65 \cdot 9.68$$

$$\Delta\sigma_{racc}(10) = 19,93\text{MPa}$$

✚ **Les pertes instantannées totales:** $\Delta\sigma_{pi}(10) = 55,36\text{MPa}$

2) **La tension initiale:** $\sigma_{pi}(10) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1339,64\text{MPa}$

3) **Les pertes différées:**

✚ **La perte due au retrait du béton:**

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r \quad \text{donc:} \quad \Delta\sigma_{ret}(10) = 50\text{MPa}$$

✚ **La perte due au fluage du béton:**

$$\Delta\sigma_{fl} = 15 \sigma_b \quad \text{donc } \Delta\sigma_{fl} = 145,2\text{MPa}$$

✚ **La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte:**

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = \frac{4\sigma}{100} \left[\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right] \sigma_{pi}(x)$$

$$\Delta\sigma_{rel}(10) = 187.084 \text{ MPa}$$

✚ **Les pertes différées totales:** $\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + 5/6 \Delta\sigma_{rel} = 330.50 \text{ MPa}$

4) La tension finale :

$$\sigma_{pf}(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_{pi}(x) - \Delta\sigma_{pd}(x) = 1009.14 \text{ MPa}$$

Exercice 2

On étudie une poutre de section rectangulaire isostatique de post-tension de longueur de 22.00 m qui supporte le platelage d'une passerelle située en bord de mer. La charge permanente reprise par cette poutre, hors poids propre, est de 7 kN/ml. Les charges d'exploitation sont de 6 kN/ml. Cette poutre est précontrainte par post-tension par l'intermédiaire de 3 câbles 7T13S, de limite d'élasticité 1660 MPa et de limite de rupture 1860 MPa, et de section unitaire de toron de 100 mm². Les gaines sont de type feuillard de 60 mm de diamètre, injectées d'un coulis de ciment. un béton de résistance $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$.

Après 14 jours de durcissement du béton, la mise en précontrainte est réalisée à partir d'une seule section d'about et les câbles sont tendus successivement.

Le tracé moyen des câbles est parabolique jusqu'à 6 m de l'appui puis rectiligne, tel que représenté sur la coupe longitudinale. Les figures ci-dessous présentent le tracé des câbles le long de la poutre et le tracé du câble moyen sur la demi-travée.

- 1) Calculer les caractéristiques géométriques et mécaniques.
- 2) Calculer les sollicitations maximales.
- 3) Déterminer les pertes instantanées à mi-travée, en M :
 - a) Perte par frottements. On prendra $f = 0,19d^{-1}$ et $\varphi = 0,001m^{-1}$. Vous indiquerez également les valeurs des pertes par frottement aux points caractéristiques B, C et D.

b) Perte par recul d'ancrage, les clavettes rentrant de 5 mm. Si $d > x$ donc $\Delta\sigma_{\text{recu}}(x) = 2.P.(d-x)$

Avec $P = \Delta\sigma_{\text{frott}}(x)/X$

c) Perte par déformation élastique du béton.

d) Calcul de la tension initiale à mi-portée.

Solution

1) Calcul des caractéristiques géométriques et mécaniques.

✓ L'aire de la section (Bb)

$$Bb = \sum B_i = 0.44 \text{ m}^2$$

✓ La distance de la fibre supérieure et inférieure (V_s)(V_i)

$$V_s = V_i = 0.55 \text{ m}$$

✓ Le moment d'inertie(I)

$$I = b \times h^3 / 12 = 0.0443 \text{ m}^4$$

✓ $e_p = - (V_i - C) = - 0.46 \text{ m}$

✓ Le rayon de giration(i)

$$i = \sqrt{I/B} = 0.317 \text{ m}$$

✓ Le rendement de la section (ρ)

$$\rho = I / B.V_s.V_i = 0.332$$

✓ La résistance à la compression au jour $j = 14$ jours

$$J = 14 \text{ jours} : f_{c7} = j/4.76 + 0.83.J \times f_{c28} = 29,91 \text{ MPa}$$

✓ La résistance à la traction au jour $j = 7$ et 90 jours

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}$$

$$J = 14 \text{ jours} : f_{t14} = 2.394 \text{ MPa}$$

✓ Le module de déformation longitudinale instantanée du béton E_{ij}

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

$$E_{i14} = 34145.34 \text{ MPa}$$

✓ Le module de déformation longitudinale différée E_{vj} :

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

$$E_{v14} = 11485,25 \text{ MPa}$$

2) Calcul des sollicitations maximales

$$M_g = g \cdot L^2 / 8 = 423,5 \text{ KN.m}$$

$$M_q = q \cdot L^2 / 8 = 363 \text{ KN.m}$$

✚ **La tension à l'origine:**

$$\sigma_{p0} = \min(0,9f_{peg}, 0,8f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1488 \text{ MPa}$$

3) **Les pertes instantanées:**

✚ **La perte due au frottement:** en M

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0}(1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)})$$

$$\text{Avec: } \alpha = 10,57^\circ \rightarrow \alpha = 0,184 \text{ (rd)} \quad \text{donc: } \Delta\sigma_{frott}(11) = 68,39 \text{ MPa}$$

- ✓ En B (6m): $\Delta\sigma_{frott}(6) = 60,94 \text{ MPa}$
- ✓ En C (16m): $\Delta\sigma_{frott}(16) = 75,83 \text{ MPa}$
- ✓ En C (22m): $\Delta\sigma_{frott}(22) = 136,78 \text{ MPa}$

✚ **La perte due au recul d'ancrage:**

$d=12,36\text{m}$,comme $d>x=11\text{m}$ donc:

$$\Delta\sigma_{\text{rec}}(11)=2 P (d - x) = 16.91 \text{ MPa}$$

✚ **La perte due au raccourcissement du béton :**

$$\Delta\sigma_{\text{racc}}(x) = n-1/2n \cdot E_p/E_{ij} \cdot \sigma_b(x)$$

$$\sigma_b(x) = \frac{P}{Bn} + \frac{Pe^2(x)}{I_n} + \frac{M(x)e(x)}{I_n}$$

Avec $\sigma_{pi}(11) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{\text{frt}} - \Delta\sigma_{\text{recul}} - \Delta\sigma_{pi} = 1402.7 - \Delta\sigma_{pi}$

$$\Delta\sigma_{pi} = \Delta\sigma_{\text{racc}}(11) = 130,45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = 78.813 - 0.0597 \Delta\sigma_{pi}(x) = 71.02 \text{ MPa}$$

✚ **Les pertes instantannées totales:**

✚ $\Delta\sigma_{pi}(11) = 215,75 \text{ MPa}$

4) **La tension initiale:** $\sigma_{pi}(11) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1272.25 \text{ MPa}$

Exercice3

Soit une poutre de 42m de longueur, précontrainte par des câbles formés de torons à très basse relaxation avec une relaxation garantie à 1000 heures égale à 2.5 % , de limite d'élasticité 1584 MPa et de contrainte de rupture garantie 1775 MPa. La mise en tension a lieu à 13 jours sur un béton de résistance $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$.

Le retrait final est égal à $\epsilon_r = 3 \cdot 10^{-4}$. Le glissement de l'ancrage est de 5mm,

Les coefficients de frottement valent: $f = 0.18 \text{ rd}^{-1}$, $\phi = 0.0017 \text{ m}^{-1}$

La contrainte au centre de gravité des armatures due à l'action des charges permanentes existantes à la mise en tension et à l'action de la précontrainte vaut : 7.6MPa .La contrainte supplémentaire apportée par les actions permanentes appliquées à 50 jours vaut 1MPa .La contrainte finale valant 7.3MPa.

Pour la section à mi travée ($x=21\text{m}, \alpha=0.12\text{rd}$), déterminer:

- La tension à l'origine
- La perte due au frottement

- La perte due au recul d'ancrage
- La perte due à la déformation instantannée du béton
- La perte instantannée
- La perte due au retrait du béton

- La perte due au fluage du béton
- La perte due à la relaxation des aciers
- La perte différée

Solution

La tension à l'origine:

$$\sigma_{p0} = \min(0,9f_{peg}, 0,8f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1314 \text{ MPa}$$

5) Les pertes instantanées:

La perte due au frottement:

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0}(1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)})$$

donc: $\Delta\sigma_{frott}(21) = 79,07 \text{ MPa}$

La perte due au recul d'ancrage:

$d = 15,88 \text{ m}$, comme $d < x = 21 \text{ m}$ donc:

$$\Delta\sigma_{recul}(21) = 0 \text{ MPa}$$

La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{\text{racc}}(21) = n-1/2n \cdot E_p/E_{ij} \cdot \sigma_b (l/2)$$

$$\Delta\sigma_{\text{racc}}(21) = 4-1/2.4 \cdot 190000 \cdot (7.6/E_{i12} + 1/E_{i28})$$

$$E_{i12} = 34179.55 \text{ MPa}; \quad E_{i28} = 35981.72 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{\text{racc}}(21) = 17,61 \text{ MPa}$$

Les pertes instantannées: $\Delta\sigma_{\text{pi}}(21) = 76,16 \text{ MPa}$

6) **La tension initiale:** $\sigma_{\text{pi}}(21) = \sigma_{\text{p0}} - \Delta\sigma_{\text{pi}} = 1338,94 \text{ MPa}$

7) **Les pertes différées:**

La perte due au retrait du béton:

$$\Delta\sigma_{\text{ret}}(x) = E_p \varepsilon_r \quad \text{donc: } \Delta\sigma_{\text{ret}}(21) = 38 \text{ MPa}$$

La perte due au fluage du béton:

$$\Delta\sigma_{\text{fl}} = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) E_p / E_{ij} = (7.3 + 7.3) \cdot 190000 / 35981.72 = 77.094 \text{ MPa}$$

La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte:

$$\Delta\sigma_{\text{rel}}(x) = \frac{6\rho_{1000}}{100} \left[\frac{\sigma_{\text{pi}}(x)}{f_{\text{prg}}} - \mu_0 \right] \sigma_{\text{pi}}(x)$$

$$\Delta\sigma_{\text{rel}}(21) = 6 \cdot 2.5 / 100 [1338,94 / 1775 - 0.43] \cdot 1338,94 = 65.13 \text{ MPa}$$

Les pertes différées totales: $\Delta\sigma_{\text{d}} = \Delta\sigma_{\text{r}} + \Delta\sigma_{\text{fl}} + 5/6 \Delta\sigma_{\text{rel}}$

$$\Delta\sigma_{\text{d}} = 38 + 77.094 + 5/6 \cdot 65.13 = 169.37 \text{ MPa}$$

Exercice 4 :

Soit une poutre de section rectangulaire isostatique (130 × 72) cm et de 40m de longueur précontrainte par 4 câbles. Cette poutre est soumise aux actions suivantes : - action permanente (poids propre) $G = 6 \text{ KN/m}$.

- Action variable $Q = 10 \text{ KN/m}$, sachant que les câbles sont mis en tension par les deux extrémités à $j = 10$ jours et en admettant que la section de calcul est la section brute de béton.

1. Déterminer la tension à l'origine

Pour la section médiane en M

2. Déterminer la perte instantanée. Vous indiquerez également les valeurs des pertes par frottement aux points caractéristiques B, C et D.

3. Déduire la tension initiale

4. Déterminer la perte différée

5. Déduire la tension finale

On donne : $f = 0,18 \text{ rd}^{-1}$ et $\varphi = 0,002 \text{ m}^{-1}$; $g = 1 \text{ mm}$; $A_p = 16722 \text{ mm}^2$; $f_{prg} = 1720 \text{ MPa}$; $f_{peg} = 1460 \text{ MPa}$; $\varphi_{1000} = 2\%$; $\mu_0 = 0.3$; $E_p = 190000 \text{ MPa}$, $\epsilon_r = 2 \times 10^{-4}$, $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$

Solution

 **La tension à l'origine:**

$$\sigma_{p0} = \min(0,9f_{peg}, 0,8f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1314 \text{ MPa}$$

8) **Les pertes instantanées:**

 **La perte due au frottement:** en M

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0}(1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)})$$

$$\text{Avec: } \alpha = 3.67^\circ \rightarrow \alpha = 0.064 \text{ (rd)}$$

$$\text{donc: } \Delta\sigma_{frott}(20) = 67,69 \text{ MPa}$$

✓ En B (14m) : $\Delta\sigma_{frott}(14) = 51,93 \text{ MPa}$

✓ En C (26m) : $\Delta\sigma_{frott}(26) = 83,46 \text{ MPa}$



La perte due au recul d'ancrage:

$d=7,50\text{m}$, commed $<x=20\text{m}$ donc:

$$\Delta\sigma_{rec}(20)=0$$

✚ **La perte due au raccourcissement du béton :**

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = n-1/2n \cdot E_p/E_{ij} \cdot \sigma_b(x) \dots\dots\dots(1)$$

$$\sigma_b(x) = \frac{P}{B_n} + \frac{Pe^2(x)}{I_n} + \frac{M(x)e(x)}{I_n} \dots\dots\dots(2)$$

Avec $\sigma_{pi}(20) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{frt} - \Delta\sigma_{recul} - \Delta\sigma_{pi} = 1246 - \Delta\sigma_{pi} \dots\dots\dots(3)$

$$\Delta\sigma_{pi} = \Delta\sigma_{racc}(20) = 98,62 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = 48.591 - 0.0541\Delta\sigma_{pi}(x) = 43.02 \text{ MPa}$$

✚ **Les pertes instantannées totales:**

✚ $\Delta\sigma_{pi}(11) = 215,75 \text{ MPa}$

La tension initiale: $\sigma_{pi}(11) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = 1147.38 \text{ MPa}$

5) **Les pertes différées:**

✚ **La perte due au retrait du béton:**

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r \quad \text{donc:} \quad \Delta\sigma_{ret}(20) = 38 \text{ MPa}$$

✚ **La perte due au fluage du béton:**

$$\Delta\sigma_{fl} = 15 \sigma_b \quad \text{Fdonc} \quad \Delta\sigma_{fl} = 157,07 \text{ MPa}$$

✚ **La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte:**

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = \frac{6\rho 1000}{100} \left[\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu \right] \sigma_{pi}(x)$$

$$\Delta\sigma_{rel}(20) = 50.54\text{MPa}$$

+ **Les pertes différées totales:** $\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + 5/6 \Delta\sigma_{rel} = 330.50 \text{ MPa}$

6) **La tension finale :**

$$\sigma_{pf}(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_{pi}(x) - \Delta\sigma_{pd}(x) = 1009.14 \text{ MPa}$$

CHAPITRE III :

**Calcul des poutres
isostatiques à l'état
limite de service**

III.1 GENERALITES

Comme vis-à-vis de toute sollicitation, il y a lieu de procéder, en ce qui concerne les sollicitations normales, à deux catégories de justification :

- ✓ Aux ELU pour s'assurer de la résistance de la structure,
- ✓ Aux ELS pour vérifier le respect des conditions d'exploitation et de durabilité.

Alors qu'aux ELS, on se limite au domaine de fonctionnement élastique des matériaux, on admet aux ELU, la plastification des sections. Ce chapitre porte sur l'étude vis-à-vis des ELS, les ELU seront traités au chapitre suivant. Le principe de justification aux ELS est simple : il suffit de calculer les contraintes qui apparaissent dans les sections sous l'effet des sollicitations de calcul et de vérifier qu'elles ne dépassent pas les contraintes limites réglementaires.

Tant que les contraintes de traction dans le béton restent modérées (c que nous supposons ici), le calcul s'effectue à partir des caractéristiques des sections non fissurées:

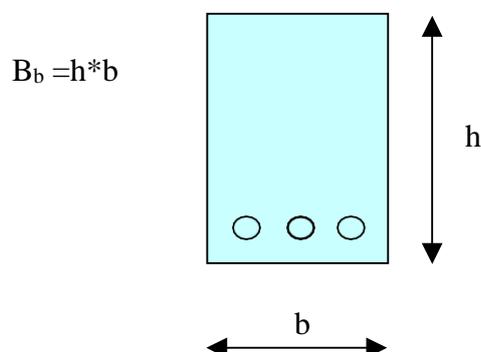
- Des sections nettes en ce qui concerne les contraintes développées par les charges permanentes et par la précontrainte,
- Des sections homogénéisées pour les contraintes dues aux charges variables.

En pratique, les caractéristiques des sections brutes, nettes et homogénéisées sont souvent très voisines et l'on peut les confondre au stade du prédimensionnement.

III.2 DEFINITION DES SECTIONS DE CALCUL

Section brute

Pour la prise en compte du poids propre et des calculs de rigidité de la structure. Section brute = section totale du béton sans réduction des conduits et ancrages.



Sections non fissurées

Sections nettes pour le calcul des contraintes à l'ELS en sections non fissurées.

Section nette= Section totale du béton avec déduction des conduits e tancrages.

Sections homogènes, pour prendre en compte une partie passive d'armatures actives adhérentes.

Section homogène = section nette + (section d'armatures longitudinales adhérentes) $\times n$ + les sections d'armatures passives dans les mêmes conditions si elles sont conformes aux articles A.6etA.8.1du BAEL91

n: Coefficient d'équivalence: prendre $n = n_i = 5$ si instantané ou $n = n_v = 15$ si long terme

$$n = B_b - B_v$$

Sections fissurées

Pour le calcul aux **ELS** en sections fissurées:

Section homogénéisée et réduite = (Section du béton comprimé seul) + (section d'armatures passives) $\times (n_v)$ + (section d'armatures de précontrainte) $\times (n_v) \times (\rho)$

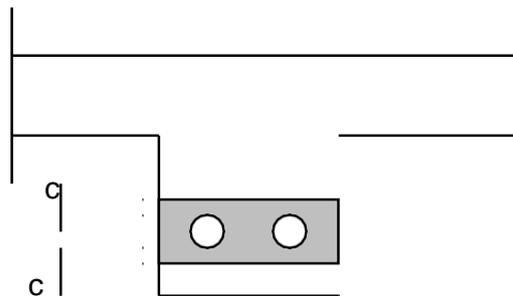
$\rho = 1$ en cas de pré-tension

0,5 en cas de post-tension avec injection de coulis

0 en cas de post-tension avec torons gainés graissés.

Section d'enrobage

C'est la surface délimitée par le contour de la section et deux parallèles à l'axe de flexion considéré encadrant l'ensemble des armatures de précontrainte, à une distance égale minimale admise « c ». Cette section est utilisée pour certaines vérifications en classe II.



III.3 COMBINAISON DE CHARGE

III.3.1 Etat limite ultime(ELU)

Le dépassement de cet état conduit à la ruine de la structure. Au delà de l'état limite ultime, la résistance des matériaux béton et acier est atteinte, la sécurité n'est plus garantie et la structure risque de s'effondrer. On distingue:

- ✓ Etat limite de résistance de l'un des matériaux.
- ✓ Etat limite de l'équilibre statique.
- ✓ Etat limite de stabilité de forme : flambement

III.3.2 Etat limite de service(ELS)

L'état limite de service atteint remet en cause l'aptitude au service de la structure (fissures, fuites, désordres divers). Cet état est défini en tenant compte des conditions d'exploitations et /ou de durabilité. On distingue:

- ✓ Etat limite d'ouverture des fissures : risque d'ouverture des fissures.
- ✓ Etat limite de compression du béton : on limite volontairement la contrainte de compression à une valeur raisonnable.
- ✓ Etat limite de déformation : flèche maximale.

NB : Un ouvrage devra satisfaire à la fois à des conditions d'état limite ultime et d'état limite de service.

III.3.3 Actions

Les actions sont l'ensemble des charges (forces, couples,...) appliquées à la structure, ainsi que les conséquences des déformations statiques ou d'état (retrait, tassement d'appuis, variation de température, etc.) qui entraînent des déformations de la structure.

III.3.3.1 Types d'actions

Les trois types d'actions appliquées à la structure sont les suivants :

Actions permanentes : Les actions permanentes, notées G, représentent les actions dont l'intensité est constante ou très peu variable dans le temps. Elles comprennent:

- ✓ Le poids propre des éléments de la structure,
- ✓ Le poids des équipements fixes de toute nature (revêtements de sols et de plafonds ; cloisons etc.),
- ✓ les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des terres, par des solides ou par des liquides dont les niveaux varient peu,

- ✓ les déplacements différentiels des appuis,
- ✓ les forces dues aux déformations (retrait, fluage,...) imposées en permanence à la construction,

Dans la plupart des cas, le poids propre est représenté par une valeur nominale unique, G_0 , calculée à partir des dessins du projet et des masses volumiques moyennes des matériaux.

Actions variables : les actions variables, notées Q , représentent les actions dont l'intensité varie fréquemment et de façon importante dans le temps. Elles sont définies par des textes réglementaires en vigueur, on distingue:

- ✓ les charges d'exploitation (poids et effets annexes tels que force de freinage, forces centrifuges, effets dynamiques),
- ✓ les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des solides ou par des liquides dont le niveau est variable,
- ✓ les charges non permanentes appliquées en cours d'exécution (équipements de chantier, engins, dépôts de matériaux, etc.),
- ✓ les actions climatiques : neige, vent, température, etc. Les actions variables sont réparties en deux catégories:
 - Une action dite de base notée Q_1
 - Les autres actions, dites d'accompagnement et notées Q_i ($i > 1$) L'action de base Q_1 est:
 - ✓ L'action unique si c'est le cas

Si non :

- ✓ La plus fréquente
- ✓ La plus élevée
- ✓ L'une ou l'autre action variable

Actions accidentelles : Les actions accidentelles, notées F_A , provenant de phénomènes rares, et ne sont à considérer que si les documents d'ordre public ou le marché le prévoient. Exemple : les séismes, les explosions, les chocs.

Valeurs représentatives des actions

Les différentes valeurs de l'intensité des actions, dites valeurs représentatives, sont :

- ✓ Q_k : valeurs caractéristiques de l'action
- ✓ $\psi_{0i} Q_{ik}$: valeurs de combinaison
- ✓ $\psi_{1i} Q_{ik}$: valeurs fréquentes

✓ $\psi_{2i} Q_{ik}$: valeurs quasi-permanentes

La précontrainte est représentée par une valeur de calcul P_d qui est :

✓ la plus défavorable de deux valeurs caractéristiques P_1 et P_2 pour les justifications vis-à-vis des états limites de service,

$$P_1(x, t) = 1,02 P_0 - 0,80 \Delta P(x, t)$$

$$P_2(x, t) = 0,98 P_0 - 1,20 \Delta P(x, t)$$

✓ sa valeur probable P_m pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.

$$P_m(x, t) = P_0 - \Delta P(x, t)$$

P_0 représentant la précontrainte « à l'origine », correspondant à la tension σ_{p0} .

$\Delta P(x, t)$ la perte de précontrainte au point d'abscisse x , à l'instant t .

III.4 CLASSE DE VÉRIFICATION

Le souci de moduler les exigences vis-à-vis de la non-traction du béton a conduit à distinguer trois classes différentes de vérifications des contraintes.

Classe I (la plus pénalisante)

Elle n'admet pas les contraintes de traction. Elle concerne les pièces soumises à la traction simple (tirants, parois de réservoir contenant des fluides) et les pièces sollicitées à la fatigue.

Classe II (la plus courante)

Elle admet les contraintes de traction dans le béton, mais pas la formation des fissures. Elle concerne le cas des éléments exposés à des ambiances agressives.

Classe III (la moins pénalisante)

Elle admet une ouverture limitée des fissures sous les sollicitations extrêmes. Elle concerne les pièces en atmosphère peu agressive.

III.5 JUSTIFICATION DES CONTRAINTES NORMALES

Cette vérification consiste à calculer les contraintes dans le béton et de les comparer aux contraintes limites autorisées. Elle doit être établie pour chacune des phases de construction et en phase de service.

Le calcul des contraintes se fait par l'application de la formule générale, en valeur algébrique, suivante:

Dans le cas général, on doit avoir : $\sigma_{\min} \leq \sigma(y) \leq \sigma_{\max}$

Les contraintes limites ne sont pas les mêmes pour les différentes combinaisons de charges, pour les vérifications en phase de construction et pour les vérifications en phases de service.

III.5.1 Hypothèses de calcul

Les calculs en section courantes ont conduits moyennant les deux hypothèses fondamentales suivantes:

Les sections droites restent planes;

- Les contraintes des matériaux sont proportionnelles à leurs déformations.

Selon le type de vérification envisagé, les hypothèses complémentaires sont:

+ Calcul en section non fissurée

- Le béton tendu résiste à la traction;
- Les matériaux ne subissent aucun glissement relatif.

Cette dernière hypothèse n'entraîne que les contraintes normales dues à toutes les actions autres que les actions permanentes peuvent être calculées sur la section entière homogène.

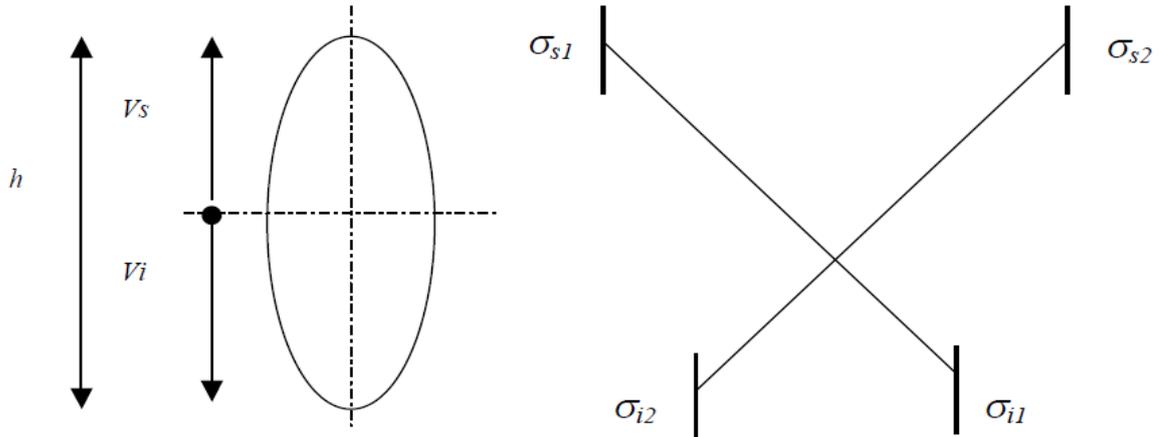
+ Calcul en section fissurée

- Le béton tendu est négligé;
- Les matériaux ne subissent aucun glissement relatif;
- Lorsque la déformation du béton annule au niveau d'une armature, la tension dans cette dernière vaut:
 - ✓ 0 s'ils s'agit d'une armature passive,
 - ✓ $\sigma_{pd} + n_i \sigma_{bpd}$ (avec $n_i=5$) s'il s'agit d'une armature de précontrainte;

- La contrainte dans les aciers passifs aussi bien que la variation de surtension dans les aciers de précontrainte qui se manifestent après décompression des bétons ont évaluées à partir du coefficient d'équivalence $n_v= 15$.

III.5.2 Dimensionnement des sections

L'objectif du dimensionnement de la précontrainte est de déterminer la force effective P (après soustraction des pertes de tension) qui doit régner dans la section étudiée afin que les contraintes limites soient assurées.



σ_{s1} : contrainte limite à la fibre supérieure sous chargement 1 (P et M_m)

σ_{s2} : contrainte limite à la fibre supérieure sous chargement 2 (P et M_M)

σ_{i1} : contrainte limite à la fibre inférieure sous chargement 1 (P et M_m)

σ_{i2} : contrainte limite à la fibre inférieure sous chargement 2 (P et M_M)

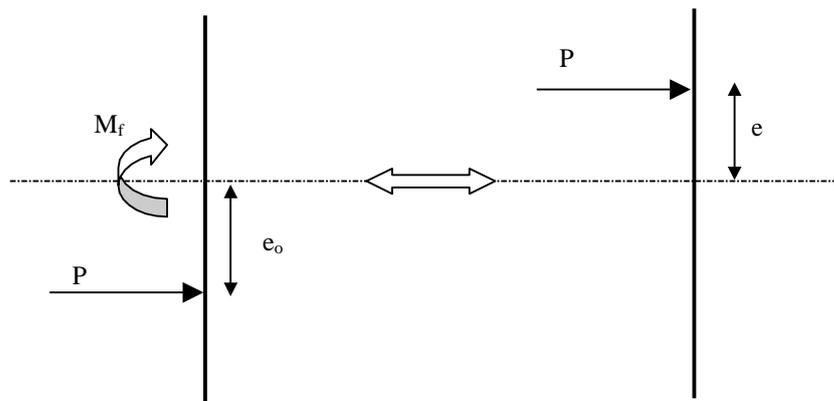
III.5.2.1 Centre et ligne de pression

Sous un cas de charge réel quelconque, une section est soumise aux sollicitations suivantes:

- Un effort $N = P$ dû à la précontrainte,
- Un moment fléchissant $M = P e_0 + M_{ext}$.

Ces éléments de réduction peuvent être considérés comme générés par une force unique P d'excentricité

$$e = e_0 + \frac{M_f}{P}$$



Cette excentricité définit l'ordonnée d'un point C appelé centre de pression.

Dans une section donnée, lorsque le moment extérieur varie entre M_m et M_M , le centre de pression se déplace entre l'ordonnée e_m et l'ordonnée e_M : $e_m \leq e \leq e_M$ avec

$$e_m = \frac{M_m}{P} + e_0 \quad \text{et} \quad e_M = \frac{M_M}{P} + e_0$$

III.5.2.2 Noyau limite, fuseau limite

Dans une section donnée, le noyau limite est l'intervalle dans lequel doit se trouver le centre de pression pour le respect des contraintes admissibles.

Lorsque la section décrit toute la longueur de la poutre, le noyau limite engendre le fuseau limite. La ligne de pression doit donc se trouver à l'intérieur du fuseau limite.

III.5.4 Noyau de passage, fuseau de passage

Dans une section donnée, le noyau de passage est l'intervalle dans lequel doit se trouver le câble pour le respect du noyau limite.

Lorsque la section décrit toute la longueur de la poutre, le noyau de passage engendre le fuseau de passage.

III.5.5 Notion de section critique

Section sous critique:

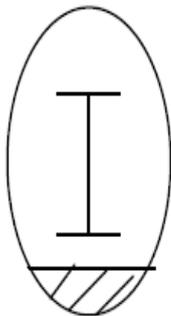
Si tout le segment de passage est à l'intérieure de la zone qui permet un enrobage suffisant, la section est dite sous critique.

Section critique:

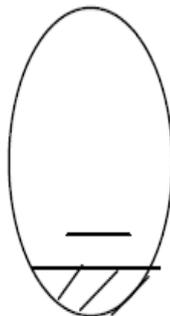
Dans le cas où il serait possible quel segment de passage soit réduit à un point, la section est critique.

Section sur critique :

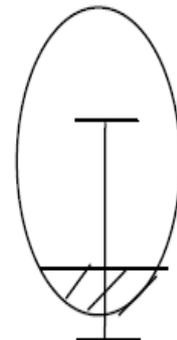
Si le segment de passage à une de ses frontières découpe la zone d'enrobage (segment ouvert), la section est dite sur critique.



Section sous critique



Section critique



Section sur critique

III.6 EVALUATION DE LA PRECONTRAINTE

✚ Cas de section sous critique et critique

Le segment de passages est limité à un point

$$-C_i - \frac{M_m}{P_I} = e_o = C_s - \frac{M_M}{P_I}$$

$$P_I = \frac{M_M - M_m}{C_s + C_i} = \frac{\Delta M}{C_s + C_i}$$

et comme :

$$C_s = \rho V_s \left(1 - \frac{B \sigma_{i2}}{P_I} \right)$$

$$C_i = \rho V_i \left(1 - \frac{B \sigma_{s1}}{P_I} \right)$$

on obtient :

$$P_I = \frac{\Delta M + \rho B (V_s \sigma_{i2} + V_i \sigma_{s1})}{\rho h}$$

ou encore, puisque $B = \frac{I}{\rho V_s V_i}$:

$$P_I = \frac{\Delta M + \frac{I}{V_i} \sigma_{i2} + \frac{I}{V_s} \sigma_{s1}}{\rho h}$$

✚ Cas de section sur critique

✓ Moment positif

$$e_o = C_s - \frac{M_M}{P_{II}} = -(V_i - d_i)$$

$$d'ou\ on\ tire\ P_{II} = \frac{M_M}{C_s + V_i - d_i}$$

$$De\ même : P_{II} = \frac{M_M + \frac{I}{V_i} \sigma_{i2}}{V_i + \rho V_s - d_i}$$

✓ Moment négatif

$$e_o = -C_i - \frac{M_m}{P_{II}} = V_s - d$$

D'ou :

$$P_{II} = \frac{-M_m}{C_i + V_s - d_s}$$

De même :

$$P_{II} = \frac{-M_m + \frac{I}{V_s} \sigma_{s1}}{V_s + \rho V_i - d_s}$$

Remarque

Si $P_I > P_{II}$ la section est sous critique

Si $P_I < P_{II}$ la section est sur critique

✚ Cas particulier

Si on suppose $\sigma_{s1}=\sigma_{i2}=0$, alors on a:

Section sous critique

$$P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

Section sur critique

✓ **Moment positif**

$$P_{II} = \frac{M_M}{\rho V_s i} + d_i$$

Moment négatif

$$P_{II} = \frac{-M_m}{+\rho V_s V_{ids}}$$

Par comparaison, on peut constater les économies obtenues sur l'effort de précontrainte lorsqu'on tolère des contraintes de traction dans le béton ($\sigma_{s1}=\sigma_{i2}<0$).

III.7 SECTION MINIMALE DE BETON

On obtient la section minimale de béton lorsqu'on atteint les contraintes limites de compression. Dans ce qui suit, on suppose que l'on s'astreint de façon systématique, à adopter les valeurs minimales précédemment trouvées pour la précontraintes (P_I, P_{II}).

✚ Cas d'une section sous critique

$$I_s \geq \frac{M_M - M_m - \Delta M}{V_s \sigma_{s2} - \sigma_{s1} \Delta \sigma_s}$$

$$I_s \geq \frac{M_M - M_m - \Delta M}{V_i \sigma_{i1} - \sigma_{i2} \Delta \sigma_i}$$

✚ Cas d'une section sur critique

✓ **Moment positif**

$$I_s \geq \frac{\rho P h}{V_s \sigma_{s2} + \frac{V_s \sigma_{i2}}{V_i}}$$

$$I_s \geq \frac{M_M - M_m - \Delta M}{V_i \sigma_{i1} - \sigma_{i2} \sigma_{fi}}$$

✓ **Moment négatif**

$$\frac{I_s}{V_s} \geq \frac{MM - Mm - \Delta M}{\sigma_s^2 - \sigma_s l \Delta \sigma_s}$$

$$\frac{I_s}{V_s} \geq \frac{\rho P h}{\sigma_{il} + \frac{V_l}{V_s} \sigma_s l}$$

III.8 ARMATURES PASSIVES LONGITUDINALES

Elles résultent de la plus sévère des exigences suivantes:

III.8.1 Armatures de peau

Le but de ces armatures est essentiellement de limiter la fissuration du béton avant l'application de la force de précontrainte sous l'action de phénomènes tels que retrait différentiel.

La section des armatures de peau doit être au moins 3 cm² par mètre de longueur, sans pouvoir être inférieure à 0.10% de la section de béton.

III.8.2 Armatures des zones tendues

Dans les parties de la section où le béton est tendu, il est nécessaire de disposer une section d'armatures minimale A_s

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt} f_{tj}}{f_e \sigma_{Bt}}$$

Avec:

B_t : l'aire de la partie du béton tendu

N_{Bt} : la résultante des contraintes de traction correspondantes.

σ_{Bt} : la valeur absolue de la contrainte maximale de traction.

III.9 JUSTIFICATION DES CONTRAINTES TANGENTIELLES

Une poutre soumise à un effort tranchant doit faire l'objet des justifications suivantes:

- ✓ Dans toutes les zones de la poutre vis-à-vis de:
- ✓ L'état-limite de service,
- ✓ L'état-limite ultime

Dans les zones d'appui simple et d'about de la poutre, justifications complémentaires relatives à l'équilibre de la bielle d'effort tranchant et éventuellement du coin inférieur.

La présence de la précontrainte induit une nouvelle donnée dans le calcul des éléments

précontraints. Ainsi aux effets des charges permanentes et des charges d'exploitation s'ajout celui de la précontrainte: $V=Vg+Vq+Vp$

Pour le cas d'une précontrainte de force P inclinée d'un angle « α » par rapport à la fibre moyenne, l'action de l'effort de précontrainte sur la section peut se décomposer en deux forces : l'une «N» normale et l'autre «Vp» perpendiculaire.

$$N=P\cos\alpha \qquad N>0$$

$$Vp=-P\sin\alpha \qquad Vp<0$$

En conséquence, la valeur de l'effort tranchant à considérer est un effort tranchant réduit définit par: $V_{\text{red}}=(Vg+Vq)-P\sin\alpha$

N.B: En fonction du signe de « $\sin\alpha$ », l'effort tranchant peut être favorable ou défavorable.

III.9.1 Justification à ELS

Les justifications sont conduites pour une section donnée de la poutre à partir des contraintes σ_x , σ_t et τ , calculées pour l'élément considéré a un niveau de la vérification, dans l'hypothèse de déformations élastiques et linéaires des matériaux et en supposant le béton non fissuré.

Dans le cas général d'un élément de poutre comportant des armatures transversales de précontrainte de force de traction unitaire F_t inclinées de α' sur la fibre moyenne et espacées de s_t (Figure 12), on a:

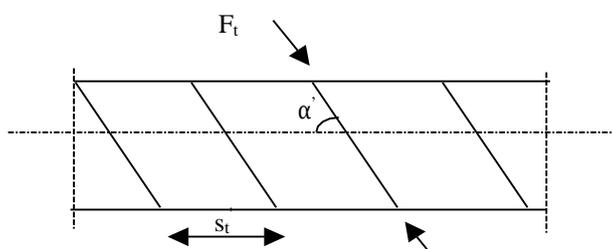


Figure 12: Poutre comportant des armatures transversales [5]

$$\sigma_x = \sigma + \frac{F_t}{b_n s_t} \frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{b_n s_t} \sin\alpha'$$

$$\tau = \tau_{\text{red}} - \frac{F_t}{b_n s_t} \cos\alpha'$$

σ_x : contrainte normale à la section;

σ_t : contrainte normale à la section transversale;

τ : contrainte de cisaillement de l'élément;

τ_{red} : contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant réduit l'élément qui peut se calculer par la formule:

$$\tau_{red} = \frac{V_{red} S}{b_n I_n}$$

b_n I_n

V_{red} : effort tranchant réduit

S : moment statique

b_n : largeur nette de la section

I_n : moment d'inertie nette de la section sous l'effet des sollicitations de service dans le cas de charges les plus défavorables ; et quelque soit les sections considérées, on vérifié les conditions suivantes:

$$\tau^2 - \sigma_x \sigma_t \leq 0.4 f_{tj} \left[f_{tj} + \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_t) \right]$$

$$\tau^2 - \sigma_x \sigma_t \leq 2 \frac{f_{tj}}{f_{cj}} \left[0.6 f_{cj} - \sigma_x - \sigma_t \right] \left[f_{tj} + \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_t) \right]$$

III.10 EXERCICES**EXERCICE1:**

Soit une poutre de section rectangulaire (60x120) cm soumise aux moments $M_{\min}=1.3\text{MN.m}$ et $M_{\max}=3.3\text{MN.m}$ avec une valeur de l'enrobage telle que $d_i=0.15\text{m}$.

- Déterminer la valeur de la précontrainte (P_1 et P_2).
- Donner une constatation sur la nature de la section.
- Déterminer la valeur de l'excentricité e_0 .

Solution :

En section sous critique, la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation:

$$P_1 = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

avec:

$$\Delta M = 2\text{MNm}$$

$$\rho = 0.33, h = 1.20\text{m}$$

$$\text{D'où: } P_1 = 5.05\text{MN}$$

En section sur critique (moment positif), la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation : $P_2 = M_M / V_i + \rho \cdot V_s - d_i$

Avec:

$$M_{\max} = 3.2\text{MNm}$$

$$\rho = 1/3$$

$$V_s = V_i = 0.60\text{m}$$

$$d_i = 0.15\text{m}$$

$$\text{d'où: } P_2 = 5.09\text{MN}$$

On constate que $P_1 > P_2$ d'où la section est sous critique

La valeur de l'excentricité e_0 est donnée par:

$$-C_i - \frac{M_m}{P_1} = e_0 = C_s - \frac{M_M}{P_1}$$

avec:

$$C_s = \rho V_s = 0.2 \text{ m} \quad P_1 = 5 \text{ MN}$$

$$\text{d'où } : e_0 = -0.44 \text{ m}$$

CHAPITRE IV :

**Résistance d'une
section de poutre a
l'état limite ultime**

IV.1 GENERALITES

Les justifications vis-à-vis des ELU, complémentaires des vérifications vis-à-vis des ELS, s'avèrent indispensables pour les raisons suivantes:

- Un dépassement des charges caractéristiques (prises en compte dans les calculs aux ELS) est toujours possible,
- Il faut examiner le comportement des structures sous combinaisons ELU. Pour ce faire, il n'est pas envisageable de procéder par extrapolation, mais d'effectuer des vérifications spécifiques.

IV.2 EQUILIBRE D'UNE SECTION A LA RUPTURE

Dans la mesure où le précontraint est adhérent au béton, l'expérience montre que l'on peut appréhender correctement le comportement d'une section à l'épuisement de sa résistance en tablant sur les hypothèses suivantes:

- Conservation de la planéité des sections droites,
- Non-intervention du béton tendu,
- Non-glissement des matériaux.

IV.3 CARACTERISATION D'UN ETAT LIMITE ULTIME

Physiquement, un état limite ultime se caractérise par le fait que l'un au moins des matériaux constitutifs de la section atteint sa déformation ultime. Réglementairement, on admet de façon conventionnelle, qu'un ELU est atteint lorsque le diagramme des déformations est un diagramme limite passant par un des pivots A, B, C (Figure 13).

Les pivots A et B correspondent:

- Pour les aciers, à des allongements ultimes. Cette limite était fixée à 10^{-2} dans le BPEL 91. Dans l'Eurocode, sa valeur est $2,5 \cdot 10^{-2}$ ou $5,0 \cdot 10^{-2}$ ou $7,5 \cdot 10^{-2}$,
- Pour le béton, à un raccourcissement ultime de $3,5 \cdot 10^{-3}$.

Le pivot C, quant à lui, permet de tenir compte du fait que lorsqu'une pièce périt tout en étant partout comprimée, les raccourcissements qu'on y mesure sont sensiblement plus faibles que sur la fibre comprimée d'une pièce partiellement tendue à rupture.

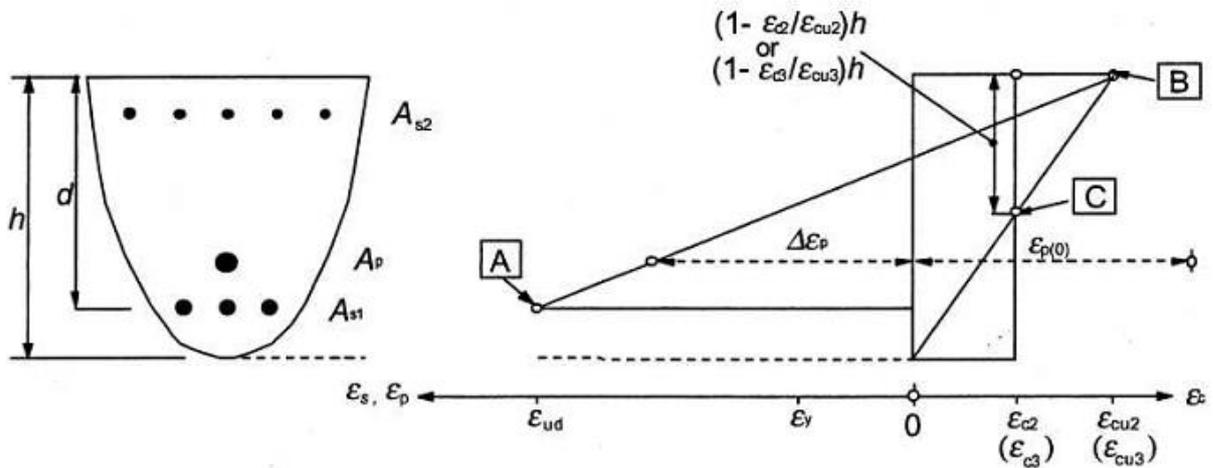


Figure 13:Le diagramme des déformations [6]

IV.4 PRINCIPE DES JUSTIFICATIONS

Ils'agit de s'assurer que les sollicitations réglementaires de calcul, que nous désignerons par S_a n'entraîne pas l'apparition d'un état limite ultime dans la section.

IV.4.1 Sollicitations de calcul

Même lorsque les charges extérieures n'engendrent que la flexion simple, ce sont des sollicitations de flexion composée, du fait de la précontrainte P_m se caractérisant par deux paramètres qui sont la composante normale de la résultante et le moment résultant en un point.

IV.4.2 Justification à ELU

Les justifications des éléments d'une poutre vis-à-vis de l'état-limite ultime comportent la vérification, d'une part, de la résistance des armatures transversale et, d'autre part, celle des bielles comprimées.

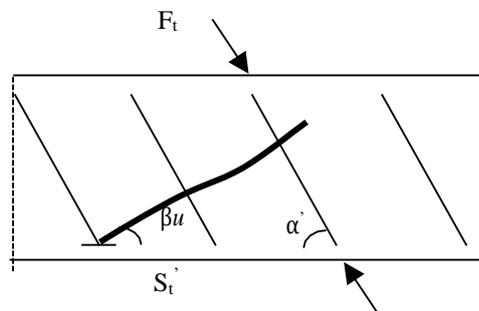


Figure 14 : Poutre avec des armatures transversale [7]

La première étape consiste à déterminer l'angle β_u que forment les billes de béton avec la fibre moyenne de la poutre, cette angle est donnée par:

$$\operatorname{tg} 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{tu}}$$

β_u étant toutefois borné inférieurement à 30° .

Les règles PBEL définissent ensuite la contrainte de cisaillement ultime τ_{ulim} correspondant à la pleine utilisation de la résistance des armatures transversale, actives et passives:

$$\tau_{ulim} = \frac{A_t}{b_n s_t} \frac{f_e \sin(\alpha + \beta_u)}{\gamma_s \sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_n s_t'} \frac{\sin(\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

Avec les notations suivantes

A_t : aire totale des sections d'un cours d'armatures passives transversales;

s_t : espacement de deux cours de ces armatures, mesuré suivant la fibre moyenne de la poutre ;

f_e : limite d'élasticité de l'acier;

α : angle de ces armatures avec la fibre moyenne de la poutre (angle compris entre 45° et 90°) ;

F_{tu} : effort résistant des aciers d'un cours d'armatures transversales de précontrainte;

s_t' : espacement d deux cours de ces armatures, mesuré suivant la fibre moyenne de la poutre ;

α' : angle de ces armatures avec la fibre moyenne de la poutre (angle compris entre 45° et 90°).

Avec:

$\gamma_p = \gamma_s = 1,15$ pour les justifications vis-à-vis des combinaisons fondamentales.

$\gamma_p = \gamma_s = 1$ pour les justifications vis-à-vis des combinaisons accidentelles. On doit vérifier que

$$\tau_u \leq \tau_{ulim}$$

Il est d'autre part loisible, dans le cas d'une section non entièrement tendue, d'ajouter à τ_{ulim} le terme complémentaire $f_{tj}/3$. Ce terme tient compte du fait qu'une partie de l'effort tranchant est équilibrée par la partie comprimée de la poutre.

Dans le cas, très fréquent, où l'âme ne comporte que des armatures passives perpendiculaires à la fibre moyenne de la poutre, on aura l'inégalité suivante:

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \frac{f_e}{\gamma_s} \geq \left(\tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \text{tg} \beta_u$$

Les règles BPEL imposent en outre des dispositions constructives:

- Un minimum d'armatures d'âme est exigé dans toutes les zones de la poutre.

Il est donné par la condition que la quantité $\frac{A_t}{b_n s_t} \frac{f_e}{\gamma_s} \sin \alpha + \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \sin \alpha'$ soit au moins 0,4 MPa.

- ✓ l'espacement s_t' des armatures transversales d'âme de précontrainte doit être au plus égal à 0,8h.
- ✓ L'espacement s_t des armatures transversales d'âme passives doit être au plus égal à la plus petite des trois valeurs 0,8h, 3b₀ et un mètre; h désignant la hauteur totale de la section et b₀ l'épaisseur brute minimale de l'âme.

Ces dispositions ont pour objectif d'éviter une trop grande fragilité du béton de l'âme de la poutre.

CHAPITRE
V : DISPOSITIONS
CONSTRUCTIVES

V.1 INTRODUCTION

Dans les cas courants, les dimensions de la structure sont préalablement définies. Si l'on considère les éléments précontraints de la structure, la section transversale de chaque élément est donc connue. Il s'agit alors de calculer la précontrainte et ses pertes et de définir, après vérification des contraintes, le tracé des câbles. Dans d'autres cas plus particuliers, la section est à définir lorsqu'un choix technique ou économique s'impose.

Concernant le béton, la forme et les dimensions de la section à précontraindre doivent être choisies de telle sorte que la poutre puisse résister aux sollicitations imposées. Par exemple, dans le cas d'une flexion, simple ou composée et par souci d'économie de poids et de béton, les rapports (I/v) et (I/v') et doivent être maximaux pour une aire B minimale. Le rendement doit être le plus élevé possible.

V.2 TRACÉS DE CÂBLES

Après avoir défini les sollicitations, les caractéristiques des sections et la précontrainte (P et e_0), il faut déterminer le tracé à donner aux câbles dans les sections tout au long de la poutre. Deux cas se présentent:

- La poutre est isostatique: la précontrainte P et l'excentricité e_0 s'appliquent dans la section centrale la plus sollicitée. Les câbles sont relevés près des appuis pour reprendre les efforts tranchants (car il n'y a plus d'efforts de flexion au droit des appuis). Il est à noter l'exception : les câbles sont droits lorsqu'on utilise des fils adhérents.
 - La poutre est hyperstatique: il faut calculer la précontrainte P_i et l'excentricité e_{0i} dans toutes les sections. Si la précontrainte est constituée de câbles continus, l'inconnue est l'excentricité e_{0i} , définie par le fuseau de passage. Mais ceci engendre un surcroît de précontrainte, par souci d'économie, il faut arrêter les câbles en travée. Les câbles ainsi dimensionnés dans certaines sections et arrêtés dans d'autres doivent répondre aux impératifs de :
- Résistance en flexion longitudinale : en construction et en service (ELS et ELU).
 - Résistance à l'effort tranchant (relevages près des appuis).
 - Nombreux impératifs pratiques (enrobages, assemblages, poussée au vide, ancrage, etc.).

V.3 DISPOSITIONS PRATIQUES DE TRACES DE CABLAGE

V.3.1. Dispositions transversales

V.3.2. Dispositions longitudinales:

Longitudinalement, il faut éviter les sifflets de gaines. Pour des contraintes élevées, il est judicieux de placer des goussets pour dévier et tourner les câbles.

V.3.3. Enrobages:

L'enrobage d'une gaine par rapport à toute surface coffrée est au minimum 5 cm. Pour une demi-gaine par rapport à toute surface non coffrée, l'enrobage est de 3 cm minimum. Pour les câbles droits dans les dalles minces (hourdis supérieurs ou inférieurs de ponts) : des déviations parasites créent des poussées au vide qui peuvent « feuilleter » la dalle et provoquer sa rupture lors de l'injection. Un cas particulier se présente pour les câbles extérieurs au béton : des précautions particulières doivent être prises pour les injections.

V.3.4. Espacement des armatures de précontrainte:

En section courante, l'espacement horizontal e_h et verticale e_v des armatures actives doivent être d'au moins 5 cm.

V.4 CÂBLE MOYEN FICTIF

Les câbles de précontrainte dans chaque section, forment un ensemble qui peut être assez complexe. C'est pour quoi, pour les calculs, on remplace souvent cet ensemble par un câble moyen fictif qui aurait, dans chaque section, le même effet des câbles réellement mis en place. L'excentricité du câble moyen effectif e_0 est comprise entre $(-c' - M_{min}/P)$ et $(c - M_{max}/P)$. Le segment dans lequel passe le câble est dite segment de passage.

V.5 FUSEAU DE PASSAGE

Il présente la zone délimité par l'ensemble des segments de passage sur toute la longueur de l'élément.

V.6 EN PRECONTRAINTE PAR POST TENSION GROUPEMENT DES ARMATURES DE PRECONTRAINTE

Le groupement des armatures de précontrainte doit satisfaire aux conditions suivantes : le nombre de conduits dans chaque paquet est limité:

Dans le sens horizontal à : $q=2$ si $\varphi \leq 5\text{cm}$ $q=1$ si $\varphi > 5\text{cm}$

Dans le sens vertical à : $p=3$ si $\varphi \leq 5\text{cm}$

$p=2$ si $5\text{cm} < \varphi < 10\text{cm}$ $p=1$ si $\varphi \geq 10\text{cm}$

Espacement des armatures de précontrainte

En section courante l'espacement horizontal e_h et l'espacement vertical e_v des conduits si solésoudes paquets de conduits doit satisfaire aux conditions suivantes

$e_h \geq \varphi$ si $p \leq 2$, $1,5\varphi$ si $p=3$

$1,5\varphi$ si $q=2$

5cm

$e_v \geq \varphi$ si $q=1$, $1,2\varphi$ si $q=2$

4cm

avec:

p: nombre de ligne de conduits ($p \leq 3$)

q: nombre de colonne de conduits ($q \leq 2$)

V.6.1 Distance des armatures de précontrainte aux parements

La distance minimale centre un conduit ou un paquet de conduits et un parement doit satisfaire aux conditions ci-après:

$c \geq 3/4a$

φ limité à 80mm

$d=3\text{cm}$: cas d'ouvrages à l'abri des intempéries

$d=4\text{cm}$: cas les ouvrages courants

$d=5\text{cm}$: cas d'ouvrages exposés à une atmosphère agressive

V.7 Précontrainte par Pré tension

V.7.1 Groupement des armatures de précontrainte

Les armatures de précontrainte par pré-tension ne doivent pas être groupées en paquets

V.7.2 Espacement des armatures de précontrainte

L'entre axe minimal à prévoir entre les armatures (fils ou torons) ne doit pas être inférieur à trois fois leur diamètre.

V.7.3 Distance des armatures de précontrainte aux parements

La distance de l'axe de ces armatures au parement le plus proche ne doit pas être inférieure à 2,5 fois leur diamètre.

En outre, l'enrobage doit être au moins égal à:

- 1cm pour les parois coffrées qui sont situées dans les locaux couverts et closet qui ne sont pas exposées aux condensations;
- 3cm pour les parois coffrées exposées aux intempéries susceptibles de l'être, exposées aux condensations, ou au contact d'un liquide;
- 3 et 4cm, respectivement, pour les parois non coffrées, dans les cas définis dans les deux cas qui précèdent;
- 5cm pour les ouvrages exposés à une atmosphère agressive.

V.7.4 Enrobage des armatures passives

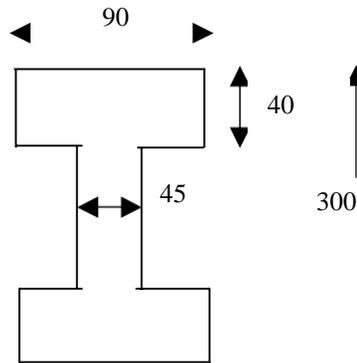
L'enrobage de toute armature doit être au moins égal à:

- 1 cm pour les parois qui sont situées dans des locaux couverts et clos et qui ne sont pas exposées aux condensations;
- 3cm pour les parois coffrées ou non qui sont soumises (ou sont susceptibles de l'être) à des actions agressives, ou des intempéries, ou des condensations, ou au contact d'un liquide;
- 5 cm pour les ouvrages à la mer ou exposés aux embruns ou aux brouillards salins, ainsi que pour les ouvrages exposés à une atmosphère agressive.

V.8 EXERCICES

EXERCICE 1:

On considère une poutre isostatique de longueur 25m , précontrainte par trois câbles de diamètre 80mm:



Données:

$G=61$ kN/m, $Q=158$ kN/m, $f_{cj}=30$ MPa, $P=8.45$ MN, $Z=2.484$ m

1. Déterminer à une distance de 1m de l'appui ($\alpha=8^{\circ}69$):

- ✓ L'effort tranchant ELS V_G
- ✓ L'effort tranchant ELS V_Q
- ✓ L'effort tranchant réduit V_{r1} en ELS
- ✓ L'effort tranchant réduit V_{r2} en ELS
- ✓ Contrainte du cisaillement ELS
- ✓ Contrainte de compression

2. Déterminer à une distance de 1m de l'appui ($\alpha=8^{\circ}69$):

- ✓ L'effort tranchant ultime V_{ru}
- ✓ L'effort tranchant ultime V'_{ru}
- ✓ Contrainte de cisaillement ultime
- ✓ Angle d'inclinaison des bielles

Références Bibliographiques

- [1] ABDELAZIZ YAZID. «Béton précontraint: Cours et exercices». Université de Bechar. (2006).
- [2]KONIN.A. « Cours de Béton Précontraint». Institut international d'ingénierie de l'eau et de l'environnement.
- [3].THONIER. H. «Le béton précontraint aux états limites ». Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1992).
- [4] J. FUENTES. «La précontrainte dans le bâtiment». Eyrolles (1983).
- [5] CHERAIT YACINE. «Le béton précontraint aux états limites». Direction de la production universitaire de Guelma, DPUG (2004).
- [6] A. E. NAAMAN. «Prestressed concrete analysis and design». Mac Graw Hill (1983).
- [7] AURELIO MUTTONI. «Conception et dimensionnement de la précontrainte». Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (2012).
- [8] CHAUSSIN, R. et al . «La précontrainte» .Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1992).
- [9] GERWICK,B.« Construction of prestressed concrete structures». Morris NY(1971).