الفصل الثاني

الدوال الحقيقية $Real\ functions$

فهرس الفصل

تربط الدالة الحقيقية للمتغير الحقيقي قيمة حقيقية بأي عدد من مجال تعريفها. هذا النوع من الدوال العددية يجعل من الممكن على وجه الخصوص صياغة علاقة بين كميتين فيزيائيتين. تمييزة بمنحناها التمثيلي في المستوى المزود بمعلم، ويمكن أيضا تحديد هذه الدالة من خلال صيغة معينة أو معادلة تفاضلية أو شكل تحليلي.

A real-valued function of a real variable relates a real value to any number within its domain. This type of numerical function makes it possible, in particular, to formulate a relationship between two physical quantities. It is characterized by its graphical representation in the coordinate plane, and can also be defined by a specific formula, differential equation, or analytical form.

1.2 الدالة العددية *Numerical function*

1.1.2 : Definition - تعريف

لتكن E و F مجموعتان و f علاقة من المجموعة E نحو المجموعة F . نقول عن f أنها دالة إذا أرفقت بكل عنصر من E عنصرا على الأكثر من F ونكتب:

Let E and F be two sets and f be a relation from the set E to the set F. We say that f is a function, if every element of E is associated with at most one element of F, and we write:

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x)=y \end{array}}$$

is an application تشكل تطبيق.

2.1.2 : Definition - تعريف

نقول أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان :

We say that f is a numerical function if and only if:

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & E\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & F\subset\mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=y \end{array}}$$

is an application تشكل تطبيق.

بمعنى أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان لكل عنصر x من E صورة على الأكثر في $F\in\mathbb{R}$.

In other words, f is a numerical function if and only if for every element x in E, its image in F is at most one real number.

1.1.2 : Example - مثال

الدالة مقلوب x :

The function is the inverse of x:

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty,0[\cup]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1.1.2 Domain of definition مجموعة التعريف

تحديد مجموعة تعريف دالة عددية يعني إيجاد مجموعة الأعداد التي يمكن أن نجد صورها بهذه الدالة. ولهذا يمكن أن نعرفها كما يلي:

To determine the domain of a numerical function, we need to find the set of numbers for which the function is defined. So we can define the domain of a numerical function as follows:

3.1.2 : Definition - تعريف

لتكن f دالة عددية. مجموعة تعريف f، التي نرمز لها بالرمز $\mathrm{Dom}(f)$، هي مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل $f(x)$ عدداً حقيقياً محدداً. ونكتب

Let f be a numerical function. The domain of f, denoted by $\mathrm{Dom}(f)$, is the set of all real numbers x such that $f(x)$ is a well-defined real number and we write:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}}$$

بمعنى آخر، مجموعة تعريف الدالة العددية هي مجموعة جميع القيم التي تعطي نتيجة عددية حقيقية عند إدخالها إلى الدالة، والتي تجعل الدالة محددة.

In other words, the domain of a numerical function is the set of all values for which the function is defined and has a real number output.

$$\begin{array}{rcl} f:\ \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

نأخذ كمثال

2.1.2 : Example - مثال

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

Let the function f be defined as follows

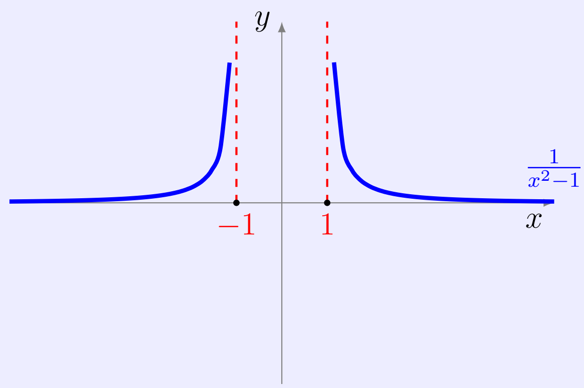
$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\frac{1}{(x^2-1)}. \end{aligned}$$

المتغير x يوجد بمقام الدالة . ونعلم أن مقام عدد حقيقي لا يمكن أن يساوي 0. إذن هنا لا يمكننا أن نحسب صورة العدد 1 و لا العدد -1 بالدالة f . بالتالي f معرفة على جميع الأعداد الحقيقية بإستثناء $-1, 1$ و نكتب :

The variable x is in the denominator of the function. We know that a real number cannot have a denominator equal to zero. Therefore, we cannot compute the image of the numbers 1 and -1 under the function f. Hence, f is defined for all real numbers except -1 and 1, and we write:

$$(f:\quad \textit{Defined} \quad \text{معرفة}\ ) \Longleftrightarrow x^2-1\neq 0$$

$$\begin{aligned} x^2-1 &= 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \\ &\Longleftrightarrow x=1\wedge x=-1 \\ &\Longleftrightarrow D_f=\mathbb{R}_{-\{1,-1\}} \\ &\Longleftrightarrow D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{aligned}$$



2.1.2 منحنى الدالة Function curve

4.1.2 : Definition - تعريف

منحنى الدالة $f : U \to \mathbb{R}$ هو المجموعة الجزئية Γ_f من $\mathbb{R}^2$ المعرفة كما يلي

The graph of the function $f : U \to \mathbb{R}$ is the subset Γ_f of $\mathbb{R}^2$ defined as follows:

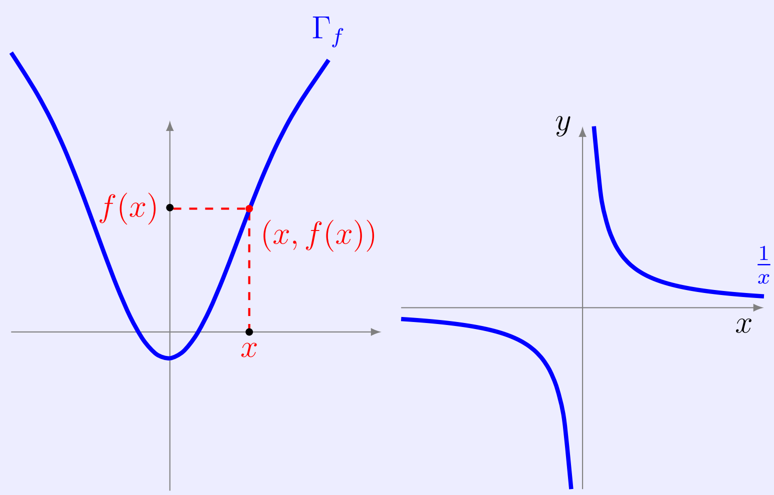
$$\boxed{\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.}$$

3.1.2 : Example - مثال

يمينا منحنى الدالة $1/x$ ويسارا منحنى الدالة

To the right the graph of the function $1/x$ and to the left of the graph of the function

$$\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + \sin\left(\frac{3(x-1)}{2}\right).$$



2.2 التماثل والدورية *Parity and periodicity*

في هذا الجزء، سنتعلم كيفية تحديد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم لا، باستخدام الرسم البياني الخاص بها أو تعريفها. حيث يشير تناظر منحنى الدالة إلى ما إذا كانت فردية أم زوجية.

In this section, we will learn how to determine whether a function is even, odd, or neither, using its graph or its definition. The symmetry of the function's curve indicates whether it is odd or even.

1.2.2 Even function الدالة الزوجية

5.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f دالة زوجية إذا كان :

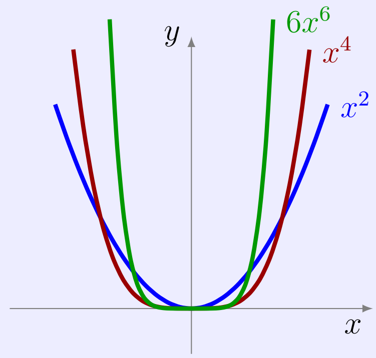
We say that f is an even function if:

$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x) = f(-x).}$$

4.2.2 : Example - مثال

الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto ax^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ زوجي

Functions defined on the set $\mathbb{R}$ as $x \mapsto ax^n$ where n is even, are even functions.



إذا كانت الدالة f زوجية ، فهذا يعني أن $f(-x) = f(x)$ لجميع x في نطاق الدالة. وبالتالي ، إذا قمنا بتبديل x بـ $-x$ في نقطة $M(x_0, f(x_0))$ ، فستصبح النقطة $M(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, f(x_0))$.

If the function f is even, this means that $f(-x) = f(x)$ for all x in the domain of the function. Therefore, if we replace x with $-x$ in the point $M(x_0, f(x_0))$, the point $M'(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, f(x_0))$ is obtained.

بالنسبة لمحور التراتيب، فإنه يمثل محور الـ x، لذلك يتم تبادل إحداثيات x فقط. وبالتالي ، يمكننا أن نرى أن نقطة $M(-x_0, f(x_0))$ هي المتناظرة لنقطة $M(x_0, f(x_0))$ بالنسبة لمحور التراتيب. وبالتالي ، فإن النقطتين M و M' هما متناظرتين بالنسبة لمحور التراتيب.

Regarding the axis of symmetry, it represents the x-axis, so only the x-coordinates are exchanged. Therefore, we can see that the point $M'(-x_0, f(x_0))$ is the reflection of the point $M(x_0, f(x_0))$ with respect to the axis of symmetry. Thus, the points M and M' are symmetric with respect to the axis of symmetry.

2.2.2 الدالة الفردية Odd function

6.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f دالة فردية إذا كان :

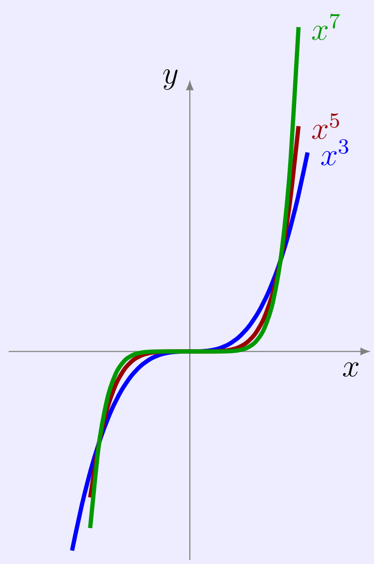
We say that f is an odd function if:

$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x).}$$

5.2.2 : Example - مثال

الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto x^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ فردي

Functions defined on the set $\mathbb{R}$ as follows $x \mapsto x^n$ where $(n \in \mathbb{N})$ is an odd functions



إذا كانت الدالة f فردية، فذلك يعني أن $f(-x) = -f(x)$ لجميع x في مدى الدالة. وبالتالي، إذا قمنا بتبديل x بـ $-x$ في النقطة $M(x_0, f(x_0))$، فسيتم الحصول على النقطة $M'(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, -f(x_0))$.

If the function f is odd, this means that $f(-x) = -f(x)$ for all x in the domain of the function. Therefore, if we replace x with $-x$ in the point $M(x_0, f(x_0))$, the point $M'(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, -f(x_0))$ is obtained.

وبالنسبة للمبدأ، فهو النقطة $(0,0)$ على مستوى الإحداثيات. وبالتالي، يمكننا أن نرى أن النقطة $M'(-x_0, f(-x_0))$ هي انعكاس النقطة $M(x_0, f(x_0))$ بالنسبة للمبدأ. وبالتالي، تكون النقطتين M و M' متماثلتين بالنسبة للمبدأ.

Regarding the origin, it is the point $(0,0)$ on the coordinate plane. Therefore, we can see that the point $M'(-x_0, f(-x_0))$ is the reflection of the point $M(x_0, f(x_0))$ with respect to the origin. Thus, the points M and M' are symmetric with respect to the origin.

3.2.2 الدالة الدورية Periodic function

بيانيا، تشير الدوال الدورية إلى نموذج يُعاد إنتاجه بشكل متكرر في المستوي الديكارتي. لفهم مفهوم الدورية تماما، من المهم إتقان مفاهيم الدورة والفترة.

Graphically, periodic functions refer to a pattern that is repeated regularly in the Cartesian plane. To fully understand the concept of periodicity, it is important to master the concepts of cycle and period.

7.2.2 : Definition - تعريف

يسمى جزء الرسم البياني الذي يتوافق مع أصغر جزء من نمط متكرر بدور الدالة. و نسمى الفجوة بين اثنين من النقاط الفاصلة الموجودة في نهايات نفس الدور باسم الفترة.

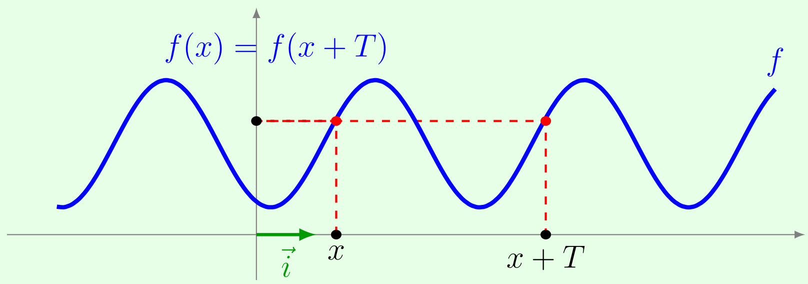
The part of the graph that corresponds to the smallest repeating pattern of a periodic function is called one cycle. The gap between two consecutive points that mark the end of the same cycle is called the period.

8.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد $k > 0$ حيث :

We say that f is a periodic function if there exists $k > 0$ where :

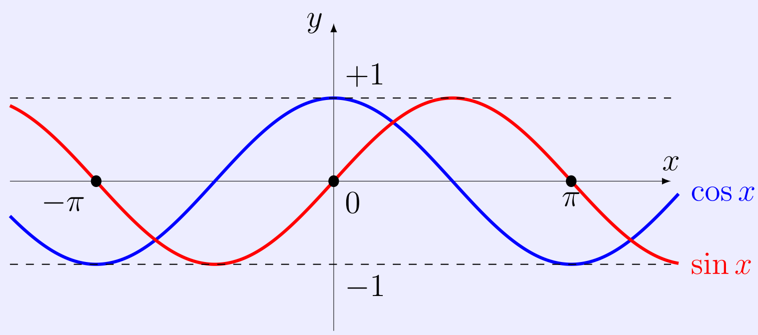
$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x+k) = f(x).}$$



6.2.2 : Example - مثال

الدوال *sine* و *cosine* دوال دورية دورها 2π والدالة *tangent* دالة دورية دورها π.

The sine and cosine functions are periodic functions with a period of 2π, while the tangent function is a periodic function with a period of π.



4.2.2 Positive and negative functions الدوال الموجبة والسالبة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة تعريفها D_f. وليكن Δ مجالا من D_f.

Let f be a numerical function defined on a set D_f, and let Δ be a subset of D_f.

9.2.2 : Definition - تعريف

تكون الدالة f موجبة (تماما) على Δ إذا كان

The function f is said to be positive (or strictly positive) on Δ if:

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \geq 0 \quad (f(x) > 0).}$$

و تكون الدالة f سالبة (تماما) على Δ إذا كان

The function f is said to be negative (or strictly negative) on Δ if:

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \leq 0 \quad (f(x) < 0).}$$

1.2.2 : Remark - ملاحظة

- إذا كانت الدالة f موجبة فإن منحناها يكون فوق محور الفواصل والعكس بالنسبة لمنحنى الدالة السالبة.

If the function f is positive, its graph lies above the x-axis, and conversely, if the function f is negative, its graph lies below the x-axis.

- إذا كانت الدالة f موجبة تماما أو سالبة تماما فإن منحناها لا يتقاطع ابدا مع محور الفواصل.

If the function f is strictly positive or strictly negative, its graph never intersects the x-axis.

5.2.2 العمليات على الدوال Operations on functions

لتكن $f : U \to \mathbb{R}$ و $g : U \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على نفس الجزء U من المجموعة $\mathbb{R}$. ومنه نستطيع تعريف الدوال التالية:

Let $f : U \to \mathbb{R}$ and $g : U \to \mathbb{R}$ be two defined functions on the same part U of the set $\mathbb{R}$. From this, we can define the following functions:

1) **مجموع الدالتين f و g هو الدالة $f + g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي**

The sum of the functions f and g is the function $f + g : U \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\forall x \in U, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) **جداء الدالتين f و g هو الدالة $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي**

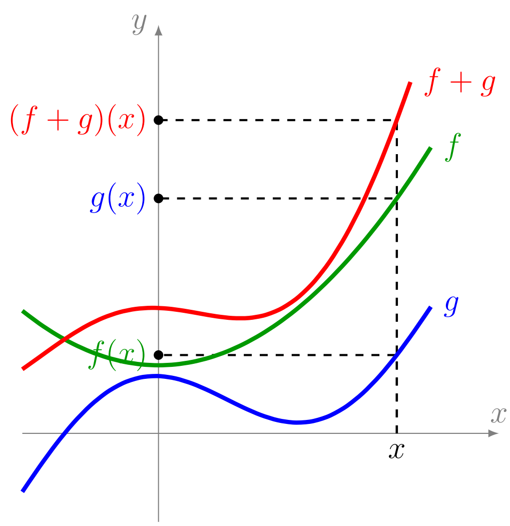
The product of the functions f and g is the function $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\forall x \in U, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3) الجداء بسلمي $\lambda \in \mathbb{R}$ والدالة f هو الدالة $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

The product by scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ and the function f is the function $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\forall x \in U, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$



6.2.2 Comparison of two functions مقارنة دالتين

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس الجزء $\Delta \subset D_f \cap D_g$. ومنه نقول أن f أصغر من أو يساوي g ونكتب

Let f and g be two defined functions on the same domain $\Delta \subset D_f \cap D_g$. We say that f is less than or equal to g, denoted as:

$$\boxed{f \leq g : \quad \text{if} \quad \text{إذا كان} \quad \forall x \in \Delta, f(x) \leq g(x).}$$

و نقول أن f أكبر من أو يساوي g ونكتب

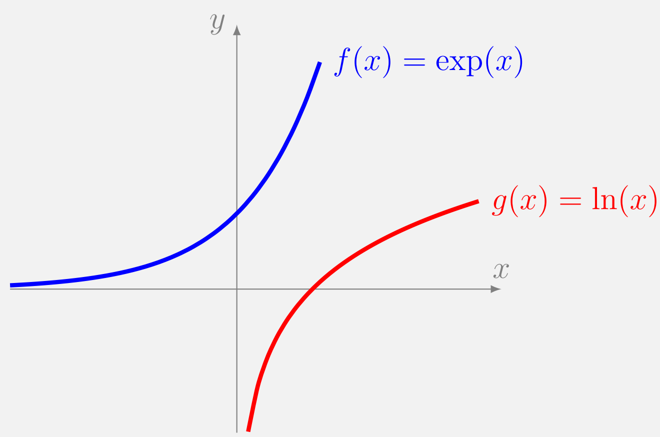
We say that f is greater than or equal to g, denoted as:

$$\boxed{f \geq g : \quad \text{if} \quad \text{إذا كان} \quad \forall x \in \Delta, f(x) \geq g(x).}$$

2.2.2 : Remark - ملاحظة

إذا كانت الدالة f أكبر من أو يساوي g فإن منحنى الدالة f يكون فوق منحنى الدالة g .

If the function f is greater than or equal to g, then the graph of the function f lies above the graph of the function g.



7.2.2 رتابة دالـــة Function monotony

لتكن f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f. وليكن I مجالا من D_f.

Let f be a function defined on its domain D_f, and let I be a subset of D_f.

10.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متزايدة على I إذا وفقط إذا كان :

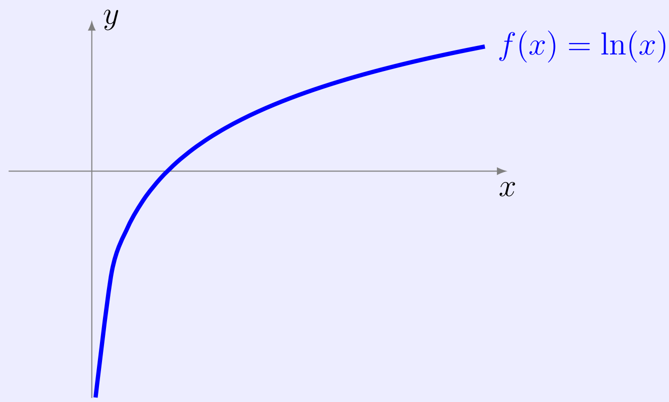
We say that f is increasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \geq f(y).}$$

7.2.2 : Example - مثال

الدالة لوغاريتم $x \mapsto \ln(x)$ دالة متزايدة على المجال $]0, +\infty[$.

The function logarithm $x \mapsto \ln(x)$ is an increasing function on the domain $]0, +\infty[$.



11.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متزايدة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

We say that f is strictly increasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) > f(y).}$$

12.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متناقصة على I إذا وفقط إذا كان :

We say that f is strictly decreasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \leq f(y).}$$

13.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متناقصة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

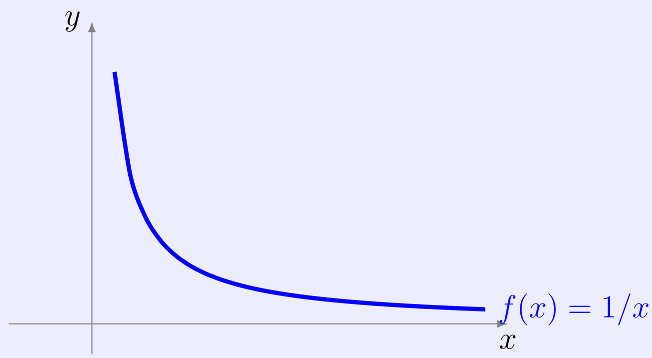
We say that f is strictly decreasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) < f(y).}$$

8.2.2 : Example - مثال

الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ دالة متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$.

The inverse function $x \mapsto \frac{1}{x}$ is a strictly decreasing function on the domain $]0, +\infty[$.



8.2.2 Finite function الدالة المحدودة

قبل البدء في البحث ما إذا كانت الدالة محدودة أو لا لابد ان تكون الدالة معرفة على مجموعة غير خالية ثم نبدأ في البحث عن حدود الدالة.

Before investigating whether a function is bounded or not, it must be defined on a non-empty set, and then we can start searching for the bounds of the function.

14.2.2 : Definition - تعريف

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f.

Let f be a numerical function defined on the set D_f

1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث :

We say that f is bounded above if and only if there exists a real number M such that:

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) \leq M.}$$

2) نقول أن f محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m بحيث :

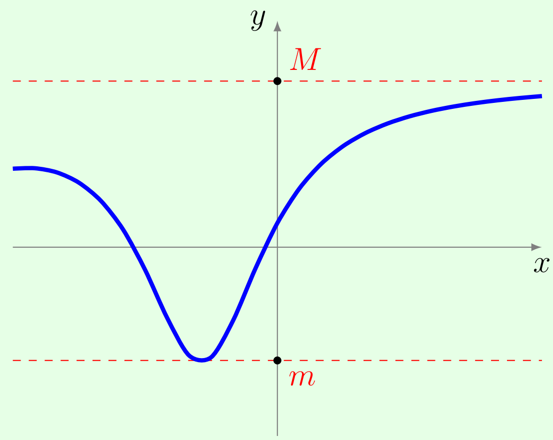
We say that f is bounded below if and only if there exists a real number m such that:

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad m \leq f(x).}$$

3) نقول أن f محدودة إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث :

We say that f is bounded if and only if there exist two real numbers m and M such that:

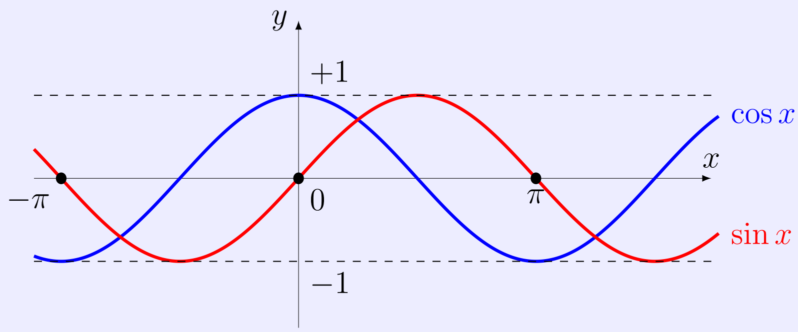
$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad m \leq f(x) \leq M.}$$



9.2.2 : Example - مثال

الدوال *sine* و *cosine* دوال محدودة.

The sine and cosine functions are bounded functions.



9.2.2 القيم القصوى والدنيا لدالة Max and min values of a function

15.2.2 : Definition - تعريف

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و ليكن $x_0 \in D_f$ و I مجال من D_f.

Let f be a numerical function defined on the set D_f, and let $x_0 \in D_f$ and I be a subset of D_f.

1) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان
We say that the number $f(x_0)$ is the absolute maximum value of the function f at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

2) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة قصوى نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و
We say that the number $f(x_0)$ is a relative maximum value of the function f at the point x_0 in the domain I if $x_0 \in I$ and:

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

3) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة الدنيا المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان
We say that the number $f(x_0)$ is the absolute minimum value of the function f at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

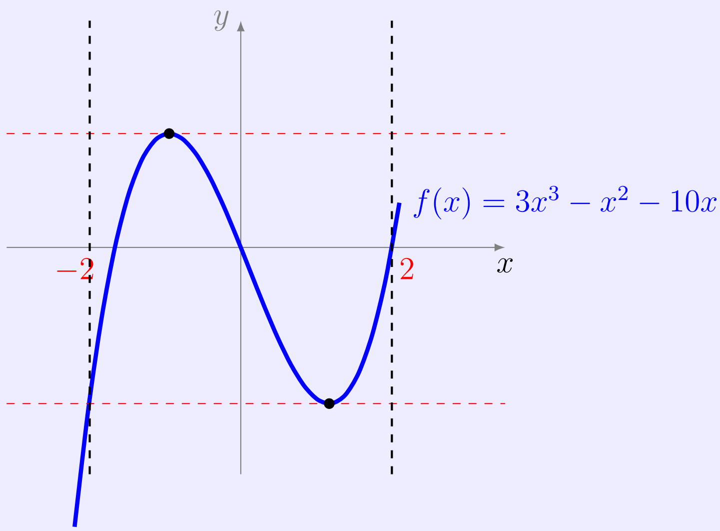
4) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة دنيا نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و
We say that the number $f(x_0)$ is a relative minimum value of the function f at the point x_0 in the domain I if $x_0 \in I$ and:

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

10.2.2 : Example - مثال

الدالة f تقبل حد علوي وآخر سفلي في النقطتين المحددتين في الرسم على المجال $[2,2]$.

The function f has an upper limit and a lower limit at the two specified points in the graph on the domain $[2,2]$.



3.2 النهايـــات *Limits*

تعتبر النهايات من أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات ومن المفاهيم المهمة في التحليل حيث يعتمد عليها مفهوم الاستمرار والاشتقاق والتكامل. ولا شك في أن القارئ قد سبق له دراسة موضوع النهايات، لكن في هذا الفصل ندرس النهايات بشكل أكثر دقة.

Limits are one of the fundamental concepts in mathematics and an important concept in analysis, upon which the concepts of continuity, differentiation, and integration rely. Undoubtedly, the reader has already studied the topic of limits, but in this chapter, we study limits in more detail.

1.3.2 تعاريـــف Definitions

النهاية عند نقطة End at point

16.3.2 : Definition - تعريف

نقول أن المجموعة الجزئية V من $\mathbb{R}$ أنه جوار النقطة x_0 إذا كانت تحتوي على مجال مفتوح يحوي النقطة x_0.

We say that a subset V of $\mathbb{R}$ is a neighborhood of the point x_0 if it contains an open set that includes the point x_0.

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I.

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function defined on the domain I of $\mathbb{R}$. Let $x_0 \in \mathbb{R}$ be a point in the domain I.

17.3.2 : Definition - تعريف

نقول أن الدالة f المعرفة في جوار النقطة x_0 (ربما تكون غير معرفة عند النقطة x_0) أنها تقبل نهاية $\ell \in \mathbb{R}$ عند النقطة x_0 اذا كان:

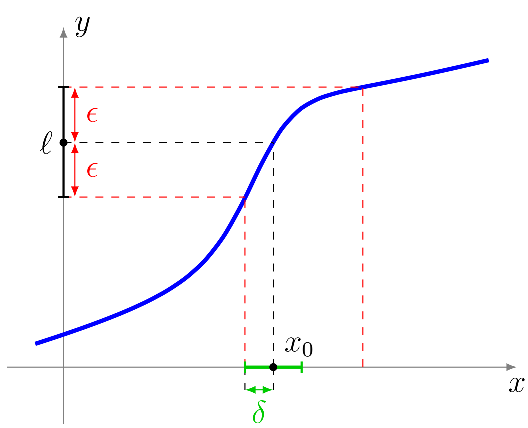
We say that the function f, defined in a neighborhood of the point x_0 (possibly undefined at the point x_0), has a limit $\ell \in \mathbb{R}$ at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

ونقول أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ℓ لما x يؤول الى x_0 و نكتب :

and we say that the function $f(x)$ approaches ℓ as x approaches x_0, and we write:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ \textit{or} \quad \text{أو} \quad \lim_{x_0} f = \ell.}$$



11.3.2 : Example - مثال

لتكن $f(x) = 3x - 2$ المطلوب إيجاد النهاية عند النقطة $x_0 = 1$. لدينا:

Let $f(x) = 3x - 2$, the task is to find the limit at the point $x_0 = 1$. We have:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x - 2) = 1$$

وباستعمال التعريف نجد

Using the definition, we find

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |x-1| < \delta &\implies |3x - 2 - 1| < \epsilon \\ &\implies |3x - 3| < \epsilon \\ &\implies |3(x-1)| < \epsilon \\ &\implies 3|(x-1)| < \epsilon \\ &\implies |(x-1)| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

يعني يكفي أن نأخذ القيمة $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ لكي نجد أن

It means that taking the value $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ is sufficient to show that for any x satisfying $|x - 1| < \delta$, we have $|f(x) - 1| < \epsilon$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

لتكن f دالة معرفة على المجموعة من الشكل $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Let f be a function defined on the set of points of the form $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

18.3.2 : Definition - تعريف

1) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $+\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

We say that the function f tends to $+\infty$ at the point x_0 if

$$\boxed{\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I : \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.}$$

ونكتب:

we write:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.}$$

2) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $-\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

We say that the function f has a limit of $-\infty$ at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall A>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in I:\quad |x-x_0|<\delta \implies f(x)<-A.}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.}$$

لتكن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ المعرفة على مجموعة من الشكل $I =]a,+\infty[$.

Let the function $f : I \to \mathbb{R}$ be defined on a set of the form $I =]a,+\infty[$.

19.3.2 : Definition - تعريف

1) ليكن $\ell\in\mathbb{R}$ نقول أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند $+\infty$ إذا كان

We say that the function f converges to the limit $\ell\in\mathbb{R}$ as x approaches infinity, denoted by $+\infty$, if:

$$\boxed{\forall \epsilon>0,\quad \exists B>0,\quad \forall x\in I:\quad x>B \implies |f(x)-\ell|<\epsilon.}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad Or \quad \text{أو} \quad \lim_{+\infty} f = \ell.}$$

2) ونقول أن الدالة f تقبل النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ إذا كان

We say that the function f converges to infinity, denoted by $+\infty$, as x approaches to $+\infty$, if:

$$\boxed{\forall A>0,\quad \exists B>0,\quad \forall x\in I:\quad x>B \implies f(x)>A.}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

بنفس الطريقة، نعرف الحدّ عند اللانهاية السالبة لدالة f المعرّفة على مجموعة من الشكل $]-\infty, a[$.
نقول إن الدالة f تقبل نهاية $\ell \in \mathbb{R}$ عندما يؤول x إلى اللانهاية السالبة، التي نرمز لها بالرمز $-\infty$،
إذا كان:

Similarly, we define the limit at negative infinity for a function f defined on a set of the form $]-\infty, a[$. We say that the function f converges to the limit $\ell \in \mathbb{R}$ as x approaches negative infinity, denoted by $-\infty$, if:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I : \quad x < B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

ونكتب

we write:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad Or \quad \text{أو} \quad \lim_{-\infty} f = \ell.}$$

2.3.2 العمليات على النهايات Operations on limits

لتكن الدالتين f و g. لتكن النقطة x_0 حيث $x_0 = \pm\infty$.

Let f and g be two functions. Let x_0 be a point where $x_0 = \pm\infty$.

1.3.2 : Proposition - قضيــة

إذا كان

If we have

$$\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$$

فإن :

then:

- من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$

For every $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$.

- $\lim_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0}(f \cdot g) = \ell \cdot \ell'$
- إذا كان $\ell \neq 0$، ومنه $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

If $\ell \neq is0$, then $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

إذا كان أيضا $\lim_{x_0} f = +\infty$ (أو $-\infty$) فإن $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

If also $\lim_{x_0} f = +\infty$ *(or* $-\infty$*), then* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

4.2 الإستمرار Continuity

1.4.2 الإستمرار عند نقطة Continuity at a point

20.4.2 : Definition - تعريف

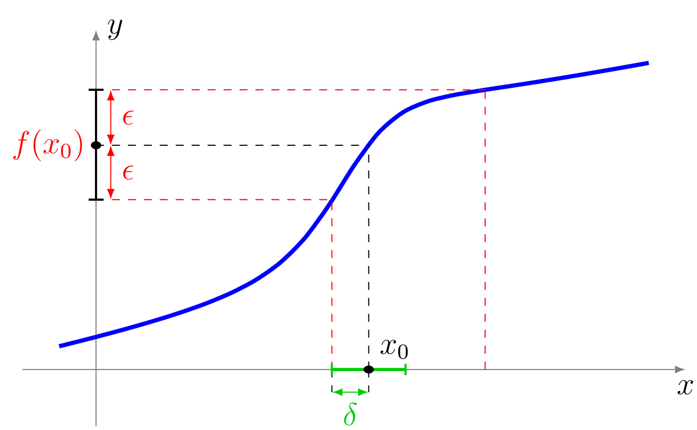
لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I. نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا تحقق مايلي :

Let $f : I \to \mathbb{R}$ *be a function defined on the domain* I *of the real numbers. Let* $x_0 \in \mathbb{R}$ *be a point in the domain* I*. We say that the function* f *is continuous at the point* x_0 *if the following holds:*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.}$$

We write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$



12.4.2 : Example - مثال

الدالة $f(x) = e^x$ مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$ لأن

The function $f(x) = e^x$ is continuous at the point $x_0 = 0$ because

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1 = f(x_0).$$

2.4.2 الإستمرار على مجال Continuity on domain

21.4.2 : Definition - تعريف

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$.

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function defined on the domain I of $\mathbb{R}$.

نقول أن الدالة f مستمرة على المجال I إذاكانت مستمرة على جميع نقاط المجال I. نرمز لمجموعة الدوال المستمرة على مجال I بالرمز $\mathscr{C}(I)$.

We say that the function f is continuous on the domain I if it is continuous on all points of the domain I. We denote the set of continuous functions on the domain of I as $\mathscr{C}(I)$.

نظرية القيم المتوسطة Mean Value Theorem

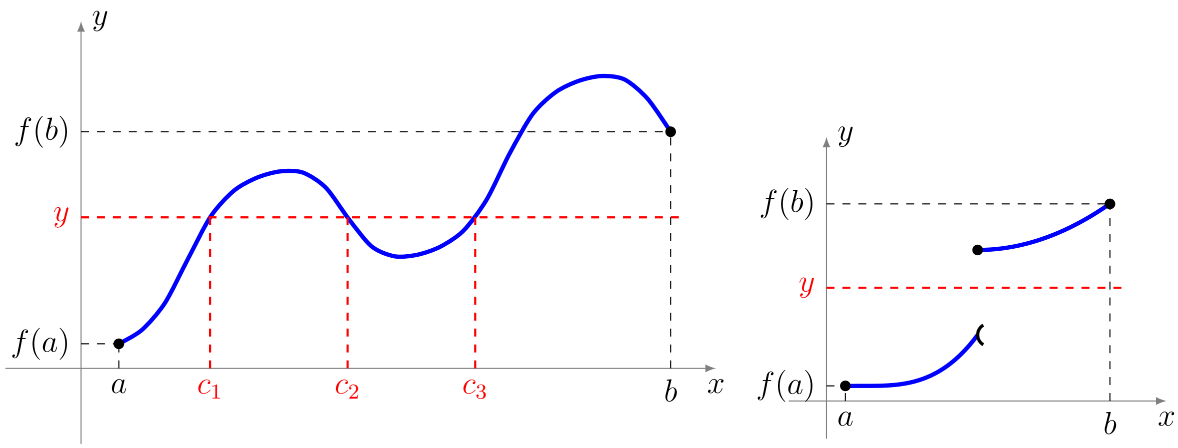
1.4.2 : Theorem - نظرية

لتكن الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ المستمرة على القطعة المستقيمة $[a, b]$. ومنه من أجل كل عدد حقيقي y محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c \in [a, b]$ حيث $f(c) = y$.

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a function that is continuous on the closed interval $[a, b]$. For any real number y that lies between $f(a)$ and $f(b)$, there exists a real number $c \in [a, b]$ such that $f(c) = y$.

(في الشكل الأيسر) ، فإن العدد الحقيقي c ليس بالضرورة فريدا. من ناحية أخرى، إذا لم تكن الدالة مستمرة، فلن تعد النظرية صحيحة (الشكل على اليمين).

(In the left figure), the real number c is not necessarily unique. On the other hand, if the function is not continuous, then the theorem does not hold (as shown in the figure on the right).



3.4.2 الإمتداد بالإستمرار Continuous extension

الامتداد بالإستمرار لدالة يسمح لنا بتمديد نطاقها أو مجالها بسلاسة مع الحفاظ على استمراريتها، مما يمكننا من تحليل سلوكها في سياق أوسع والتغلب على القيود التي فرضتها مجموعة تعريفها الأصلية.

A continuous extension of a function allows us to extend its domain or range smoothly while preserving its continuity, enabling us to analyze its behavior in a broader context and overcome limitations imposed by its original definition.

22.4.2 : Definition - تعريف

ليكن المجال I و لتكن x_0 النقطة من I و $f : I_{\{x_0\}} \to \mathbb{R}$ دالة.

Let the domain I, x_0 be the point from I and $f : I_{\{x_0\}} \to \mathbb{R}$ be a function.

1) نقول أن الدالة f قابلة للتمديد بالإستمرار عند النقطة x_0 إذا كانت f تقبل نهاية منتهية عند x_0. ونكتب:

We say that the function f is continually extendable at the point x_0 if f accepts a finite limit at x_0, and we write:

$$\ell = \lim_{x_0} f.$$

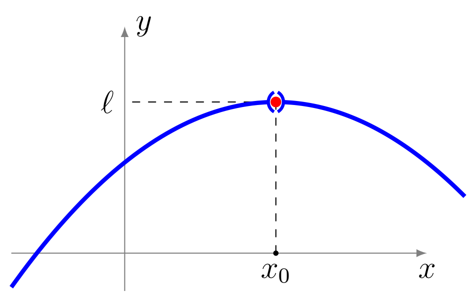
2) نعرف حينها الدالة التي نرمز لها بالرمز $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ من أجل كل $x \in I$

We then define the function that we denote $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ for each $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } \ x \neq x_0 \\ \ell & \text{if } \ x = x_0. \end{cases}$$

ومنه الدالة $\tilde{f}$ مستمرة عند النقطة x_0 وتسمى تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة x_0.

Then the function $\tilde{f}$ is continuous at point x_0, and the extension of the function f is called continuing at point x_0.



13.4.2 : Example - مثال

لتكن الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي

Let the function defined on the set $\mathbb{R}^*$ be as follows

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

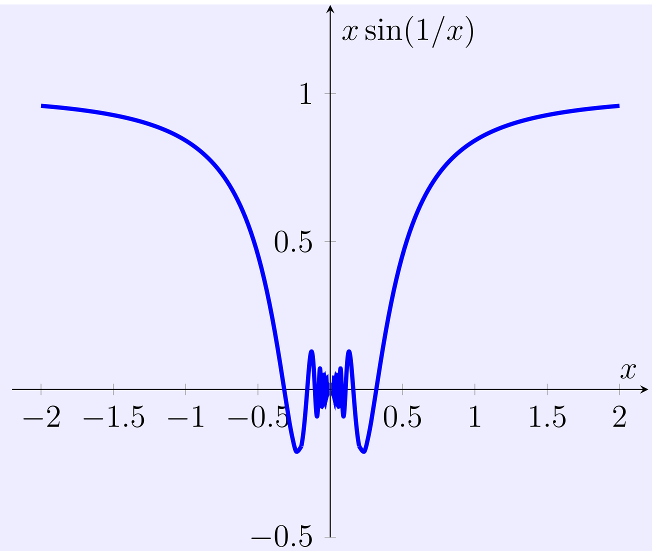
هل f تقبل التمديد بالإستمرار عند 0 ؟

Does f accept extension by continuing at 0?

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $|f(x)| \leq |x|$، نستنتج أن f تؤول لـ 0 عند 0. أي أنها قابلة للتمديد بالإستمرار عند 0 وتمديدها هو الدالة $\tilde{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

We have for each $x \in \mathbb{R}^*$ that $|f(x)| \leq |x|$, we get that f goes to 0 at 0. That is, it is extendable continuously at 0 and its extension is the function $\tilde{f}$ defined on $\mathbb{R}$ as follows:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if } \ x \neq 0 \\ 0, & \text{if } \ x = 0. \end{cases}$$



4.4.2 العمليات على الدوال المستمرة Operations on continuous functions

العمليات الأولية على الاستمرارية هي نتائج فورية للقضايا المماثلة على النهايات.

The primary operations on continuity are immediate consequences of analogous issues at the endpoints.

2.4.2 : Proposition - قضيـة

لتكن الدالتين $f,g : I \to \mathbb{R}$ لتكن النقطة $x_0 \in I$. ومنه:

Let the two functions $f,g : I \to \mathbb{R}$ be given. Let $x_0 \in I$ be a point, hence:

- $\lambda \cdot f$ مستمرة عند x_0 $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$.

  $\lambda \cdot f$ is continuous at x_0 $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$.

- $f+g$ مستمرة عند x_0.

  $f+g$ is continuous at x_0.

- $f \cdot g$ مستمرة عند x_0.

  $f \cdot g$ is continuous at x_0.

- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، ومنه $\frac{1}{f}$ مستمرة عند x_0.

  If $f(x_0) \neq 0$, then $\frac{1}{f}$ is continuous at x_0.

3.4.2 : Proposition - قضية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : J \to \mathbb{R}$ دالتين حيث $f(I) \subset J$. إذا كانت f مستمرة عند النقطة $x_0 \in I$ و إذا كانت g مستمرة عند النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة تركيب $g \circ f$ مستمرة عند النقطة x_0.

Let $f : I \to \mathbb{R}$ and $g : J \to \mathbb{R}$ be two functions, where $f(I) \subset J$. If f is continuous at the point $x_0 \in I$ and g is continuous at the point $f(x_0)$, then the composite function $g \circ f$ is continuous at the point x_0.

5.2 المشتق و قوانين الإشتقاق Derivative and derivation laws

المشتق وقوانين الاشتقاق هي مفاهيم أساسية في الحساب التفاضلي في الرياضيات. يتعلق المشتق بمعدل التغير الفوري لدالة معينة، بينما تشكل قوانين الاشتقاق مجموعة من القواعد والقوانين التي تُسهِّل علينا حساب المشتقات بطرق محددة وتقدم لنا معلومات حول خواص الدوال المشتقة.

Differentiation and the rules of differentiation are fundamental concepts in calculus in mathematics. Differentiation is concerned with the instantaneous rate of change of a given function, while the rules of differentiation form a set of rules and principles that facilitate the calculation of derivatives in specific ways and provide us with information about the properties of derivative functions.

1.5.2 المشتق في نقطة Derivative at a point

ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة. ولتكن $x_0 \in I$.

Let I be an open interval in $\mathbb{R}$ and $f : I \to \mathbb{R}$ be a function. Let $x_0 \in I$.

23.5.2 : Definition - تعريف

نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت نسبة التزايد

We say that the function f is differentiable at the point x_0 if the rate of increase

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

تقبل نهاية ثابتة لما x يؤول للقيمة x_0. نسمي هذه النهاية العدد المشتق أو قيمة المشتق للدالة f عند القيمة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$. ونكتب

accepts a fixed limit as x approaches the value x_0. This fixed limit is called the derivative or the derivative value of the function f at the value x_0, denoted by $f'(x_0)$. We can write it as:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

24.5.2 : Definition - تعريف

نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للإشتقاق على كل نقطة $x_0 \in I$. الدالة $x \mapsto f'(x)$ نسمي دالة المشتق نرمز لها بالرمز f' أو $\frac{df}{dx}$.

We say that the function f is differentiable on the interval I if it is differentiable at every point $x_0 \in I$. The function $x \mapsto f'(x)$ is called the derivative function, denoted by f' or $\frac{df}{dx}$.

14.5.2 : Example - مثال

الدالة المعرفة $f(x) = x^2$ قابلة للإشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$. ولدينا:

The function defined by $f(x) = x^2$ is differentiable at every point $x_0 \in \mathbb{R}$. We have:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

حتى أنه أثبتنا أن العدد المشتق للدالة f عند x_0 هو $2x_0$، أو أيضا يمكننا كتابة : $f'(x) = 2x$.

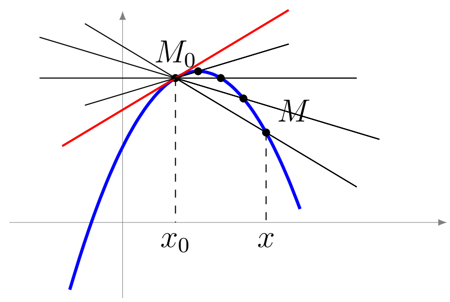
Indeed, we have shown that the derivative of the function f at x_0 is $2x_0$. Alternatively, we can express it as: $f'(x) = 2x$.

2.5.2 التفسير الهندسي للمشتق Geometric interpretation of the derivative

الخط المستقيم الذي يمر عبر نقاط مميزة $(x_0, f(x_0))$ و $(x, f(x))$ له معامل توجيه القيمة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. في النهاية نجد أن معامل توجيه الظل هو القيمة $f'(x_0)$. و معادلة المماس في النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي :

The straight line passing through the distinct points $(x_0, f(x_0))$ and $(x, f(x))$ has a direction coefficient of $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ultimately, we find that the directional derivative coefficient is the value $f'(x_0)$. The equation of the tangent at the point $(x_0, f(x_0))$ is:

$$\boxed{y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).}$$



4.5.2 : Proposition - قضيــة

لتكن f دالة فإن:

Let f be a function. Then,

- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كانت النهاية

f is differentiable at x_0 if and only if the limit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

موجودة ومنتهية.

exists and is finite.

- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد $\ell \in \mathbb{R}$ (الذي يساوي $f'(x_0)$) و دالة $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ حيث $0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \epsilon(x)$ مع

f is differentiable at x_0 if and only if there exists $\ell \in \mathbb{R}$ (equal to $f'(x_0)$) and a function $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ such that $\epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ with the property that:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x).$$

5.5.2 : Proposition - قضيــة

ليكن المجال I المفتوح و $x_0 \in I$ ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة.

Let I be an open interval and $x_0 \in I$. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function.

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند x_0 فإن f مستمرة عند x_0.

If f is differentiable at x_0, then f is continuous at x_0.

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن f مستمرة على I.

If f is differentiable on I, then f is continuous on I.

15.5.2 : Example - مثال

ليكن c عددحقيقي ثابت. ولتكن الدالة الثابتة f التي تأخذ القيمة c. نحسب مشتق الدالة الثابتة:

Let c be a fixed real number. Consider the constant function f that takes the value c. We calculate the derivative of the constant function.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0,$$

ومنه:

then:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

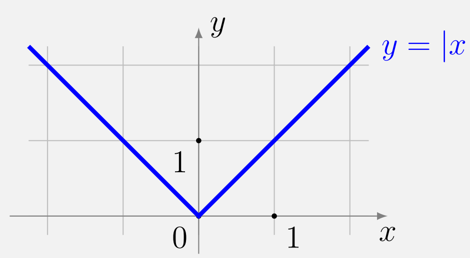
وبالتالي فإن مشتق الدالة الثابتة معدوم.

Therefore, the derivative of the constant function is zero.

3.5.2 : Remark - ملاحظة

العكس خاطئ: على سبيل المثال ، دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ مستمر في 0 ولكنه غير قابلة الإشتقاق عند 0.

The converse is incorrect: for example, the absolute value function $f(x) = |x|$ is continuous at 0 but not differentiable at 0.



وبالفعل، فإن معدل الزيادة عند $x_0 = 0$ يحقق :

Indeed, the rate of increase at $x_0 = 0$ achieves:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{if } x > 0, \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

3.5.2 حساب المشتق Derivative calculation

6.5.2 : Proposition - قضية

لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال I. ومنه من أجل كل $x \in I$ لدينا:

Let $f, g : I \to \mathbb{R}$ be two differentiable functions on the interval I. Hence, for every $x \in I$, we have:

- $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
- $$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

  where λ is a constant real number. حيث λ عدد حقيقي ثابت
- $$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

  (if $f(x) \neq 0$) (إذا كان $f(x) \neq 0$)
- $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

  (if $g(x) \neq 0$) (إذا كان $g(x) \neq 0$)

4.5.2 : Remark - ملاحظة

It is easier to remember the following equation: من الأسهل حفظ المساواة التالية:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \cdot g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$$

7.5.2 : Proposition - قضية

إذا كانت f دالة قابلة للإشتقاق عند x و g دالة قابلة للإشتقاق عند $f(x)$ فإن التركيب $g \circ f$ دالة قابلة للإشتقاق عند x ومشتقها من الشكل:

If f is a function that is differentiable at x and g is a function that is differentiable at $f(x)$, then the composition $g \circ f$ is a function that is differentiable at x, and its derivative is given by:

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).}$$

16.5.2 : Example - مثال

Let's calculate the derivative of the function لنحسب مشتق الدالة

$$\ln(1 + x^2).$$

لدينا $g(x) = \ln(x)$ مع $g'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 1 + x^2$ مع $f'(x) = 2x$.

We have $g(x) = \ln(x)$ with $g'(x) = \frac{1}{x}$ and $f(x) = 1 + x^2$ with $f'(x) = 2x$.

Then, the derivative of the composition و منه مشتق التركيب

$$\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$$

is هو

$$\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g'\big(1 + x^2\big) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Differentiation of some common functions مشتق بعض الدوال المألوفة

- الدالة الثابتة: إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عبارة عن ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

Constant function: If $f(x) = c$, where c is a constant, then $f'(x) = 0$.

- **الدالة القوة: إذا كانت** $f(x) = x^n$، **حيث** n **عبارة عن ثابت، فإن** $f'(x) = nx^{n-1}$.

Power function: If $f(x) = x^n$, where n is a constant, then $f'(x) = nx^{n-1}$.

- **الدالة الأسية: إذا كانت** $f(x) = e^x$، **فإن** $f'(x) = e^x$.

Exponential function: If $f(x) = e^x$, then $f'(x) = e^x$.

- **الدالة اللوغارتمية: إذا كانت** $f(x) = \log_b(x)$، **حيث** b **هو أساس اللوغارتم، فإن** $f'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$.

Logarithmic function: If $f(x) = \log_b(x)$, where b is the base of the logarithm, then $f'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$.

- **الدوال المثلثية:**

Trigonometric functions:

دالة الجيب: إذا كانت $f(x) = \sin(x)$، **فإن** $f'(x) = \cos(x)$.

Sine function: If $f(x) = \sin(x)$, then $f'(x) = \cos(x)$.

دالة الجيب التمامية: إذا كانت $f(x) = \cos(x)$، **فإن** $f'(x) = -\sin(x)$.

Cosine function: If $f(x) = \cos(x)$, then $f'(x) = -\sin(x)$.

دالة الظل: إذا كانت $f(x) = \tan(x)$، **فإن** $f'(x) = \sec^2(x)$.

Tangent function: If $f(x) = \tan(x)$, then $f'(x) = \sec^2(x)$.

حيث:

where:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

- **الدوال الزائدية:**

Hyperbolic functions:

دالة الجيب الزائدية: إذا كانت $f(x) = \sinh(x)$، **فإن** $f'(x) = \cosh(x)$.

Hyperbolic sine function: If $f(x) = \sinh(x)$, then $f'(x) = \cosh(x)$.

دالة الجيب التمامية الزائدية: إذا كانت $f(x) = \cosh(x)$، **فإن** $f'(x) = \sinh(x)$.

Hyperbolic cosine function: If $f(x) = \cosh(x)$, then $f'(x) = \sinh(x)$.

دالة الظل الزائدية: إذا كانت $f(x) = \tanh(x)$، **فإن** $f'(x) = \mathrm{sech}(x)^2(x)$.

Hyperbolic tangent function: If $f(x) = \tanh(x)$, then $f'(x) = \mathrm{sech}^2(x)$.

حيث:

where:

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

4.5.2 المشتقات المتوالية Successive derivatives

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق و ليكن f' مشتقها. إذا كانت الدالة المشتقة $f' : I \to \mathbb{R}$ أيضا دالة قابلة للإشتقاق فإن $f'' = (f')'$ المشتق الثاني للدالة f. بصفة عامة :

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a differentiable function, and let f' be its derivative. If the derivative function $f' : I \to \mathbb{R}$ is also differentiable, then $f'' = (f')'$ is the second derivative of the function f.
In general:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{and....} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

إذا كان المشتق $f^{(n)}$ من الدرجة n موجود، نقول f قابلة للإشتقاق n مرة.

If the nth derivative, $f^{(n)}$, exists, we say that f is differentiable n times.

2.5.2 : Theorem - نظرية

《*Leibniz's rule* علاقة لبينيز》

$$\boxed{(f\times g)^{(n)} = f^{(n)}\times g + C_n^1 f^{(n-1)}\times g^{(1)} + \cdots + C_n^k\ f^{(n-k)}\times g^{(k)} + \cdots + f\times g^{(n)}}$$

In other words: وبعبارة أخرى :

$$\boxed{(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ f^{(n-k)}\times g^{(k)}.}$$

لنبرهن بالتراجع صحة صيغة ليبنيز: من أجل $n = 0$ لدينا :

To prove the correctness of the Leibniz formula by induction: For $n = 0$, we have:

$$(f\times g)^{(0)}(x) = (f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{0} C_0^k f^{(k)}(x) g^{(0-k)}(x) = f(x)\, g(x)$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$. نفرض أن:

So, the property is true for $n = 0$. We assume that:

$$(f\times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

ولنبين أن :

and let's demonstrate that:

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

we have لدينا :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = ((f\times g)^{(n)})'(x).$$

Therefore إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)'$$

so وبالتالي :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\right)$$

Therefore إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).$$

نقوم بتغيير المتغير في المجموع الأول : $p = k+1$

We substitute the variable in the first sum: $p = k+1$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{p=1}^{n+1} C_{n}^{p-1} f^{(p)}(x) g^{(n+1-p)}(x)$$

so وبالتالي :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n}^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

Therefore إذن :

$$\begin{aligned}(f\times g)^{(n+1)}(x) \quad &= \quad \left(\sum_{k=1}^{n} (C_{n}^{k-1} + C_{n}^{k}) \times \left(f^{(k)}(x)\ g^{(n+1-k)}(x)\right)\right) \\ &\quad + C_{n}^{n} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + C_{n}^{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

Note that: **لاحظ أن :**

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \text{ and } C_n^n = C_n^0 = 1$$

Therefore: **إذن :**

$$(f \times g)^{(n+1)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \right) + f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x)$$

لاحظ أنه يمكننا إدخال الحدين الأخيرين في المجموع :

$$C_{n+1}^0 f^{(0)}(x) g^{(n+1-0)}(x) = f^{(0)}(x)\ g^{(n+1)}(x)$$

and **و**

$$C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(n+1-(n+1))}(x) = f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x).$$

Therefore: **إذن :**

$$(f \times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

إذن حسب البرهان بالترجع لدينا :

Therefore, according to the proof by induction, we have:

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq p)(\forall x \in I)\ :\ (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

6.2 الدوال المثلثية Trigonometric functions

الدوال المثلثية ضرورية في الهندسة، والتحليل الرياضي، والفيزياء، والهندسة لحل المشكلات المتعلقة بالزوايا، والمثلثات، والظواهر الدورية.

Trigonometric functions are essential in geometry, calculus, physics, and engineering for solving problems related to angles, triangles, and periodic phenomena.

1.6.2 الدالة تجب و قوس التجب Cosine and arccosine

لتكن الدالة تجب التي نرمز لها بالرمز cos حيث:

Let the cosine function, denoted as cos, where:

$$\begin{aligned} \cos \quad &: \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ &\quad x &\mapsto \cos x, \end{aligned}$$

للحصول على تقابل من هذه الدالة يكفي أخذها على المجال $[0,\pi]$. في هذه المجال، تكون الدالة تجب مستمرة ومتناقصة تماما، وبالتالي فإن الإقتصار:

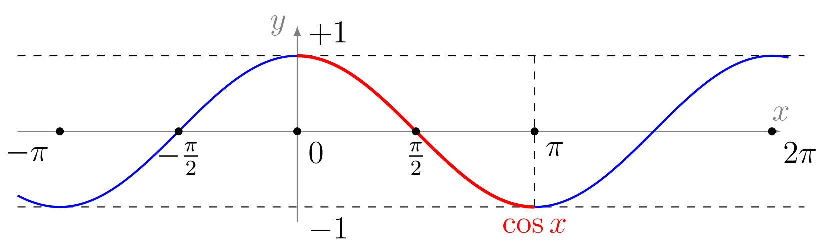
To obtain the bijection of this function, it is sufficient to restrict it to the domain $[0,\pi]$. In this domain, the function cosine is continuous and strictly decreasing. Therefore, the restriction:

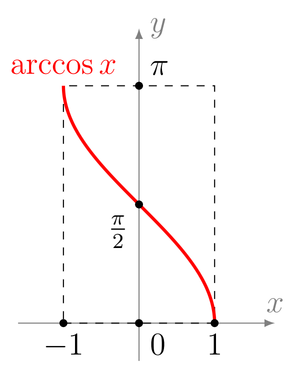
$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

هو تقابل. ودالته العكسية التقابلية تدعى قوس التجب ونكتب

is a bijection, and its inverse function, known as "arccosine", is written as:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





لذلك لدينا، من خلال تعريف التقابل العكسي :

So, through the definition of the inverse bijection:

$$\cos\big(\arccos(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$\arccos\big(\cos(x)\big) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$$

بعبارات أخرى:

In other words:

$$\cos(x) = y \iff x = \arccos y, \qquad x \in [0,\pi] \text{ في:}$$

فإن مشتق الدالة العكسية هو:

The derivative of the inverse function is:

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]-1,1[$$

2.6.2 الدالة جب و قوس الجب Sine and arcsine

إقتصار الدالة جب على المجال $[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ المعرف

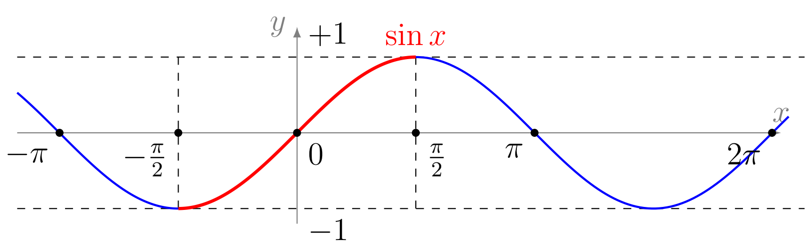
The function sine is restricted to the domain $[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ defined as

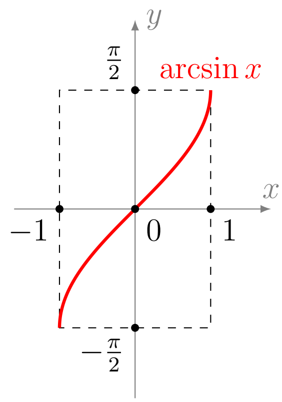
$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

هو دالة تقابلية. تقابلها العكسي يدعى قوس الجب و نرمز له بالرمز arcsine حيث:

It is a bijective function. Its inverse function is called the arc of sin, and we denote it by "arcsine", where:

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}]$$





We have: ولدينا:

$$\sin\big(\arcsin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arcsin\big(\sin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\sin(x) = y \iff x = \arcsin y, \qquad \text{ف:}\ x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

the derivative of the inverse function is: فإن مشتق الدالة العكسية هو:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

3.6.2 الدالة ضل و قوس الضل Tangent and arctangent

إقتصار الدالة ضل على المجال $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

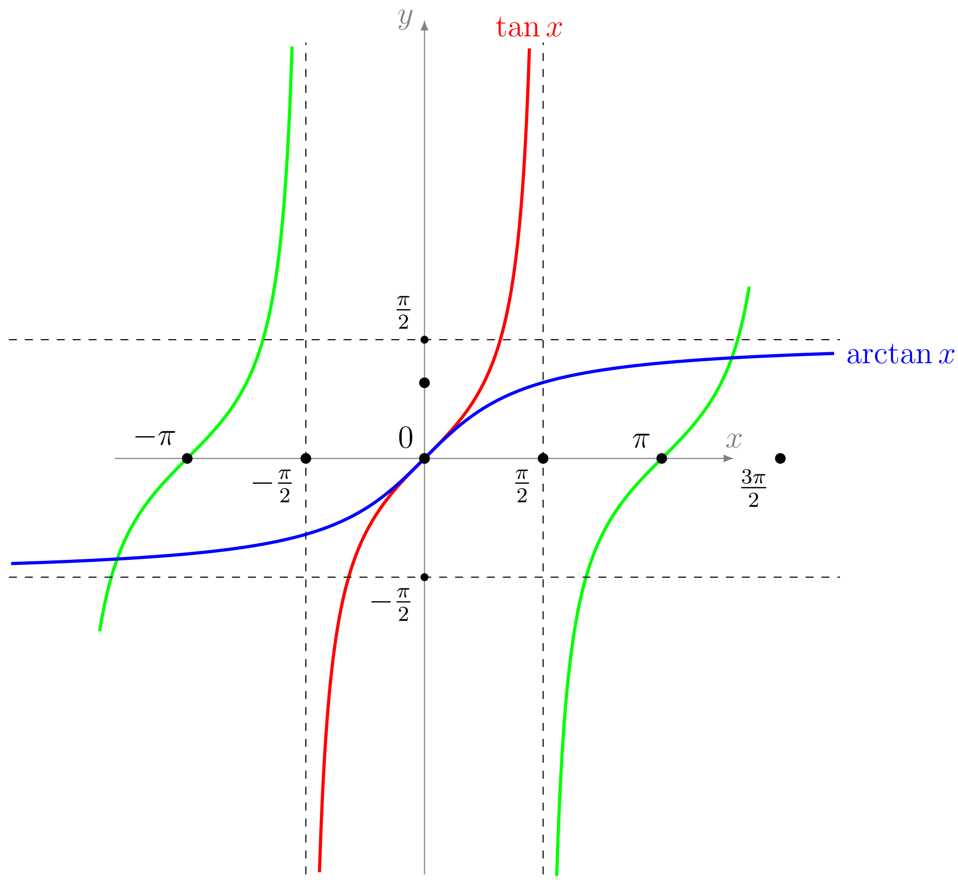
The function tangent restricted to the domain $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

هو دالة تقابلية. نسمي تقابلها العكسي بقوس الضل ونرمز له بالرمز arctangent حيث :

It is a bijective function. We call its inverse function the arc of tangent and we denote it by "arctangent" where:

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$



$$\tan\big(\arctan(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\arctan\big(\tan(x)\big) = x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$

$$\tan(x) = y \iff x = \arctan y, \quad \text{if:} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

فإن مشتق الدالة العكسية هو: the derivative of the inverse function is:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.2 الدوال الزائدية Hyperbolic functions

الدوال الزائدية أو الدوال الزائدة في الرياضيات هي الدوال المماثلة للدوال المثلثية أو الدائرية. لأنها دوال مشتقة من دالة القطع الزائد تم تقديم هذه الدوال من قبل الرياضي السويسري جوهان هنرك لامبرت و لها خواص شبيهة جدا بالدوال المثلثية كما سيتبين لاحقا.

Hyperbolic functions in mathematics are functions similar to trigonometric or cyclic functions. They are derived from the hyperbolic function, these functions were introduced by the Swiss mathematician Johann Henrik Lambert, and they have properties very similar to trigonometric functions, as will be seen later.

1.7.2 دالة جيب التمام الزائدي ومقلوبها Hyperbolic cosine and its inverse

من أجل $x \in \mathbb{R}$، الدالة جيب التمام الزائدي هي الدالة المعرفة:

For $x \in \mathbb{R}$, the hyperbolic cosine function is defined as:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

إقتصارها على المجال $[0, +\infty[$ حيث نكتب:

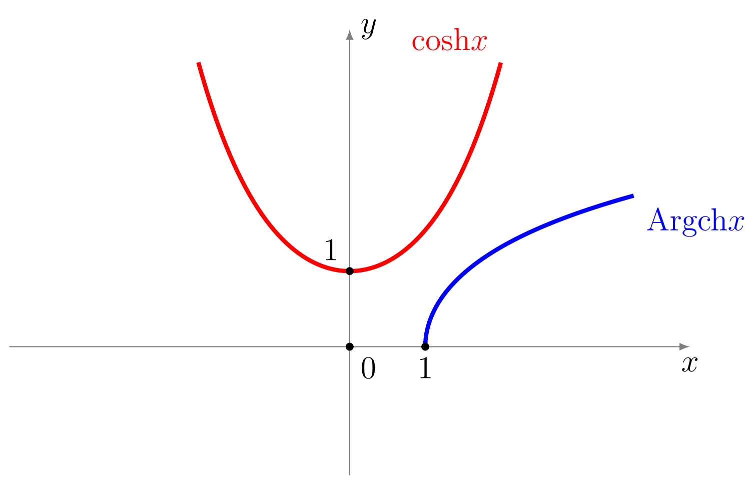
Restricting it to the domain $[0, +\infty[$ where we write:

$$\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$$

يجعل منها دالة تقابلية. نرمز لتقابلها العكسي بالرمز Argch حيث

it makes it a bijective function. We denote its inverse as Argch where:

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$



2.7.2 دالة الجيب الزائدي ومقلوبها Hyperbolic sine and its inverse

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ دالة الجيب الزائدي التي نرمز لها بالرمز :

For every $x \in \mathbb{R}$ the hyperbolic sine function denoted by:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

هي دالة مستمرة، قابلة للإشتقاق متزايدة تماما تحقق مايلي:

It is a continuous, completely differentiable, increasing function that achieves the following:

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$$

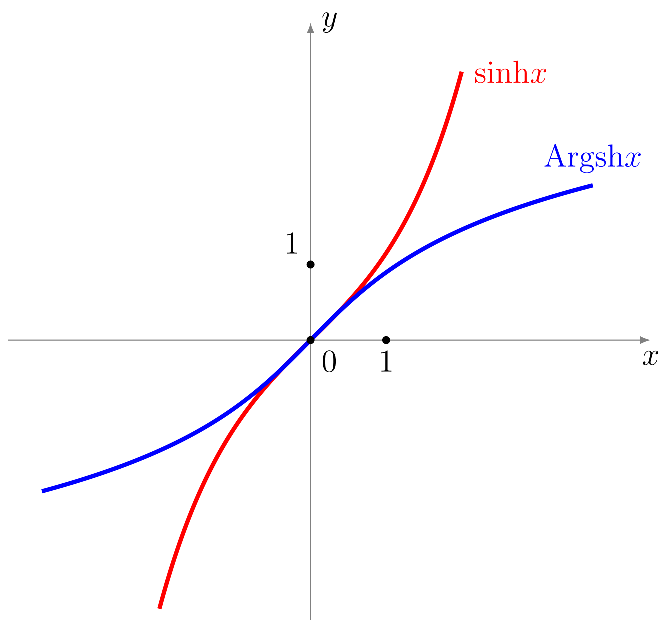
and و

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty,$$

هذا يعني أنها دالة تقابلية. وتقابلها العكسي هو:

This means that it is a bijective function. Its inverse function is:

$$\text{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$



8.7.2 : Proposition - قضيــة

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh' x = \sinh x$ *and* $\sinh' x = \cosh x$

- $\operatorname{Argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متزايدة تماما و مستمرة.

$\operatorname{Argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *is a strictly increasing and continuous function.*

- Argsh دالة قابلة للإشتقاق حيث:

Argsh *is a differentiable function where:*

$$\operatorname{Argsh}'x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

- $$\operatorname{Argsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

3.7.2 دالة الظل الزائدي ومقلوبها Hyperbolic tangent and its inverse

بالتعريف، دالة الظل الزائدي التي نرمزلها بالرمز:

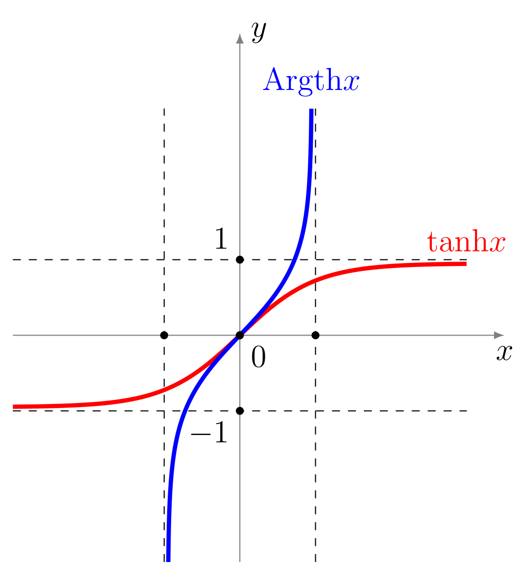
By definition, the hyperbolic tangent function denoted by:

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

هي دالة معرفة $\tanh:\mathbb{R}\to]-1,1[$ وتقابلية، نرمز لتقابلها العكسي بالرمز:

It is a function known as $\tanh:\mathbb{R}\to]-1,1[$ and it is a bijective function. We denote its inverse by:

$$\operatorname{Argth}:]-1,1[\to\mathbb{R}.$$



4.7.2 العلاقات المثلثية للدوال الزائدية Trigonometric relations of hyperbolic functions

(1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(2

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b \\
\cosh(2a) &= \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\,\cosh^2 a - 1 \\
&= 1 + 2\,\sinh^2 a
\end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned}
\sinh(a+b) &= \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a \\
\sinh(2a) &= 2\,\sinh a \cdot \cosh a
\end{aligned}$$

(4

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}$$

(5 **مشتق الدوال الزائدية** Derivative of hyperbolic functions

$$\cosh' x = \sinh x.$$
$$\sinh' x = \cosh x.$$
$$\tanh'^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

(6 **مشتق الدوال مقلوب الدوال الزائدية**

The derivative of the inverse of hyperbolic functions

$$\begin{aligned}
\text{Argch}'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x>1) \\
\text{Argsh}'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\
\text{Argth}'x &= \frac{1}{1-x^2}, \quad (|x|<1)
\end{aligned}$$

(7

$$\begin{aligned}
\text{Argch}x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad (x \geq 1)\\
\text{Argsh}x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad (x \in \mathbb{R})\\
\text{Argth}x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

8.2 النشر المحدود *Limited Expansion*

نأخذ مثال الدالة الأسية. يمكن إعطاء فكرة عن سلوك الدالة $f(x) = \exp x$ حول النقطة $x = 0$ بواسطة ظلها ، الذي تكون معادلته $y = 1 + x$. لقد قمنا بتقريب الرسم البياني بخط مستقيم.

We take the example of the exponential function. You can give an idea of the behavior of the function $f(x) = e^x$ around the point $x = 0$ using its shadow, which has the equation $y = 1 + x$. We have approximated the graph with a straight line.

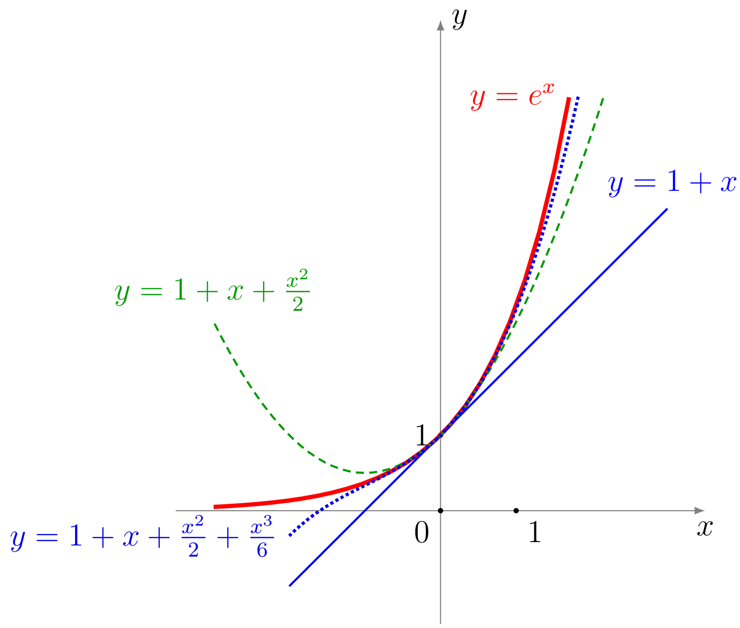
إذا أردنا أن نجد تقريب أفضل ، نأخذ مثلا المعادلة $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$، الرسم البياني للدالة f في جوار النقطة $x = 0$ هو مثل المعادلة $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. هذه المعادلة لها خاصية مميزة هي $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ ثم $g(0) = 0$ ، $g'(0) = 0$ و $g''(0) = 0$. نعثر على معادلة القطع المكافئ يعني نجد تقريب من الدرجة 2 للدالة f.

If we want to find a better approximation, we can take, for example, the equation $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$. The graph of the function f near the point $x = 0$ is like the equation $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

This equation has a special property: $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$, and then $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, and $g''(0) = 0$. We can find the equation of the equivalent parabola, meaning we find a second-degree approximation for the function f.

بالطبع إذا أردنا أن نكون أكثر دقة، فسنستمر بالتقريب باستعمال الدرجة الثالثة والرابعة ...

Of course, if we wanted to be more precise, we would continue to approximate using the third and fourth degrees...



في هذا الجزء من الفصل، سوف نبحث على كثير الحدود من الدرجة n بالنسبة لأي دالة، التي تقترب من الدالة بشكل أفضل. النتائج صالحة فقط في جوار النقطة الثابتة x (غالبا ما تكون بجوار 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة التي تم النظر فيها.

In this part of the chapter, we will look for the nth-degree polynomial approximation for any function that provides a better fit. The results are valid only in the vicinity of a fixed point xx (often near 0). This polynomial approximation will be computed from the successive derivatives at the point under consideration.

1.8.2 صيغة تايلور Taylor formula

تسمح صيغة تايلور، التي سميت على اسم عالم الرياضيات بروك تايلور الذي أنشأها عام 1712، بتقريب دالة قابلة للتفاضل عدة مرات بجوار نقطة بواسطة كثير حدود، الذي تعتمد معاملاته فقط على مشتقات الدالة في هذه النقطة.

The Taylor formula, named after the mathematician Brook Taylor who developed it in 1712, allows for approximating a differentiable function multiple times around a point using power series, whose coefficients depend solely on the derivatives of the function at that point.

3.8.2 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x_0, x \in I$ و منه لدينا

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x_0, x \in I$, then we have

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0), \end{aligned}$$

where حيث

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

17.8.2 : Example - مثال

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

Let the function f be defined as follows:

$$\begin{aligned} f :]-1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

قابل للإشتقاق مالانهاية من المرات، سنقوم بحساب صيغ تايلور في النقطة 0 من المراتب الثلاثة الأولى.

Differentiable infinitely many times, we will compute the Taylor series at the point 0 up to the first three orders.

لدينا: $f(0) = 0$. ثم نحسب $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ نجد $f'(0) = 1$.

We have $f(0) = 0$. Then, when we calculate $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, we find that $f'(0) = 1$.

بعدها نحسب $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ نجد $f''(0) = -1$.

Afterwards, we calculate $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ and find that $f''(0) = -1$.

وأخيرا نحسب $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ ونجد $f^{(3)}(0) = 2$.

Finally, we calculate $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ and find that $f^{(3)}(0) = 2$.

نستطيع أن نثبت بالتراجع أن:

We can demonstrate by induction that:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

حيث يمكن حساب القيمة :

Where the value can be calculated:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

وبالتالي من أجل $n > 0$ لدينا :

Thus for $n > 0$ we have:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

بصفة عامة، كثير الحدود لتايلور للدالة f في النقطة 0 هو

In general, the Taylor polynomial of the function f at the point 0 is

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

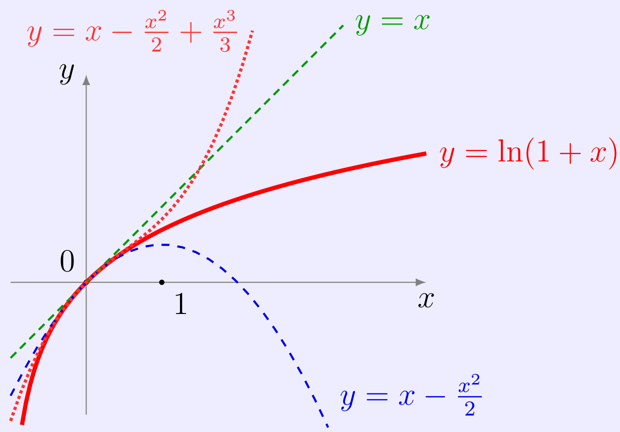
فيما يلي أول ثلاث كثيرات حدود لتايلور:

Here are the first three Taylor series expansions:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x - \frac{x^2}{2}, \\ P_3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

في الرسم البياني أسفله، تقترب الرسوم البيانية لكثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أكثر فأكثر من الرسم البياني لـ f وهذا فقط في جوار 0.

In the graph below, the plots of the Taylor series P_1, P_2, and P_3 approach the graph of f more and more closely, but only in the vicinity of 0.



2.8.2 صيغة ماك ـ لوران Mac-Laurent formula

4.8.2 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x \in I$ و منه لدينا بتطبيق صيغة تايلور في النقطة $x_0 = 0$ نجد صيغة ماك ـ لوران:

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x \in I$ Then have, by applying Taylor's formula at the point $x_0 = 0$, we find the Mack-Laurent formula:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x).}$$

18.8.2 : Example - مثال

$$1)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$2)\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$3)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$3.1)\quad \alpha = -1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$3.2)\quad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$4) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

3.8.2 النشر المحدود لبعض الدوال المألوفة Limited expansion of some common functions

$$\star \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\star \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\star \quad ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

$$\star \quad sh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

4.8.2 عمليات على النشر المحدود Operations on limited expansions

رأينا سابقا من صيغة طايلور وصيغة ماك ـ لوران أنه يمكن أن نغير النشر المحدود لدالة ما في النقطة $a \in \mathbb{R}$ إلى نشر محدود في النقطة 0 ولهذا سوف نشرح العمليات على النشر المحدود فقط في النقطة 0.

We saw previously from Taylor's and the Mac-Loran formula that we can change the limited expansion of a function at the point $a \in \mathbb{R}$ to a limited expansion at the point 0. Therefore, we will explain the operations on the limited expansion only at the point 0.

لتكن $n \in \mathbb{N}$ ولتكن f و g دالتين معرفتين عند 0 تقبلان في جوار 0 النشر المحدود من الدرجة n حيث:

Let $n \in \mathbb{N}$ and let f and g be functions defined at 0 that accept in the neighborhood of 0 the limited expansion of degree n where:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ &= P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

and و

$$g(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$
$$= Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x)$$

9.8.2 : Proposition - قضية

- $f+g$ يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل مجموع نشري الحدود للدالتين f و g:
$f+g$ accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the sum of the two limited expansions of the functions f and g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

- fg يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل جداء نشري الحدود للدالتين f و g مع الإبقاء إلا على الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n:
fg accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the product of the limited expansion of the functions f and g, leaving only the terms with degree less than or equal to n:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

حيث $T_n(x)$ كثير الحدود $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ المتوقف عند الدرجة n.
Where $T_n(x)$ is the polynomial $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ stopping at degree n.

- إذا كانت $g(0) = 0$ (أي $q_0 = 0$) فإن الدالة $f \circ g$ تقبل نشر محدود عند 0 من الدرجة n حيث جزء كثير الحدود المتوقف عند الدرجة n معرف بالتركيب $P(Q(x))$.
If $g(0) = 0$ (i.e. $q_0 = 0$) then the function $f \circ g$ accepts a limited expansion at 0 of degree n where the part of the polynomial stopping at degree n is defined by the structure $P(Q(x))$.

- إذا كان $q_0 \neq 0$ فإن لدينا:
If $q_0 \neq 0$ then we have:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1 + \frac{q_1}{q_0} x + \cdots + \frac{q_n}{q_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{q_0}}.$$

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن F تقبل نشر محدود عند a من الدرجة $n+1$ ويكتب :
If F is a primitive function of the function f, then F accepts a limited expansion at a

of degree $n+1$ *and is written:*

$$F(x) = P_{n+1}(x-a) + (x-a)^{n+1}\eta(x)$$

where: $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$. حيث: $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$.

19.8.2 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $\arctan(x)$.

Calculate the limited expansion of the function $\arctan(x)$.

We know that: نعلم أن:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

We set: نضع

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

and $F(x) = \arctan(x)$ *and we write:* و $F(x) = \arctan(x)$ و نكتب:

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

because $\arctan(0) = 0$, *then:* ولأن $\arctan(0) = 0$ فإن:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

20.8.2 : Example - مثال

- النشر المحدود للدالة $\tan x$ عند 0 من الرتبة 5.

The limited expansion of the function $\tan x$ *at* 0 *is of order* 5.

Firstly: أولا:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x).$$

On the other hand من جهة أخرى

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$$

we set نضع

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x).$$

In the calculation we need u^2 and u^3: نحتاج في الحساب u^2 و u^3 :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

then ثم

$$u^3 = x^5\epsilon(x).$$

so: وبالتالي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

Finely في الأخير

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

- النشر المحدود للدالة $\frac{1+x}{2+x}$ عند 0 من الرتبة 4.

The limited expansion of the function $\frac{1+x}{2+x}$ *at* 0 *of order* 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+o(x^4),\end{aligned}$$

21.8.2 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $h(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big)$ عند 0 من الرتبة 3.

Calculate the limited expansion of the function $h(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big)$ *at* 0 *of order* 3.

- نضع $f(u)=\sin u$ و $g(x)=\ln(1+x)$ ومنه:

We set $f(u)=\sin u$ *and* $g(x)=\ln(1+x)$, *from which:*

$$f\circ g(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{و} \quad g(0)=0.$$

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

We write the limited expansion of order 3 *for the function*

$$f(u)=\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+u^3\epsilon_1(u)$$

for u *in the vicinity of* 0. من أجل u في جوار 0.

We set نضع

$$u=g(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon_2(x)$$

for x *in the vicinity of* 0. من أجل x في جوار 0.

- *We calculate* u^2: نحسب u^2:

$$u^2=\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon_2(x)\Big)^2=x^2-x^3+x^3\epsilon_3(x)$$

and u^3 : — و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x).$$

then: — ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f\circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

9.2 *Exercise series N° 2* سلسلة التمارين رقم

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

Calculate the following limits if they exist. — أحسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

1. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
2. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
3. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$
4. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

Solution : الحــل

1) **لدينا** $\lim_{x\to 5} x^2-11x+28=-2$ **و** $lim_{x\to 5}x^2-25=0$. **علينا الانتباه إلى إشارة المقام. من أجل** $x>5$ **لدينا** $x^2>25$ **ومنه** $\lim_{x\to 5^+} x^2-25=0^+$. **نستنتج :**

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25} = -\infty.$$

2) **نسير بنفس الطريقة، لكن نلاحظ أن:** $\lim_{x\to 5^-} x^2-25=0^-$. **في هذه الحالة لدينا:**

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25} = +\infty.$$